Apuntes de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales 2
E.T.S.I. Telecomunicación
Universidad de Málaga

Carlos García Argos (garcia@ieee.org)
http://www.telecos-malaga.com

Curso 2000/2001

Índice General

TEMA 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1.1 Definición

- Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) es una relación funcional en la que aparece una variable independiente, una incógnita y las derivadas de esa incógnita. Se expresa:

  $$F\left(x, y\left(x\right), y^{'}, \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

  siendo $y\left(x\right)$ la función incógnita.

- El **orden** de una EDO es el mayor orden de derivación que aparece en la relación funcional.
- El **grado** es el mayor exponente que tenga la derivada de mayor orden.

  Ejemplo:

  $$\operatorname{tg} x \cdot \left(y^{'''}\right)^{20} + 5x^2 \cdot \left(y^{IV}\right)^5 - 3x \cdot \left(y^{'''}\right)^{30} = 0$$

  El orden es 4 y el grado 5. ■

Las EDOs de primer orden son ecuaciones de la forma:

$$y^{'} = \tfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \qquad \text{Forma normal o explicita}$$

$$F\left(x, y, y^{'}\right) = 0 \qquad \text{Forma implicita}$$

Buscamos una solución $y\left(x\right)$ que verifique la ecuación, en cualquiera de sus formas.

Formas de las soluciones de una EDO de primer orden

Las soluciones a una EDO de primer orden son siempre curvas. Hay varios tipos de soluciones:

1. **Soluciones generales**: tienen tantas constantes arbitrarias como el orden de la ecuación diferencial. Es una **familia de curvas** en el plano:

   $$\Phi\left(x, y, c\right) = 0$$

   La forma más sencilla es

   $$y^{'} = \frac{dy}{dx} = f\left(x\right) \rightarrow y = \int f\left(x\right) dx + c$$

   donde la constante arbitraria es c.

Ejemplo:

$$y' = 2x \rightarrow y = x^2 + c$$

■

2. **Soluciones particulares**: estas se obtienen asignando un valor a las constantes en la solución general. Hay infinitas soluciones particulares.
   Para darle un valor a la constante, basta con hacer pasar a la curva por un punto. Por ejemplo, para el caso sencillo:
   $$\left.\begin{array}{c} y' = f(x) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0$$
3. **Soluciones singulares**: estas soluciones no están contenidas en la solución general. Una vez se tiene la solución general, la **envolvente** de todas las particulares es la solución singular. Si existe, en los puntos en los que exista, se viola la unicidad de la solución.

Problema de Cauchy o de Valor Inicial

El problema de Cauchy o de Valor Inicial (PVI) consiste en hallar la solución de la ecuación diferencial, en una de sus formas, tal que dicha solución pase por un punto. Tiene dos expresiones:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{c} F\left(x,y,y'\right) = 0 \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

A $y(x_0) = y_0$ se le llama **valor inicial** o condición inicial.

Condición de Lipschitz:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **Lipschitziana** en D si se verifica

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

para todo par $(x,y_1), (x,y_2) \in D$ siendo L una constante llamada *constante de Lipschitz*.

Demostrar esta condición para Ecuaciones Diferenciales es bastante complicado, así que usaremos la siguiente:

Si existe $f'_y(x,y)$ y es continua en D, entonces f es de Lipschitz en D. Es condición suficiente.

Demostración. Si $f'_y(x,y)$ es continua en D, está acotada en D:

$$\left|f'_y(x,y)\right| \leq N \qquad \forall (x,y) \in D$$

Sean $(x,y_1), (x,y_2) \in D$. Aplicando el teorema del valor medio tenemos:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|f'_y(x,\epsilon) \cdot (y_1 - y_2)\right| = \left|f'_y(x,\epsilon)\right| \cdot |y_1 - y_2| \leq N \cdot |y_1 - y_2|$$

siendo $y_1 \leq \epsilon \leq y_2$, con lo que queda demostrado. □

1.2 Teorema de Existencia y Unicidad

Antes de empezar, tenemos que resaltar que este teorema únicamente nos va a dar condiciones suficientes, nunca necesarias, así que en caso de que no se verifique para alguna ecuación diferencial, simplemente no podremos decir nada acerca de ella.

Dado el PVI en forma normal (I)

$$y' = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

y sea D tal que $(x_0,y_0) \in D$:

$$D = \{(x,y) \,/\, |x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b; a, b > 0\}$$

Es decir, que D es un rectángulo. Definimos los siguientes teoremas:

Teorema de existencia

Es suficiente que $f(x,y)$ sea continua en D para que **exista solución** al problema de Cauchy (I).

Teorema de existencia y unicidad

Si además de ser continua, f es Lipschitziana en D, o expresado en la otra forma $\exists f_y^{'}(x,y)$ continua en D, entonces **existe una única solución** al PVI (I).

Ejemplo:

Tenemos el PVI siguiente:

$$y^{'} = \frac{y}{x}$$

$$y(0) = 1$$

La función $f = \frac{y}{x}$ no es continua en $(0,1) \in D$, pero si la condición inicial fuese para $x_0 = 1$ sí que sería continua si hacemos $(0,1) \notin D$. ■

Demostración. Dado que la demostración completa de todo esto es muy complicada y larga, únicamente vamos a ver un esquema de la misma, de forma que veamos las elucubraciones de los matemáticos para demostrar cosas como estas.

A un señor llamado Piccard se le ocurrió construir una sucesión de soluciones $\{y_n(x)\}$ que cumpliese la ecuación diferencial

$$y^{'} = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

con lo que definió las **iteraciones de Piccard**:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\,dx \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\,dx \\ \vdots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx \end{cases}$$

donde se verifica que $\forall n, y_n(x_0) = y_0$

Dado que se cumple para todo n, entonces se cumple si la sucesión converge. Los pasos que hay que dar para demostrarlo son:

- Las soluciones deben estar dentro de D (gráficamente), así que hay que encontrar $|x - x_0| \leq a$ para que $|y_n(x) - y_0| \leq b$
- Convertir $\{y_n(x)\}$ uniformemente a $y(x)$ en D.
- Demostrar que las soluciones verifican el PVI (I).
- Demostrar que si existe solución esta es única.

□

Ejemplo:

Del problema 11.b)

$$y^{'} = 2t(y+1)$$

$$y(0) = 0$$

obtener las iteraciones de Piccard para este PVI.

Veamos las condiciones de existencia de soluciones:

$$y^{'} = f(t, y)$$

es un polinomio, por lo que f es continua en $\mathbb{R}^2$, lo que implica que existe solución. Para ver si es única:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2t$$

existe y es continua en $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, el PVI tiene única solución $y(t)$ que verifica el problema. Construimos la sucesión $\{y_n(t)\}$:

$$\begin{cases} y_0(t) = 0 \\ y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y_0)\, dt = 0 + \int_0^t 2t dt = t^2 \\ y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y_1)\, dt = 0 + \int_0^t 2t\left(t^2+1\right) dt = \frac{t^4}{2} + t^2 \\ \vdots \\ y_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{n!} \end{cases}$$

Todas verifican $y_n(0) = 0$ para todo n. Ahora veamos a qué converge la solución:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = e^{t^2} - 1$$

Comprobamos que esa es la solución del problema:

$$\left.\begin{array}{l} y^{'} = 2t\, e^{t^2} \\ y + 1 = e^{t^2} \end{array}\right\} y(t) = e^{t^2} - 1$$

■

1.3 Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Vamos a resolver ecuaciones de la forma

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

es decir, expresado como cociente de polinomios.

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

1.3.1 EDOs de Variables Separadas

En este tipo de ecuaciones, cada polinomio depende de una sola variable:

$$P(x, y) = P(x)$$

$$Q(x, y) = Q(y)$$

con lo que nos queda

$$P(x)\, dx + Q(y)\, dy = 0$$

Es suficiente que P y Q sean continuas para que exista solución. Dicha solución se obtiene integrando por cuadratura:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C \tag{1.1}$$

Es la **solución general** de la ecuación.

Ejemplo:

$$\cos x dx + y^6 dy = 0$$

Integrando obtenemos la siguiente solución general:

$$\operatorname{sen} x + \frac{y^7}{7} = c$$

■

Con esto, resulta que es muy interesante hacer que todas las EDOs que nos encontremos las podamos llevar a una de este tipo, y es lo que vamos a tratar de hacer en los posteriores tipos.

1.3.2 Reducibles a Variables Separadas

En este caso veremos EDOs que sin ser de variables separadas, pueden transformarse fácilmente en una de variables separadas. Hay dos casos:

Ecuaciones de la forma $f_1(x) \cdot g_1(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_2(y)\,dy = 0$

Basta que cada una de las funciones sean continuas para que la ecuación tenga solución.

Para reducirla a variables separadas, dividimos toda la ecuación por el factor $g_1(y) \cdot f_2(x)$, con lo que nos queda la siguiente ecuación de variables separadas:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Si ocurre que $g_1(y) \cdot f_2(x)$ se hace cero en algún punto, podemos perder soluciones particulares, así que tendremos que comprobar al obtener la solución general si están incluidas en ella.

Ejemplo:

Se tiene el siguiente PVI:

$$y' = 2t(y+1)$$

$$y(0) = 0$$

Reordenamos la ecuación y nos queda

$$dy = 2t(y+1)\,dt$$

Dividiendo por $(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = 2tdt$$

Si $y+1=0$, la función Q no es continua, aunque no hay problema con nuestra condición inicial. Integramos y obtenemos la solución general:

$$\ln(y+1) = t^2 + \ln c \Rightarrow y+1 = e^{t^2+\ln c}$$

$$y = c \cdot e^{t^2} - 1$$

Sin embargo, la solución $y + 1 = 0$ no la perdemos, si hacemos $c = 0$.

Ahora calculamos la **solución particular** con la información que tenemos de la condición inicial:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c \cdot e^0 - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$y = e^{t^2} - 1$$

■

Ecuaciones de la forma $y' = \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

Siendo a, b, c constantes reales, existe solución si f es continua. Para reducir la ecuación a variables separadas, únicamente hemos de realizar el cambio de variable siguiente:

$$z = z(x) = ax + by + c$$

Con lo que tendremos, si derivamos con respecto a x:

$$a + by' = z' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$$

Y la ecuación nos queda

$$\frac{z' - a}{b} = f(z)$$

y reordenando términos

$$\frac{dz}{b \cdot f(z) + a} = dx \tag{1.2}$$

que únicamente habremos de integrar para obtener la solución general.

Ejemplo:

Hallar la solución general de la ecuación:

$$y' = (y - x)^{1/3} + 1$$

Hacemos el cambio de variable $y - x = z$, $z' = y' - 1$ y nos queda

$$z' + 1 = z^{1/3} + 1 \Rightarrow z' = z^{1/3}$$

Reordenando:

$$\frac{dz}{z^{1/3}} = dx$$

Aquí podríamos perder la solución $z = 0$.

Integramos:

$$\frac{z^{2/3}}{2/3} = x + c$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^3$$

Deshacemos el cambio

$$(y-x)^2 = \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^3$$

La solución $z = 0$, o lo que es lo mismo, $y = x$ no está dentro de la solución general, así que no se trata de una solución particular (ya veremos de qué tipo es).

Esto lo podemos comprobar si vemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3(y-x)^{2/3}}$$

ya que en $y = x$ falla la condición suficiente para la unicidad de la solución, aunque no podíamos decir nada. ■

1.3.3 Ecuaciones homogéneas

Estas son ecuaciones que se pueden escribir de la forma

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Es decir, que la función $f(x, y)$ se puede poner como una función que depende únicamente de $\frac{y}{x}$, y haciendo el cambio $z = \frac{y}{x}$ se convierte en una de variables separadas.

$$y = xz$$
$$y' = z + xz'$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \tag{1.3}$$

En algunos libros esto se ve de otra forma. Si escribimos la ecuación como forma diferencial:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

se dice que la ecuación es **homogénea** si P y Q son homogéneas del mismo grado. Para resolverlas se hace el mismo cambio.

Por definición, se dice que una función $P(x, y)$ es **homogénea de grado** p si verifica:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p P(x,y)$$

Así que si en la forma diferencial P y Q son ambas homogéneas de grado p,

$$P(x,y) + Q(x,y)\tfrac{dy}{dx} = 0$$

$$y' = z + x\tfrac{dz}{dx}$$

Si hacemos $\lambda = \frac{1}{x}$, tenemos

$$P(1,z) = P\left(\tfrac{1}{x}x, \tfrac{1}{x}y\right) = \tfrac{1}{x^p}P(x,y)$$

$$Q(1,z) = Q\left(\tfrac{1}{x}x, \tfrac{1}{x}y\right) = \tfrac{1}{x^p}Q(x,y)$$

lo cual, llevado a la ecuación, nos resulta:

$$x^pP(1,z) + x^pQ(1,z)\left(z + x\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Eliminando x^p y despejando nos queda:

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1,z)}{P(1,z) + Q(1,z)\cdot z}dz = 0 \tag{1.4}$$

Ejemplo:

Problema 1.n) Hallar la solución general de

$$\left(4x^2 - xy + y^2\right) + y^{''}\left(x^2 - xy + 4y^2\right) = 0$$

Vemos que es homogénea:

$$P(\lambda x, \lambda y) = 4\lambda^2 x^2 - \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 P(x,y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda x \lambda y + 4\lambda^2 y^2 = \lambda^2 Q(x,y)$$

por lo que ambas son homogéneas de grado 2. Si despejamos $y^{'}$ sale más corto:

$$y^{'} = \frac{-4x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + 4y^2} = \frac{-4 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \frac{y}{x} + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Hacemos el cambio, $y = xz$ y $y^{'} = z + xz^{'}$:

$$z + xz^{'} = \frac{-4 + z - z^2}{1 - z + 4z^2}$$

$$xz^{'} = \frac{-4 + z - z^2 - z + z^2 - 4z^3}{1 - z + 4z^2} = -\frac{4 + 4z^3}{1 - z + 4z^2}$$

$$\frac{1 - z + 4z^2}{1 + z^3}dz = -4\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\int \frac{1 - z + 4z^2}{1 + z^3}dz = -4\ln x + c$$

Descomponemos el integrando en dos:

$$\int \frac{1 - z + z^2}{1 + z^3}dz + \int \frac{3z^2}{1 + z^3}dz = -4\ln x + c$$

Y usando que $1 + z^3 = (1+z)\left(z^2 - z + 1\right)$ la primera integral se simplifica:

$$\int \frac{dz}{1+z}dz + \int \frac{3z^2}{1+z^3}dz = \ln(z+1) + \ln\left(1 + z^3\right) = \ln\frac{c}{x^4}$$

Usando las propiedades de los logaritmos primero y luego eliminándolos nos queda:

$$(z+1)\left(1 + z^3\right) = \frac{c}{x^4}$$

y deshaciendo el cambio:

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) = \frac{c}{x^4}$$

■

1.3.4 Reducibles a homogéneas

Ahora tenemos que hacer dos cambios para resolver las ecuaciones, un primero para llevarla a homogénea y otro para hacerla de variables separadas. Nos encontraremos con ecuaciones de la forma

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a^{'}x + b^{'}y + c^{'}}\right)$$

Con f continua y $a, b, c, a^{'}, b^{'}, c^{'}$ constantes reales.

Tenemos varios casos, los vemos a continuación.

1- $c = c' = 0$

La ecuación ya es homogénea:

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a'+b'\frac{y}{x}}\right)$$

2- $c \neq 0$, $c' \neq 0$

Tenemos 3 casos en función de la solución del sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

i) Son rectas coincidentes: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

$$y' = f(k) = f\left(\frac{k\left(a'x+b'y+c'\right)}{a'x+b'y+c'}\right)$$

La solución general tiene la forma

$$y = \int f(k)\,dx + c = f(k)\cdot x + c \tag{1.5}$$

ii) Las rectas se cortan en (h,k)
Se hace el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= X+h \\ y &= Y+k \end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación homogénea:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a(X+h)+b(Y+k)+c}{a'(X+h)+b'(Y+k)+c'}\right) = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$$

ya que $ah+bk+c=0$ y $a'h+b'k+c'=0$. Hacemos pues el cambio $z(X) = \frac{Y}{X}$ y tenemos la ecuación de variables separadas.

iii) Las rectas son paralelas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

o lo que es lo mismo, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$. Se obtiene la ecuación

$$y' = f\left(\frac{k\left(a'x+b'y\right)+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

con el cambio $z = a'x+b'y$, al derivar se obtiene:

$$a'+b'y' = z' \to \frac{1}{b'}\left(z'-a'\right) = f\left(\frac{kz+c}{z+c'}\right) = g(z)$$

$$z' = a'+b'g(z) \Rightarrow \frac{dz}{a'+b'g(z)} = dx \tag{1.6}$$

la solución general la obtenemos integrando por cuadratura.

Ejemplo: Del problema 1.m)

$$(3x + y - 2) + y' (x - 1) = 0$$

$$y' = \frac{3x + y - 2}{-x + 1}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 2 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} x = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

se cortan en el punto $(1, -1)$, y hacemos el cambio

$$\begin{array}{l} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{array}$$

la ecuación diferencial homogénea que nos queda es

$$y' = \frac{dY}{dX} = \frac{3(X+1) + Y - 1 - 2}{-(X+1) + 1} = \frac{3X + Y}{-X} = -3 - \frac{Y}{X}$$

hacemos el cambio $z(X) = \frac{Y}{X}$:

$$Y' = z(X) + X\frac{dz}{dX} = -3 - z$$

$$X\frac{dz}{dX} = -3 - 2z \rightarrow \frac{dz}{3 + 2z} = -\frac{dX}{X}$$

Integramos la ecuación y nos queda

$$\frac{1}{2}\ln(3 + 2z) = -\ln X + \ln c$$

deshacemos el último cambio

$$\sqrt{3 + 2z} = \frac{c}{X} \Rightarrow \sqrt{3 + 2\frac{Y}{X}} = \frac{c}{X}$$

y deshaciendo el anterior cambio

$$\sqrt{3 + 2\frac{y+1}{x-1}} = \frac{c}{x-1}$$

tenemos la solución general. ■

Ejemplo: Del problema 1.o), tenemos el siguiente PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} (x - y + 3)\, dx + (-2y + 2x - 1)\, dy = 0 \\ y(1) = 3 \end{array}\right.$$

En primer lugar, calculamos la solución general.

$$y' = \frac{x - y + 3}{2y - 2x + 1}$$

Determinamos el caso en el que estamos:

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{array}\right| = 2 - 2 = 0$$

así que son rectas paralelas. Hacemos el cambio $x - y = z$, la derivada es $1 - y' = z'$ y la ecuación nos queda

$$1 - z' = \frac{z + 3}{-2z + 1}$$

$$\frac{1 - 2z - z - 3}{1 - 2z} = z' = \frac{-2 - 3z}{1 - 2z}$$

$$\frac{1 - 2z}{2 + 3z}dz = -dx$$

Para conseguir la solución general, integramos y para la particular sustituimos $x = 1$ e $y = 3$ y despejamos el valor de la constante arbitraria. ■

1.3.5 Ecuaciones diferenciales exactas

Se dice que la forma diferencial

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y) = 0$$

es una **forma diferencial exacta** (FDE) si

$$\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$$

es **campo gradiente**, es decir, que existe $U : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable (Función Potencial), tal que

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dU(x,y)$$

En nuestro caso, $dU(x,y) = 0$ por lo que $U(x,y) = c$ será nuestra solución general.

La condición necesaria y suficiente para que $\vec{F}$ sea campo gradiente es

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo:

Del problema 1.m)

$$(3x + y - 2)\,dx + (x - 1)\,dy = 0$$

comprobamos las condiciones

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

y dado que se verifican, es una FDE. ■

Cálculo de la función potencial

Tenemos 2 formas de calcularla:

➢ Forma 1: Tenemos las componentes

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

De la primera podemos escribir

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + g(y)$$

y con la segunda

$$Q = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + g'(y)$$

despejamos $g'(y)$ y la integramos:

$$g(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right)\right) dy$$

con lo que la función potencial nos queda

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right)\right) dy$$

Se puede resolver tomando la primera ecuación y luego la segunda, con lo que se obtiene algo similar.

➢ Forma 2: integramos por cuadratura con un camino cualquiera ya que la integral no depende del camino al tratarse de una FDE.

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Si tomamos por ejemplo caminos paralelos a los ejes coordenados:

$$U(x,y) = U(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

El punto (x_0,y_0) es arbitrario, pero cuidado con coger un punto de discontinuidad de las funciones.

Ejemplo:

Del problema 1.m)

$$(3x+y-2)\,dx + (x-1)\,dy = 0$$

$$\begin{aligned} P &= 3x+y-2 \\ Q &= x-1 \end{aligned}$$

Ya comprobamos en el anterior ejemplo que se trata de una FDE.

$$dU(x,y) = (3x+y-2)\,dx + (x-1)\,dy \rightarrow U(x,y) = c$$

Resolviendo por la forma 1:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \rightarrow U(x,y) = \int (3x+y-2)\,dx + g(y) = \frac{3x^2}{2} + yx - 2x + g(y)$$

derivando la expresión nos queda

$$x - 1 = x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -1$$

e integrando $g'(y)$

$$g(y) = -y + k$$

La función potencial queda

$$U(x,y) = \frac{3x^2}{2} + yx - 2x - y + k$$

Y la solución general la podemos expresar como

$$\frac{3x^2}{2} + yx - 2x - y = c$$

Ahora la resolvemos por la forma 2:

P y Q son polinomios, por lo que podemos escoger el camino que parte del origen:

$$U(x,y) - U(0,0) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x+y-2)\,dx + (x-1)\,dy = \int_0^x (3x+0-2)\,dx + \int_0^y (x-1)\,dy = \frac{3x^2}{2} - 2x + xy - y$$

Y si hacemos $U(0,0) = k$, tenemos la solución general de antes

$$\frac{3x^2}{2} - 2x + yx - y = c$$

Otra forma más rápida pero que ha de ser más intuitiva puede ser el separar las variables e integrar de golpe:

$$3xdx - 2dx - dy + \underbrace{ydx + xdy}_{d(x\cdot y)} = 0$$

se obtiene

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - y + xy = c$$

■

1.3.6 Método del factor integrante

A veces, las ecuaciones diferenciales no son de ningún tipo estudiado anteriormente y no es forma diferencial exacta en los términos hablados, pero existe un factor $\mu(x,y)$ llamado **factor integrante** de forma que al multiplicar la ecuación diferencial por él, se convierte en forma diferencial exacta.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

no es forma diferencial exacta, pero

$$\exists\mu(x,y)\,/\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0 \text{ es FDE}$$

Para calcular ese factor integrante, imponemos la condición de FDE:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)\,P(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)\,Q(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P + \mu P_y^{'} = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q + \mu Q_x^{'}$$

reorganizando términos,

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P - \frac{\partial\mu}{\partial x}Q = \mu\left(Q_x^{'} - P_y^{'}\right)$$

Esto es una ecuación en derivadas parciales, que es más difícil de resolver que el problema original, y además todavía no sabemos resolverla. Por esta razón, vamos a hallar factores integrantes en función de expresiones concretas.

$\mu = \mu(x)$

En este tipo, $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, con lo que nos queda

$$\frac{d\mu(x)}{dx}Q = \mu\left(P_y^{'} - Q_x^{'}\right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}dx$$

Integrando, si $\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}$ es función únicamente de x,

$$\ln\mu(x) = \int\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}dx + \ln c \tag{1.7}$$

Si $\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}$ no es función únicamente de x, no existe factor integrante dependiente sólo de x para la ecuación diferencial. Si despejamos $\mu(x)$,

$$\mu(x) = c\cdot e^{\int\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}dx} \tag{1.8}$$

Normalmente supondremos $c = 1$, ya que no va a influir en la ecuación diferencial al multiplicar ambos términos.

$\mu = \mu(y)$

Ahora sólo depende de la variable y y la ecuación queda

$$\frac{d\mu(y)}{dy}P = \mu\left(Q_x^{'} - P_y^{'}\right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q_x^{'} - P_y^{'}}{P}dy = f(y)\,dy$$

Operando de la misma forma que antes:

$$\mu(y) = c\cdot e^{\int\frac{Q_x^{'} - P_y^{'}}{P}dy} \tag{1.9}$$

$\mu = \mu\left(\frac{y}{x}\right), \mu\left(x^2 - y^2\right), \mu\left(x \cdot y\right) \ldots$

En este caso hacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}, x^2 - y^2, x \cdot y \ldots$

Y calculamos el factor integrante $\mu = \mu\left(z\right)$

$$\mu \rightarrow z \begin{array}{l} \nearrow \quad x \\ \searrow \quad y \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}P - \frac{d\mu}{dz}z_x^{'}Q = \mu\left(Q_x^{'} - P_y^{'}\right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q_x^{'} - P_y^{'}}{z_y^{'}P - z_x^{'}Q}dz \rightarrow \frac{Q_x^{'} - P_y^{'}}{z_y^{'}P - z_x^{'}Q} = f\left(z\right) \text{ para que exista el factor integrante}$$

Integrando nos queda

$$\mu\left(z\right) = e^{\int \frac{Q_x^{'} - P_y^{'}}{z_y^{'}P - z_x^{'}Q}dz} \tag{1.10}$$

Ejemplo:

Del problema 1.k)

$$\begin{array}{l} \left(5x^2 - 4xy - y\right)dx + \left(3y - x^2 - 2x\right)dy = 0 \\ \mu = \mu\left(x^2 - y^2\right) \end{array}$$

Calculamos sólo el factor integrante:

$$\begin{aligned} \mu\left(z\right) = e^{-\int \frac{-2x-2+4x-1}{P+2xQ}dz} &= e^{-\int \frac{2x-1}{5x^2-4xy-y+2x\left(3y-x^2-2x\right)}dz} \\ &= e^{-\int \frac{2x-1}{-2x^3+x^2+2xy-y}dz} \\ &= e^{\int \frac{2x-1}{(2x-1)\left(x^2-y\right)}dz} \\ &= e^{\int \frac{dz}{z}} = e^{\ln z} = z = x^2 - y \end{aligned}$$

$\blacksquare$

1.3.7 Ecuaciones Diferenciales Lineales

Son lineales con respecto a la incógnita y y con respecto a su derivada:

$$y^{'} + p\left(x\right)y = q\left(x\right) \tag{1.11}$$

Donde p y q son continuas en un dominio D. Tenemos varios métodos de resolución de ecuaciones lineales.

Primer método: Método del factor integrante

$$P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = 0 \rightarrow \left(p\left(x\right)y - q\left(x\right)\right)dx + dy = 0$$

De por sí no es FDE, pero siempre podremos encontrar un factor integrante dependiente únicamente de la variable independiente:

$$\mu = \mu\left(x\right) = e^{\int \frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q}dx} = e^{\int \frac{p(x)-0}{1}dx} = e^{\int p(x)dx}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el factor integrante:

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}\left(y' + p(x)\,y\right)}_{\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{\int p(x)dx}\right)} = \underbrace{q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}}_{f(x)}$$

Integrando con respecto a x:

$$y\cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + c$$

y la solución general de la ecuación diferencial lineal es

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx\right) \tag{1.12}$$

Ejemplo:

Del problema 1.g)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$$

$$ydx - \left(x+y^3\right)dy = 0$$

No es FDE, lineal, homogénea, ...

Si le damos la vuelta a la ecuación nos queda

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} \to \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^2$$

Ya que ahora la incógnita es $x = x(y)$, es lineal en x:

$$x' + p(y)\,x = q(y) \to \begin{cases} p(y) = -\frac{1}{y} \\ q(y) = y^2 \end{cases}$$

y el factor integrante $\mu = \mu(y)$ nos queda

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}$$

trasladado a la ecuación:

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x\right) = \frac{d}{dy}\left(x\frac{1}{y}\right) = y$$

e integrando

$$x(y)\,\frac{1}{y} = \int ydy + k = \frac{y^2}{2} + k \Rightarrow x(y) = \frac{y^3}{2} + ky$$

■

Segundo método: Método de variación de constante

Teniendo una solución y_0 de la ecuación homogénea $y' + p(x)\,y = 0$ y una particular y_p de la completa $y' + p(x)\,y = q(x)$,

$$y = y_0 + y_p$$

Esto se puede verificar fácilmente:

$$\left.\begin{array}{r} y_0^{'}+p(x)\,y_0=0 \\ y_p^{'}+p(x)\,y_p=q(x) \end{array}\right\}(y_0+y_p)^{'}+p(x)(y_0+y_p)=q(x)\rightarrow\underbrace{y_0^{'}+p(x)\,y_0}_{0}+y_p^{'}+p(x)\,y_p$$

Para hallar y_0, hay que resolver

$$y^{'}+p(x)\,y=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=-p(x)\,y$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\,dx$$

Integrando

$$\ln y=-\int p(x)\,dx+\ln c\Rightarrow\ln\frac{y}{c}=-\int p(x)\,dx$$

$$y_0=c\cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{1.13}$$

Y para hallar y_p, teniendo la ecuación completa

$$y^{'}+p(x)\,y=q(x)$$

la buscamos con el método de variación de constante: la c no es ahora una constante, sino que depende de la variable independiente. Por tanto, ensayamos soluciones de la forma

$$y_p=c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

(es decir, la sustituimos en la Ecuación Diferencial):

$$\underbrace{c^{'}(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}+c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))}_{y_p^{'}}+p(x)\cdot\underbrace{c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}}_{y_p}=q(x)$$

Operando queda

$$c^{'}(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=q(x)\rightarrow c(x)=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx$$

Por tanto, la **solución general** de la ecuación lineal es

$$\begin{aligned} y=y_0+y_p &= c\cdot e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx \\ &= e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx\right) \end{aligned}$$

que es exactamente la misma que obtuvimos en el método anterior.

La constante que se obtiene al hallar $c(x)$ se agrupa con la de y_0, por lo que no es necesario explicitarla al integrar para obtener $c(x)$.

Ejemplo:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y^2$$

Ecuación lineal en x. La solución general será de la forma $x=x_0+x_p$. Hallamos primero la solución homogénea x_0:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}\rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln x=\ln y+\ln c$$

$$x_0 = c \cdot y$$

Ahora hallamos la solución particular x_p:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2 \rightarrow x_p = c(y) \cdot y$$

$$c'(y) \cdot y + c(y) = \frac{1}{y} c(y) \cdot y + y^2$$

$$c'(y) = \frac{y^2}{y} = y \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2}$$

Por lo que la solución general es

$$x = x_0 + x_p = c \cdot y + \frac{y^3}{2}$$

■

1.3.8 Ecuación Diferencial Ordinaria de Bernouilli

Esta ecuación tiene la siguiente forma

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

donde $n \neq 0$ (sería lineal) y $n \neq 1$ (sería lineal homogénea). Tanto $p(x)$ como $q(x)$ son continuas en un dominio D. n es cualquier valor entero.

Para resolverla, empezamos dividiendo por y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x)$$

hacemos el cambio de variable $y^{1-n} = z(x)$ con lo que

$$(1-n) y^{1-n-1} \cdot y' = \frac{dz}{dx} \rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{1}{1-n} z'$$

y llevado a la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x) \cdot z = q(x)$$

nos queda la siguiente ecuación lineal en z

$$z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot q(x) \tag{1.14}$$

que podremos resolver de alguna de las formas indicadas anteriormente.

Ejemplo:

Del problema 1.s)

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \cdot y^8$$

dividimos por y^8:

$$\frac{y'}{y^8} - \frac{1}{xy^7} = x^2$$

el cambio es $z = y^{-7}$ y $\frac{dz}{dx} = -7y^{-8}\frac{dy}{dx}$, con lo que nos queda

$$-\frac{z'}{7} - \frac{z}{x} = x^2 \rightarrow z' + \frac{7z}{x} = -7x^2$$

Resolvemos la ecuación lineal por el método del factor integrante:

$$\mu = \mu(x) = e^{\int \frac{7}{x}dx} = x^7$$

$$\underbrace{z'x^7 + 7zx^6}_{\frac{d}{dx}(z \cdot x^7)} = -7x^9$$

Por tanto

$$z \cdot x^7 = -7\int x^9 dx = -\frac{7}{10}x^{10} + c \Rightarrow z = -\frac{7}{10}x^3 + c \cdot x^{-7}$$

y la solución general de la ecuación inicial es

$$y^{-7} = -\frac{7}{10}x^3 + c \cdot x^{-7}$$

■

1.3.9 Ecuación Diferencial de Riccati

Esta ecuación tiene la forma

$$y' + p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 = q(x)$$

Según la forma de p, q y r, tienen distintas formas de resolverse. Si se conoce una solución particular y_p,

$$y_p' + p(x) \cdot y_p + r(x) \cdot y_p^2 = q(x)$$

y se hace el cambio

$$y = z(x) + y_p$$

con lo que se convierte en una ecuación de Bernouilli. Veamoslo:

$$\begin{gathered}\left(z' + y_p'\right) + p(x)(z + y_p) + r(x)\left(z^2 + y_p^2 + 2zy_p\right) = q(x) \\ \downarrow \\ z' + p(x) \cdot z + 2r(x) \cdot y_p \cdot z = -z^2 \cdot r(x) \\ \downarrow \\ z' + (p(x) + 2r(x) \cdot y_p) \cdot z = -z^2 \cdot r(x)\end{gathered}$$

Para resolverla nos remitimos al apartado anterior.

Ejemplo:

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

es una ecuación de Riccati. Podemos ver “a simple vista” una y_p:

$$y_p' + y_p^2 + \frac{1}{x}y_p = \frac{1}{x^2}$$

buscando una de la forma x^n, así que sustituimos $y_p = x^n$ en la ecuación diferencial:

$$\begin{gathered}nx^{n-1} + x^{2n} + x^{n-1} = x^{-2} \\ (n+1)x^{n-1} + x^{2n} = x^{-2}\end{gathered}$$

Vemos que $n=-1$ la verifica, con lo que tenemos $y_p=\frac{1}{x}$. El cambio será $y=\frac{1}{x}+z$:

$$-\frac{1}{x^2}+z^{'}+\frac{1}{x^2}+z^2+\frac{2}{x}z+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+z\right)=\frac{1}{x^2}\to z^{'}+\frac{3}{x}z=-z^2\to\frac{z^{'}}{z^2}+\frac{3}{xz}=-1$$

con el cambio $h=z^{-1}$, $(-1)\,z^{-2}\cdot z^{'}=h^{'}(x)$ y la solución general es

$$-h^{'}+\frac{3}{x}h=-1$$

sin más que deshacer los cambios de variables pertinentes. ■

1.4 Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada

Ahora vamos a ver ecuaciones diferenciales en las que $y^{'}$ no se pueda despejar. En este caso, el teorema de existencia y unicidad cambia. La forma de estas ecuaciones es la implícita:

$$F\left(x,y,y^{'}\right)=0$$

El caso más simple que podemos tener es un polinomio de $y^{'}$:

$$\left(y^{'}\right)^n+P_1(x,y)\left(y^{'}\right)^{n-1}+P_2(x,y)\left(y^{'}\right)^{n-2}+\ldots+P_{n-1}(x,y)\,y^{'}+P_n(x,y)=0$$

Este polinomio, en caso de que se pueda resolver, tendrá n soluciones.

$$\begin{cases} y^{'}=f_1(x,y)\to\phi_1(x,y,c)=0\\ y^{'}=f_2(x,y)\to\phi_2(x,y,c)=0\\ y^{'}=f_3(x,y)\to\phi_3(x,y,c)=0\\ \vdots\\ y^{'}=f_n(x,y)\to\phi_n(x,y,c)=0\end{cases}$$

Hay varios tipos de estas ecuaciones, que vamos a ver a continuación.

1.4.1 $F\left(y,y^{'}\right)=0$

Hay tres casos según se pueda despejar una u otra variable (o ninguna):

i) Se puede despejar $y^{'}$: $y^{'}=g(y)$. Es el caso trivial, realmente sí está resuelta con respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=g(y)\to\int\frac{dy}{g(y)}=x+c$$

ii) Podemos despejar y: $y=h\left(y^{'}\right)$. Se hace el cambio $y^{'}=p$, con lo que $y=h(p)$ y derivando con respecto a x queda

$$dy=h^{'}(p)\,dp\to p\cdot dx=h^{'}(p)\,dp\to\frac{h^{'}(p)}{p}dp=dx$$

La solución en forma paramétrica es

$$\begin{aligned} x&=\int\frac{h^{'}(p)}{p}dp+c\\ y&=h(p)\end{aligned}\qquad(1.15)$$

iii) No se pueden despejar y ni y' o se despejan con dificultad. En este caso hacemos

$$\left.\begin{array}{l} y' = p = h(t) \\ y = g(t) \end{array}\right/ F(g(t), h(t)) = 0$$

Si derivamos $y = g(t)$ con respecto a x nos queda $dy = g'(t)\,dt$, por lo que $dy = h(t)\,dx = g'(t)\,dt$. Por tanto,

$$dx = \frac{g'(t)}{h(t)}dt$$

y la solución en paramétricas es

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{g'(t)}{h(t)}dt + c \\ y &= g(t) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ejemplo:

Del problema 12.j)

$$y^{2/3} + \left(y'\right)^{2/3} = 1$$

En este caso, podemos despejar y' y nos queda la expresión

$$y' = \left(1 - y^{2/3}\right)^{3/2}$$

Sin embargo, la integral

$$dx = \frac{dy}{\left(1 - y^{2/3}\right)^{3/2}}$$

es bastante complicada de hacer, por lo que usamos el caso 3 que vimos antes. La ecuación $y^{2/3} + x^{2/3} = 1$ corresponde a una astroide, fácilmente parametrizable:

$$\left.\begin{array}{l} y' = p = \operatorname{sen}^3 t \\ y = \cos^3 t \end{array}\right/ \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$dy = -3\operatorname{sen} t \cos^2 t dt = \operatorname{sen}^3 t dx \Rightarrow dx = -3\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt$$

por lo que su solución en paramétricas es

$$\begin{aligned} x &= -3\int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt + c \\ y &= \cos^3 t \end{aligned}$$

■

1.4.2 $F\left(x, y'\right) = 0$

i) El caso trivial, $y' = f(x) \rightarrow y = \int f(x)\,dx + c$

ii) Si se puede despejar x, $x = g\left(y'\right)$, hacemos el cambio $y' = p$, con lo que $x = g(p)$ y derivando con respecto a x:

$$dx = g'(p)\,dp = \frac{dy}{p} \rightarrow dy = pg'(p)\,dp$$

con lo que su solución general en paramétricas es

$$\begin{aligned} y &= \int pg'(p)\,dp + c \\ x &= g(p) \end{aligned} \tag{1.17}$$

iii) Si no se pueden despejar x ni $y^{'}$, tenemos el tercer caso del tipo anterior, con lo que volvemos a parametrizar:

$$\left.\begin{array}{l} x = h(t) \\ y^{'} = g(t) \end{array}\right/ F\left(h(t), g(t)\right) = 0$$

y hacemos lo mismo que en el caso anterior.

1.4.3 $F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$

Si $\left\{\begin{array}{l} x = f\left(y, y^{'}\right) \\ \\ y = g\left(x, y^{'}\right) \end{array}\right\}$ hacemos el cambio $y^{'} = p$

1.4.4 Ecuación de Lagrange

Esta ecuación es de la forma

$$y = xg\left(y^{'}\right) + \Psi\left(y^{'}\right) \tag{1.18}$$

Se hace el cambio $y^{'} = p$, con lo que la ecuación queda

$$y = xg(p) + \Psi(p)$$

y si derivamos con respecto a x,

$$y^{'} = g(p) + xg^{'}(p)\frac{dp}{dx} + \Psi^{'}(p)\frac{dp}{dx} = p$$

Si agrupamos términos tenemos la expresión

$$p - g(p) = \left(xg^{'}(p) + \Psi^{'}(p)\right)\frac{dp}{dx}$$

y dividiendo por $\frac{dp}{dx}$

$$(p - g(p))\frac{dx}{dp} = xg^{'}(p) + \Psi^{'}(p)$$

se obtiene una **ecuación lineal en *x***:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{g^{'}(p)}{p - g(p)} = \frac{\Psi^{'}(p)}{p - g(p)} \tag{1.19}$$

Cuya solución general es

$$\left\{\begin{array}{l} x = \phi(p, c) \\ y = xg(p) + \Psi(p) \end{array}\right. \tag{1.20}$$

Si tuviéramos $\frac{dp}{dx} = 0$, podríamos perder soluciones del tipo $p - g(p) = 0$ que verifican la ecuación diferencial.

1.4.5 Ecuación de Clairaut

Es un caso particular de la ecuación de Lagrange en el que $g(p) = p$ ($y^{'} = g\left(y^{'}\right)$):

$$y = xy^{'} + \Psi\left(y^{'}\right) \tag{1.21}$$

Hacemos como siempre el cambio $y^{'} = p$ y tenemos

$$y = xp + \Psi(p)$$

y volvemos a derivar con respecto a x para obtener

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \Psi^{'}(p)\frac{dp}{dx}$$

que reagrupando términos se convierte en

$$\left(x + \Psi^{'}(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} p = c \\ y = x \cdot c + \Psi(c) \end{bmatrix} (1) \\ \\ \rightarrow \begin{bmatrix} x + \Psi^{'}(p) = 0 \\ y = x \cdot p + \Psi(p) \end{bmatrix} (2) \end{cases}$$

En esta solución hay dos términos:

1. Solución general: es una familia de rectas
2. Solución singular: no está incluida en la general, sino que es su envolvente

   Sólo en la ecuación de Clairaut la solución singular coincide con la envolvente de la solución general.

➢ Definición. ***Envolvente:*** dada una familia de curvas $\phi(x, y, c) = 0$, la envolvente a esta familia de curvas se determina resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \phi(x, y, c) = 0 \\ \\ \frac{\partial \phi(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

que se conoce como **curva c-discriminante**. Eliminando c del sistema se obtiene

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1.22}$$

Estas funciones a veces, aparte de envolventes, determinan lugares geométricos de puntos múltiples.

➢ Si $\frac{\partial \phi(x,y,c)}{\partial x}$ y $\frac{\partial \phi(x,y,c)}{\partial y}$ no son simultáneamente nulas y ambas están acotadas $\forall (x, y) / \varphi(x, y) = 0$, entonces $\varphi(x, y) = 0$ determina la envolvente, no soluciones múltiples (condición necesaria, no suficiente).

Ejemplo:

Tenemos la ecuación de Clairaut:

$$y - xc - \Psi(c) = \phi(x, y, c)$$

Al hacer las derivadas parciales obtenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -c$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$$

■

Ejemplo:

$$y = xy^{'} - \left(y^{'}\right)^2$$

Sin necesidad de hacer nada, tenemos la solución general:

$$y = xc - c^2$$

y la familia de curvas es

$$\phi(x, y, c) = y - xc + c^2 = 0$$

Si vemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -c$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 \neq 0$$

Ambas están acotadas, por lo que podemos determinar la envolvente:

$$y = xc - c^2 \rightarrow 0 = x - 2c$$

y despejando de la segunda $c = \frac{x}{2}$:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

es nuestra envolvente.

Resolviendo la ecuación haciendo el cambio $y' = p$

$$y = xp - p^2 \rightarrow y' = p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

Se obtienen 2 soluciones:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = c \\ y = xc - c^2 \end{array} \right.$$

que es la solución general, y

$$\begin{array}{l} x - 2p = 0 \\ y = xp - p^2 \end{array}$$

Eliminamos p: $p = \frac{x}{2}$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Es solución porque verifica la ecuación diferencial, pero no es particular porque no está incluida en la solución general. ■

1.4.6 Teorema de Existencia y Unicidad

Recordando el teorema de Existencia y Unicidad que vimos anteriormente:

$$\mathrm{I}\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \qquad D = \{(x, y) \,/\, |x - x_0| \leq a;\ |y - y_0| \leq b;\ a, b \geq 0\}$$

a) Si f es continua en D, (I) tiene solución.

b) Si, además, $\exists f_y'(x, y)$ continua en D, entonces existe una única solución de (I).

Ambas son condiciones suficientes.

Para ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada tomamos el problema de Cauchy (II):

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l} F\left(x, y, y^{'}\right)=0 \\ y\left(x_0\right)=y_0 \end{array}\right.$$

Existe una única solución $y = y(x)$ para $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, con h suficientemente pequeño, de (II) si en un entorno $N\left(x_0, y_0, y_0^{'}\right)$ cerrado donde $y_0^{'} = y^{'}(x_0)$ y $F\left(x_0, y_0, y_0^{'}\right) = 0$, se verifican las siguientes condiciones:

a) F es continua con respecto a todos sus argumentos.

b) Existe $\frac{\partial F}{\partial y'}$ y es distinto de cero.

c) Existe $\frac{\partial F}{\partial y}$ y está acotada.

Son también condiciones suficientes.

Una pequeña observación al respecto: Si F es continua y existe $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existe una función g continua tal que $y^{'} = g(x, y)$. Al verificarse c)

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

El cociente está acotado, por tanto, como existe $g_y^{'}$ y está acotada, por el teorema de Existencia y Unicidad para (I), existe solución única.

1.5 Soluciones singulares

Primero definimos el conjunto singular. Por definición, el **conjunto singular** va a ser el conjunto de puntos (x, y) donde se viola la unicidad de la solución:

$$C_S = \{(x, y)\ /\text{se viola alguna de las condiciones del TEU}\}$$

Por cada punto en que se viola, tenemos diferentes soluciones que pasan por un mismo punto y con diferente pendiente.

Para (II), en problemas prácticos, normalmente se verifican a) y c), ya que casi siempre trabajaremos con polinomios. Así, las posibles soluciones singulares se hallan de la violación de la hipótesis b):

$$\left\{\begin{array}{l} F\left(x, y, y^{'}\right)=0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y, y^{'}\right)=0 \end{array}\right.$$

se obtiene la curva p-discriminante

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, y, p)=0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p)=0 \end{array}\right.$$

y eliminando p se obtiene una curva de la siguiente forma, con varias ramas posibles:

$$\varphi(x, y) = 0$$

y se comprueba que verifican la ecuación diferencial (si no la verifican, no son soluciones singulares, obviamente).

Que la verifiquen no significa que sean soluciones singulares, ya que las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad son suficientes. Por tanto, tendremos que ver si violan o no la unicidad, esto es, si están dentro de la solución general, en cuyo caso no violan la unicidad.

Ejemplo:

$$y = 2xy' - \left(y'\right)^2$$

$$y - 2xy' + \left(y'\right)^2 = F\left(x, y, y'\right) = 0$$

Busquemos las soluciones singulares:

En primer lugar, tenemos la curva p-discriminante,

$$\left\{ \begin{array}{l} y - 2xp + p^2 = 0 \\ -2x + 2p = 0 \to p = x \end{array} \right.$$

Y la rama es

$$y = 2x^2 - x^2 = x^2$$

por lo que las posibles soluciones singulares están en $y = x^2$.

Comprobamos si es solución de la ecuación diferencial,

$$x^2 = 2x \cdot 2x - (2x)^2 = 0$$

por lo que no es solución, luego no puede ser solución singular. ■

Ejemplo:

Del problema 12.m)

$$y - x = \frac{4}{9}\left(y'\right)^2 - \frac{8}{27}\left(y'\right)^3$$

Hallar las soluciones singulares:

Obtenemos la curva p-discriminante

$$\left\{ \begin{array}{l} y - x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0 \\ -\frac{8}{9}p + \frac{24}{27}p^2 = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} p = 1 \\ p = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Para $p = 0$ obtenemos $y = x$ que es nuestra rama 1, y para $p = 1$ tenemos

$$y - x = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow y = x + \frac{4}{27}$$

que es la rama 2.

Comprobamos si verifican la ecuación diferencial:

$$y = x \to 0 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27} \neq 0$$

no la verifica, mientras que

$$y = x + \frac{4}{27} \to \frac{4}{27} = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

sí que la verifica. Por tanto,

$$y = x + \frac{4}{27}$$

es una posible solución singular. Nos queda verificar si se viola la unicidad de la solución. Para ello, hallemos la solución general.

$$y - x = \frac{4}{9}\left(y'\right)^2 - \frac{8}{28}\left(y'\right)^3$$

hacemos el cambio $y^{'} = p$

$$y - x = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3$$

derivando

$$p - 1 = \left(2\frac{4}{9}p - \frac{8}{27}3p^2\right)\frac{dp}{dx} = \frac{8}{9}p\left(1 - p\right)\frac{dp}{dx}$$

Si dividimos por $p - 1$ (perdemos la solución $p = 1$, y con ella la posible solución singular, pero si no fuese $p - 1$ no se violaría la unicidad de la solución y no sería solución singular)

$$dx = -\frac{8}{9}pdp \to x + c = -\frac{8}{9}\frac{p^2}{2} = -\frac{4}{9}p^2$$

con lo que la solución general en paramétricas es

$$\begin{cases} x + c = -\frac{4}{9}p^2 \\ y - x = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3 \end{cases}$$

Eliminando p

$$\frac{4}{9}p^2 = -c - x \Rightarrow p^2 = -\frac{9}{4}\left(c + x\right)$$

$$y - x = \frac{4}{9}\left(-\frac{9}{4}\left(c + x\right)\right) - \frac{8}{27}\left(-\frac{9}{4}\left(c + x\right)\right)^{3/2}$$

$$y - c = \left(c + x\right)^{3/2}$$

es la solución general. Como no se puede obtener ninguna recta a partir de ella, la solución

$$y = x + \frac{4}{27}$$

es una solución singular. ■

1.6 Aplicaciones

Como aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden vamos a ver únicamente las trayectorias.

1.6.1 Trayectorias isogonales y ortogonales en coordenadas cartesianas

- Dada una familia de curvas $\phi\left(x, y, c\right) = 0$, se llama **trayectoria** a otra familia de curvas que corta a la otra familia con el mismo ángulo.

Se llaman **trayectorias isogonales**, que las cortan con un ángulo ω. Podemos ver en la figura 1.1 las trayectorias isogonales a una recta que forman un ángulo ω con la misma.

Por otro lado, en la figura 1.2 vemos una trayectoria isogonal con ángulo ω a una curva genérica de $\phi\left(x, y, c\right) = 0$ donde:

- $\operatorname{tg}\alpha = y^{'}$ es la pendiente a la curva genérica,
- $\operatorname{tg}\beta = Y^{'}$ es la pendiente a una curva de la trayectoria isogonal y
- $\beta = \omega + \alpha$.

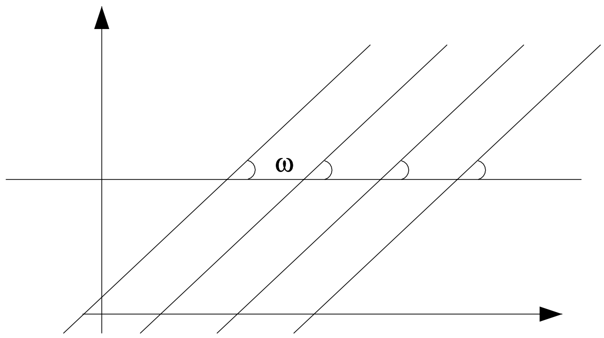

Figura 1.1: Trayectorias isogonales a una recta horizontal

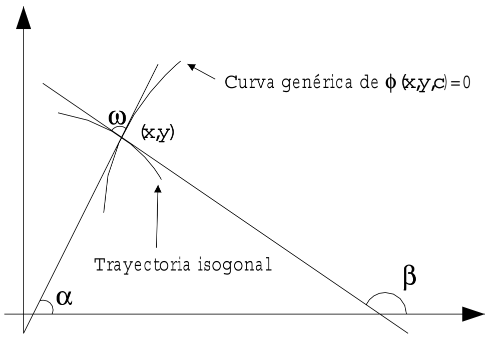

Figura 1.2: Trayectoria isogonal a una curva genérica en un punto

$\phi(x, y, c) = 0$ es solución de cierta ecuación diferencial $F\left(x, y, y'\right) = 0$ y la curva de la trayectoria isogonal lo será de una ecuación diferencial $F\left(x, y, Y'\right) = 0$.

$$\alpha = \beta - \omega \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\omega}$$

por tanto,

$$y' = \frac{Y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + Y' \cdot \operatorname{tg}\omega}$$

donde ω es conocido. Despejando Y' se obtiene

$$Y' = -\frac{\operatorname{tg}\omega + y'}{\operatorname{tg}\omega \cdot y' - 1}$$

Hay que hallar por tanto la solución de la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, -\frac{\operatorname{tg}\omega + y'}{\operatorname{tg}\omega \cdot y' - 1}\right) = 0$$

para obtener las trayectorias isogonales.

Muchas veces se nos pedirán las **trayectorias ortogonales**, para las que $\omega = \frac{\pi}{2}$ por lo que la ecuación diferencial a resolver es

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Ejemplo:

Del problema 13.a)

Hallar la trayectoria ortogonal a la familia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Son circunferencias centradas en el eje OX.

En primer lugar, hallamos la ecuación diferencial de la que es solución dicha familia

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y^{'}y - 2a = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{array}\right\} x^2 + y^2 = x\left(2x + 2yy^{'}\right)$$

Por tanto

$$y^{'} = \frac{-x^2 + y^2}{2xy}$$

Para obtener las trayectorias ortogonales la ecuación diferencial es

$$Y^{'} = -\frac{1}{y^{'}} = \frac{-x^2 + y^2}{2xy}$$

La resolvemos

$$y^{'} = \frac{2xy}{-y^2 + x^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

es homogénea por lo que hacemos el cambio $z = \frac{y}{x} \rightarrow y^{'} = z + xz^{'}$ y queda

$$z + xz^{'} = \frac{2z}{1 - z^2} \rightarrow xz^{'} = \frac{z + z^3}{1 - z^2} \rightarrow \frac{1 - z^2}{z - z^3}dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}\right)dz = \ln x + \ln c_1$$

Hallando las constantes A, B y C

$$1 - z^2 = A\left(z^2 + 1\right) + z\left(Bz + C\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow A = 1 \\ z = i \Rightarrow 2 = i\left(Bi + C\right) = -B + iC \\ C = 0 \\ B = -2 \end{array}\right.$$

$$\int\left(\frac{1}{z} + \frac{-2z}{z^2 + 1}\right)dz = \ln z - \ln\left(z^2 + 1\right) = \ln x + \ln c_1$$

Agrupando términos

$$\frac{z}{z^2 + 1} = xc_1$$

y deshaciendo el cambio

$$\frac{y}{c_1} = x^2 + y^2$$

que son circunferencias centradas en el eje OY. ■

Ejemplo:

Del problema 13.d)

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Calculamos su ecuación diferencial

$$2\left(x^2 + y^2\right)\left(2x + 2yy^{'}\right) = a^2\frac{\left(2x - 2yy^{'}\right)\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 - y^2\right)\left(2x + 2y^{'}y\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Esta ecuación diferencial es bastante complicada de la forma normal, así que lo más razonable es hacer un cambio a coordenadas polares

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

con lo que la ecuación queda

$$\rho^4 = a^2\frac{\rho^2\left(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\right)}{\rho^2} = a^2\left(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\right) = a^2\cos 2\theta$$

Sin embargo, las trayectorias ortogonales no se calculan de la misma forma para las coordenadas polares (lo cual parece lógico), así que antes nos detendremos a ver cómo calcularlas. ■

1.6.2 Trayectorias ortogonales en coordenadas polares

Dada la familia $G(\theta,\rho(\theta),c) = 0$, para hallar su trayectoria ortogonal:

A- Hallar la ecuación diferencial de la que es solución $G(\theta,\rho(\theta),c) = 0$:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial G}{\partial\theta} + \frac{\partial G}{\partial\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = 0\\ G(\theta,\rho(\theta),c) = 0\end{array}\right\} F\left(\theta,\rho,\rho^{'}\right) = 0$$

B- Resolver $F(\theta,\rho,A) = 0$, para lo cual primero tenemos que ver qué es A. Vamos a ello pues:

$$\rho^{'} \to A$$
$$y^{'} \to -\frac{1}{y'}$$

Haciendo uso de los cambios a polares:

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

calculamos $y^{'}$

$$y^{'} = \frac{dx}{dy} = \frac{d\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta d\theta}{d\rho\cos\theta + \rho(-\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta} = \left\{\times\frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta d\theta}\right\} = \frac{\rho^{'}\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho}{\rho' - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

Despejamos $\rho^{'}$

$$y^{'}\left(\rho^{'} - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta\right) = \rho^{'}\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho \to \rho^{'}\left(y^{'} - \mathrm{tg}\,\theta\right) = y^{'}\rho\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho$$

$$\rho^{'} = \frac{y^{'}\rho\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho}{y' - \mathrm{tg}\,\theta}$$

Usamos la expresión de $y^{'}$ que hemos encontrado antes y hacemos $y^{'} \to -\frac{1}{y'}$ para obtener A

$$\begin{aligned} A = \frac{\rho + \left(-\frac{1}{y'}\right)\rho\,\mathrm{tg}\,\theta}{-\frac{1}{y'} - \mathrm{tg}\,\theta} &= \frac{\rho - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta\left(\frac{\rho^{'} - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta}{\rho'\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho}\right)}{-\frac{\rho^{'} - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta}{\rho'\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho} - \mathrm{tg}\,\theta} \\ &= \frac{\rho\rho^{'}\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho^2 - \rho\rho^{'}\,\mathrm{tg}\,\theta + \rho^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{-\rho' + \rho\,\mathrm{tg}\,\theta - \rho'\,\mathrm{tg}^2\,\theta - \rho\,\mathrm{tg}\,\theta} \\ &= \frac{\rho^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta\right)}{-\rho'\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta\right)} = -\frac{\rho^2}{\rho'} \end{aligned}$$

Por tanto

$$A = -\frac{\rho^2}{\rho'} \tag{1.23}$$

Y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales en coordenadas polares es

$$F\left(\theta, \rho, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0$$

Ejemplo:

Continuamos el ejemplo anterior.

$$\rho^4 = a^2 \cos 2\theta$$

derivando con respecto a θ

$$4\rho^3 \rho' = a^2 \left(-2 \operatorname{sen} 2\theta\right)$$

despejamos a de la primera: $a^2 = \frac{\rho^4}{\cos 2\theta}$ y lo metemos en la segunda

$$4\rho^3 \rho' = -2\frac{\rho^4}{\cos 2\theta} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\rho' = -\rho \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\cos 2\theta}$$

Hacemos $A = -\frac{\rho^2}{\rho'}$ con lo que

$$-\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{\rho \operatorname{sen} 2\theta}{2\cos 2\theta}$$

es la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. La ventaja de usar coordenadas polares es que casi siempre obtenemos ecuaciones diferenciales de variables separadas:

$$2\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} d\theta = \frac{d\rho}{\rho} \to \ln\left(\operatorname{sen} 2\theta\right) = \ln \rho + \ln c$$

por lo que la ecuación de las trayectorias ortogonales en polares es

$$\rho c = \operatorname{sen} 2\theta$$

■

Ejemplo:

Vamos a repetir el problema 13.a) en coordenadas polares.

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$\rho^2 = 2a\rho\cos\theta \to \rho = 2a\cos\theta$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = -2a \operatorname{sen}\theta$$

Por lo que

$$\rho' = -\frac{\rho}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta$$

Entonces,

$$A = -\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{\rho}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta \to \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Así que la ecuación diferencial queda

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^{-1} d\theta$$

Resolviendo la ecuación

$$\ln(\operatorname{sen}\theta) + \ln c = \ln\rho$$

y ordenando

$$\rho = c\operatorname{sen}\theta$$

es la familia de circunferencias centradas en el eje OY que obtuvimos antes, en coordenadas polares. ■

TEMA 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

En la mayoría de aplicaciones prácticas nos vamos a encontrar con ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo que les daremos una especial importancia en este tema.

2.1 Definición

Una **ecuación diferencial ordinaria de orden** n es una relación funcional del tipo

$$F\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

o

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Cuya **solución general** es de la forma

$$\phi\left(x, y\left(x\right), c_1, c_2, \ldots, c_n\right) = 0$$

o

$$y = g\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$$

donde tanto ϕ como g tienen que ser n veces diferenciables.

Problema de Valor Inicial

$$\mathrm{I}\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0, y^{'}\left(x_0\right) = y_0^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Donde $y\left(x_0\right) = y_0, y^{'}\left(x_0\right) = y_0^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}$ son las condiciones iniciales del problema. Si tuviéramos diferentes puntos x para cada derivada en lugar de condiciones iniciales se las llamaría condiciones de contorno.

2.2 Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ donde D es cerrado, acotado y que contenga las condiciones iniciales:

- Si f es continua en D, entonces el problema (I) tiene solución.
- Si f es continua en D, y existen $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ y son continuas en D, entonces el problema (I) tiene solución única.

2.3 Reducción del orden de una ecuación diferencial

Tenemos varios casos en función de la forma de la ecuación diferencial.

2.3.1 $y^{(n)} = f(x)$

Este caso es el trivial, en el que la solución se obtiene integrando n veces la función $f(x)$:

$$y = \int \int \dots \int f(x)\, dx$$

Ejemplo:

$$y'' = x^5 + \operatorname{sen} x$$

integramos

$$y' = \frac{x^6}{6} - \cos x + c_1$$

y volvemos a integrar

$$y = \frac{x^7}{42} - \operatorname{sen} x + c_1 x + c_2$$

esto es la solución general que por ser la de una ecuación de segundo orden tiene 2 constantes arbitrarias.

■

2.3.2 $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$

En este caso la primera derivada que aparece es la de orden k. Con el siguiente cambio

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = p(x)$$

el orden se reduce a $n - k$

$$F\left(x, p(x), p'(x), \dots, p^{(n-k)}(x)\right) = 0$$

Ejemplo:

$$y^{VI} - \frac{y^V}{x} = 0$$

es una ecuación de orden 6, pero no aparecen y, y', y'', y''', y^{IV}. El cambio es $y^V = p(x) \rightarrow y^{VI} = p'(x)$ con lo que la ecuación queda

$$p'(x) - \frac{1}{x} p(x) = 0$$

que es de variables separadas

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln p(x) = \ln x + \ln c_1$$

$$p(x) = c_1 x = y^V$$

Ahora tenemos una del primer tipo, con lo que podemos integrar 5 veces para obtener la solución general final:

$$y = \frac{c_1}{6!} x^6 + \frac{c_2}{4!} x^4 + \frac{c_3}{3!} x^3 + \frac{c_4}{2!} x^2 + c_5 x + c_6$$

■

2.3.3 $F\left(y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Es decir, que no aparece la variable independiente. En este caso podemos transformar la ecuación diferencial en otra cuya variable independiente sea y.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = p(y)$$

$$y^{''} = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p^{'}(y)\,p(y)$$

$$y^{'''} = \frac{d^2}{dx^2}(p(y)) = \frac{d}{dy}\left(p^{'}(y)\,p(y)\right)\frac{dy}{dx} = \left(p^{''}(y)\,p(y) + \left(p^{'}(y)\right)^2\right)p(y)$$

$$\vdots$$

y con este cambio se reduce en un orden la ecuación.

Ejemplo:

$$yy^{''} + \left(y^{'}\right)^2 = 0$$

hacemos el cambio

$$\left.\begin{array}{l} y^{'} = p(y) \\ y^{''} = p^{'}(y)\,p(y) \end{array}\right\} yp^{'}(y)\,p(y) + (p(y))^2 = 0$$

Y obtenemos la ecuación diferencial

$$yp^{'}(y) = -p(y) \rightarrow \frac{dp(y)}{p(y)} = -\frac{dy}{y}$$

que como es de variables separadas se resuelve fácilmente:

$$\ln(p(y)) = -\ln y + \ln c_1 \Rightarrow p(y) = \frac{c_1}{y}$$

Deshaciendo el cambio nos queda

$$y^{'} = \frac{c_1}{y}$$

e integrando la función queda

$$ydy = c_1 dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

■

2.3.4 $F\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

En este caso aparecen todas las variables (dependientes e independientes), pero el primer miembro puede expresarse como

$$\frac{d}{dx}\left(\phi\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Por lo que

$$\phi\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n-1)}\right) = c_1$$

y se reduce el orden a $n-1$.

Ejemplo:

$$yy'' + \left(y'\right)^2 = 0$$

Se puede observar que la ecuación es posible expresarla como

$$\frac{d}{dx}\left(yy'\right) = 0$$

con lo que

$$yy' = c_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

■

A veces es necesario multiplicar por un factor (integrante) para poder expresar F como $\frac{d\phi}{dx}$:

$$\exists\mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \quad / \quad \mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \cdot F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$\equiv \frac{d}{dx}\left(G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Ejemplo:

$$yy'' - \left(y'\right)^2 = 0$$

Multiplicamos por $\mu = \frac{1}{y^2}$ y nos queda

$$\frac{y''}{y^2} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{y''y - \left(y'\right)^2}{y^2} = 0$$

Ojo, porque podríamos perder soluciones, en este caso $y = 0$. Ahora es trivial que se puede expresar como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0$$

y la solución es

$$\frac{y'}{y} = c_1 \rightarrow \ln y = c_1 x + \ln c_2$$

por lo que queda

$$y = c_2\, e^{c_1 x}$$

Observamos que para la solución $y = 0$ no tendríamos ningún problema ya que está incluida en la general haciendo $c_2 = 0$. ■

A veces al multiplicar por μ podemos añadir soluciones superfluas.

2.3.5 $F\left(x.y,y^{'},\dots,y^{(n)}\right)=0$ homogénea

Cuando la relación funcional es homogénea con respecto a y y sus derivadas (no con respecto a x), de grado p:

$$F\left(x,\lambda y,\lambda y^{'},\dots,\lambda y^{(n)}\right)=\lambda^{p}\cdot F\left(x,y,y^{'},\dots,y^{(n)}\right)=0$$

Y para reducir el orden en una unidad se hace el cambio

$$y=e^{\int z\,dx}$$

con $z=z\left(x\right)$.

$$\begin{array}{l}
y^{'}=z\cdot e^{\int z\,dx}=y\cdot z\\
y^{''}=y^{'}\cdot z+y\cdot z^{'}=y\cdot z^{2}+y\cdot z^{'}\\
y^{'''}=y^{'}\cdot z^{2}+2z\cdot z^{'}\cdot y+y\cdot z^{''}+y^{'}\cdot z^{'}=y^{'''}=y\left(z^{3}+3z\cdot z^{'}+z^{''}\right)\\
\vdots\\
y^{(n)}=y\cdot g\left(z,z^{'},z^{''},\dots,z^{(n-1)}\right)
\end{array}$$

Incluyendo esto en la ecuación diferencial:

$$0=F\left(x,y,yz,y\left(z^{2}+z^{'}\right),y\left(z^{3}+3zz^{'}+z^{''}\right),\dots,y\cdot g\left(z,z^{'},\dots,z^{(n-1)}\right)\right)=y^{p}\cdot F\left(x,1,z,z^{2}+z^{'},\dots\right)$$

Ejemplo:

$$yy^{''}-\left(y^{'}\right)^{2}=6xy^{2}$$

La resolvemos de la forma que vimos anteriormente

$$\frac{yy^{''}-\left(y^{'}\right)^{2}}{y^{2}}=6x\rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{y^{'}}{y}\right)=6x\Rightarrow\frac{y^{'}}{y}=3x^{2}+c_{1}$$

$$\frac{dy}{y}=\left(3x^{2}+c_{1}\right)dx\rightarrow\ln y=x^{3}+c_{1}x+\ln c_{2}$$

y la solución general es

$$y=c_{2}\,e^{x^{3}+c_{1}x}$$

Si lo hacemos de la forma que acabamos de ver, con respecto a y, $y^{'}$ e $y^{''}$ la ecuación es homogénea:

$$\lambda y\lambda y^{'}-\left(\lambda y^{'}\right)^{2}-6x\left(\lambda y\right)^{2}=\lambda^{2}\left(yy^{'}-\left(y^{'}\right)^{2}-6xy^{2}\right)=0$$

Hacemos el cambio $y=e^{\int z\,dx}$

$$yy\left(z^{2}+z^{'}\right)-y^{2}z^{2}=6xy^{2}\rightarrow z^{2}+z^{'}-z^{2}=6x\rightarrow dz=6xdx$$

$$z=3x^{2}+c_{1}$$

deshaciendo el cambio

$$z=\frac{y^{'}}{y}=3x^{2}+c_{1}$$

que es a lo mismo que llegamos antes, por lo que nuestra solución general es

$$y=c_{2}\,e^{x^{3}+c_{1}x}$$

■

2.4 Ecuación Diferencial Lineal de Orden n

Recordemos que la ecuación diferencial lineal de orden 1 era

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

y es lineal en y.

➢ ***Definición:*** **ecuación lineal en** $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = g(x)$$

$a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

Veamos las condiciones de **existencia de solución**:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)} - \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y^{(n-2)} - \ldots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}y' - \frac{a_n(x)}{a_0(x)}y + \frac{g(x)}{a_0(x)} \\ &= b_1(x)\,y^{(n-1)} + b_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x)\,y' + b_n(x)\,y + \Psi(x) \end{aligned}$$

es decir,

$$b_i(x) = -\tfrac{a_i(x)}{a_0(x)} \quad i = 1 : n$$

$$\Psi(x) = \tfrac{g(x)}{a_0(x)}$$

Ya tenemos la ecuación diferencial en la forma $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$. Para que sea continua, deben serlo los sumandos $b_i(x)$, así que para que exista solución de la ecuación lineal, basta con que los $a_i(x)$ y $g(x)$ sean continuos (ya que hemos exigido que $a_0(x) \neq 0$ en un intervalo $[a, b]$).

A esta forma de la ecuación se la llama **ecuación diferencial lineal de coeficientes variables**; hay ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, en las que $a_i(x) = c_i$, y que veremos más adelante.

2.4.1 Teorema de existencia y unicidad

$$\begin{cases} y^{(n)} = b_1(x)\,y^{(n-1)} + b_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x)\,y' + b_n(x)\,y + \Psi(x) \\ \\ y(x_0) = y_0;\; y'(x_0) = y'_0;\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Si existen

$$\tfrac{\partial f}{\partial y} = b_n(x) \quad \tfrac{\partial f}{\partial y'} = b_{n-1}(x) \quad \ldots \quad \tfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = b_1(x)$$

y son continuas, y $\Psi(x)$ es continua, entonces existe una única solución de la ecuación diferencial lineal.

2.4.2 Operador L

Definimos el operador L como

$$L = a_0(x) \cdot D^n + a_1(x) \cdot D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot D + a_n(x)$$

donde

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

por lo que se puede escribir la ecuación diferencial lineal como

$$L(y) = a_0(x) \cdot D^n y + a_1(x) \cdot D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot Dy + a_n(x) \cdot y$$

$$L(y) = g(x)$$

Si $g(x) = 0$ a $L(y) = 0$ se la llama **ecuación diferencial lineal homogénea**. Es siempre homogénea de grado 1 y podemos reducir su orden en 1 unidad.

Propiedad del operador L

- Es lineal:
  a) $L(a \cdot y) = a \cdot L(y)$
  b) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

Corolario. *Si tenemos una suma finita de constantes arbitrarias c_i por y_i,*

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot y_i\right) = L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k) &= \{b\} \\ L(c_1 y_1) + L(c_2 y_2) + \ldots + L(c_k y_k) &= \{a\} \\ c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \ldots + c_k L(y_k) &= \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot L(y_i) \end{aligned}$$

2.4.3 Teoremas relativos a las soluciones de $L(y) = 0$

Teorema 2.1. *Dado $L(y) = 0$, $a_i \in C([a,b])\ \forall i = 1:n$,*

a) Si y es solución de $L(y) = 0$, entonces $c \cdot y$ también es solución de $L(y) = 0$

b) Si y_1 e y_2 son soluciones de $L(y) = 0$, entonces la suma $y_1 + y_2$ también lo es

Demostración. Usando la propiedad de linealidad del operador L,

a) $L(c \cdot y) = c \cdot L(y) = 0 \Rightarrow y$ es solución$\Rightarrow c \cdot y$ también

b) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$ se ve de la misma forma

□

Corolario. *Si tenemos un número finito de soluciones, $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de $L(y) = 0$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot y_i$$

es solución de $L(y) = 0$.

2.4.4 Wronskiano

Dadas n funciones $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$, $n-1$ veces diferenciables en $[a,b]$, se denota el **Wronskiano** de ese conjunto de funciones como

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Con este determinante se estudia la dependencia e independencia lineal de las soluciones.

Teorema 2.2. *Dado el conjunto $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$, $n-1$ veces diferenciables y **linealmente dependientes**, entonces*

$$W(x) = 0$$

Demostración. Partiendo de que $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$ son linealmente dependientes, entonces existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todas nulas tales que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$$

Si derivamos sucesivamente esta expresión:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 y_1^{'}(x) + \alpha_2 y_2^{'}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{'}(x) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array}$$

es un sistema de ecuaciones homogéneo y tiene solución no trivial, luego el determinante del sistema es nulo. □

Teorema 2.3. *Si tenemos $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$, $n-1$ veces diferenciables que son **linealmente independientes**, y soluciones particulares de $L(y) = 0$ con $a_i \in C^1([a,b])$, entonces*

$$W(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe algún $x_0 \in [a,b] / W(x_0) = 0$.

¿Es posible que existan α_i, $i = 1:n$ no todos nulos tales que ocurra lo que en el teorema anterior? Pues sí...

Por hipótesis, las $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$ son soluciones de $L(y) = 0$. Por el corolario anterior tenemos que

$$\begin{cases} y^*(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i(x_0) \text{ tambien es solucion de } L(y) = 0 \\ y^*(x_0) = 0 \\ y^{*'}(x_0) = \alpha_1 y_1^{'}(x_0) + \alpha_2 y_2^{'}(x_0) + \ldots = 0 \\ y^{*''}(x_0) = \alpha_1 y_1^{''}(x_0) + \ldots = 0 \\ \vdots \\ y^{*(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Conclusión: y^* es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y^{'}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

$y = 0$ también es solución de este problema. Sin embargo, la solución es única para este problema de valor inicial, por tanto $y^* = 0$ con lo que $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$ son linealmente dependientes $\forall x \in [a,b]$ y el punto de partida es falso. □

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot y^{IV} - 3x^2 y^{'''} + 4\cos x \cdot y = 0 \\ y(x_0) = y_0 = 0 \\ \vdots \\ y^{'''}(x_0) = y_0^{'''} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

■

Sistema fundamental de soluciones

Dadas $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$ linealmente independientes y soluciones de la ecuación lineal homogénea $L(y)=0$, con $a_i \in C([a,b])$, se las llama sistema fundamental de soluciones.

Teorema 2.4. *Dado un sistema fundamental de soluciones para $L(y)=0$ (con a_i continuas en $[a,b]$), entonces la **solución general** de la ecuación lineal homogénea $L(y)=0$ es la combinación lineal de dichas soluciones:*

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

Demostración. Si $\{y_i(x)\}_{i=1:n}$ son soluciones de $L(y)=0$, sabemos que $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ es solución de la ecuación. Las condiciones iniciales son

$$\begin{cases} \forall x_0 \in [a,b] \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

y se puede escribir el Wronskiano

$$\left| \begin{array}{c} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array} \right| = W(x) \neq 0$$

por lo que quedan determinados todos los c_i cualesquiera que sean las condiciones iniciales.

□

Teorema 2.5. *Dado $L(y) = g(x)$ con los $a_i, g(x) \in C([a,b])$, si y_0 es solución general de $L(y)=0$ y tenemos una solución particular de la ecuación completa $L(y)=g(x)$, $\tilde{y} = y_p$, entonces*

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

es la solución general de la ecuación completa $L(y) = g(x)$.

2.4.5 Método para reducir el orden de una ecuación lineal completa

Tenemos una ecuación diferencial lineal

$$L(y) = g(x)$$

Para simplificar, vamos a tomar $L(y)$ de orden 2, ya que se hace de la misma forma para orden n.

$$L(y) = a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = g(x)$$

Si se conoce una solución particular de la ecuación homogénea, y_p, con el cambio

$$y = y_p \cdot \int z\,dx$$

con $z = z(x)$, la ecuación se reduce de orden y sigue siendo lineal:

$$y' = y_p' \cdot \int z\,dx + y_p \cdot z$$

$$y'' = y_p'' \cdot \int z\,dx + 2y_p' \cdot z + y_p \cdot z'$$

$$\int z dx \left(\overbrace{a_0(x) y_p^{''} + a_1(x) y_p^{'} + a_2(x) y_p}^{=0} \right) + a_1(x) y_p z + a_0(x) \left(2y_p^{'} z + y_p z^{'} \right) = g(x)$$

con lo que la ecuación que queda es

$$\left(a_1(x) y_p + 2a_0(x) y_p^{'} \right) z + a_0(x) y_p z^{'} = g(x)$$

que es lineal en z.

Ejemplo:

Del problema 18.f)

$$\left(1 + x^2\right) y^{''} - 2xy^{'} + 2y = 2$$

$$y_p = x^2 - 1$$

Comprobamos la solución

$$\left(1 + x^2\right) 2 - 2x \cdot 2x + 2\left(x^2 - 1\right) = 2 - 2 + 2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 0$$

$$\begin{cases} a_0(x) = 1 + x^2 \\ a_1(x) = -2x \\ a_2(x) = 2 \end{cases}$$

con lo que la nueva ecuación diferencial es

$$\left(1 + x^2\right)\left(x^2 - 1\right) z^{'} + \left(2\left(1 + x^2\right) - 2x\left(x^2 - 1\right) \cdot 2\right) z = 2$$

lineal en z. ■

2.5 Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$a_i \in K \qquad \forall i = 1 : n$$

La ecuación es

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = g(x)$$

En este caso, basta con que $g(x)$ sea continua para que exista solución única al PVI. Expresado con el operador L

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = g(x)$$

Es un polinomio en D: $P(D) y = g(x)$.

La solución general es

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

Se define el **poliniomio característico** (sólo aplicable con ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes) asociado a la ecuación diferencial lineal:

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

2.5.1 Soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes

Vamos a buscar soluciones a la ecuación $P(D)\,y = 0$ de la forma e^{rx}:

$$P(D)\,e^{rx} = 0$$

$$\begin{aligned} P(D)\,e^{rx} &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) e^{rx} \\ &= a_0 r^n\, e^{rx} + a_1 r^{n-1}\, e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r\, e^{rx} + a_n\, e^{rx} \\ &= e^{rx}\, P(r) = 0 \Leftrightarrow P(r) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que e^{rx} sea solución de $P(D)\,y = 0$ es que $P(r) = 0$.

El polinomio característico tendrá n raices (simples, múltiples, reales o complejas), y según el tipo de raices hay 4 casos que vamos a ver a continuación.

$P(r)$ admite raices reales simples

En este caso, las raices de $P(r) = 0$ son $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, con $r_i \neq r_j\ \forall i \neq j$. Por tanto las $e^{r_i x}$, $i = 1 : n$, son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea.

Si esas funciones son linealmente independientes, entonces forman un sistema fundamental de soluciones y la solución general es

$$y = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} + \ldots + c_n\, e^{r_n x}$$

Veamos que son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1\, e^{r_1 x} & r_2\, e^{r_2 x} & \ldots & r_n\, e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1}\, e^{r_1 x} & r_2^{n-1}\, e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1}\, e^{r_n x} \end{vmatrix} \\ &= e^{r_1 x} \cdot e^{r_2 x} \cdots e^{r_n x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

El último determinante es el determinante de Wandermonde, que siempre es distinto de cero y las exponenciales siempre son distintas de cero.

Ejemplo:

$$y''' - y' = 0$$

El polinomio característico es

$$P(D) = D^3 - D$$

$$\left(D^3 - D\right) y = 0 \to P(r) = r^3 - r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \to e^{r_1 x} = 1 \\ r_2 = 1 \to e^{r_2 x} = e^x \\ r_3 = -1 \to e^{r_3 x} = e^{-x} \end{cases}$$

por lo que la solución general es

$$y = c_1 + c_2\, e^x + c_3\, e^{-x}$$

■

$P(r)$ admite raices simples, siendo algunas complejas

Raices complejas:

$$\begin{aligned} r_1 &= s + it \\ r_2 &= s - it \end{aligned}$$

son solución de $P(r) = 0$. En la expresión de la solución general aparecerá, por cada par de raices complejas conjugadas:

$$A\, e^{(s+it)x} + B\, e^{(s-it)x} = e^{sx} \left(c_1 \cos tx + c_2 \operatorname{sen} tx \right)$$

Veamoslo detenidamente:

$$\begin{aligned} A\, e^{(s+it)x} + B\, e^{(s-it)x} = A\, e^{sx}\, e^{itx} + B\, e^{sx}\, e^{-itx} &= e^{sx} \left(A \left(\cos tx + i \operatorname{sen} tx \right) + B \left(\cos tx - i \operatorname{sen} tx \right) \right) \\ &= e^{sx} \left((A+B) \cos tx + i (A-B) \operatorname{sen} tx \right) \\ &= e^{sx} \left(c_1 \cos tx + c_2 \operatorname{sen} tx \right) \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$y'' + 2y = 0$$

$$P(D)\, y = \left(D^2 + 2 \right) y = 0$$

Resolvemos el polinomio característico

$$P(r) = r^2 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} i \\ r_2 = -\sqrt{2} i \end{cases}$$

y la solución general es

$$y = e^{sx} \left(c_1 \cos tx + c_2 \operatorname{sen} tx \right) = c_1 \cos \sqrt{2} x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2} x$$

■

$P(r)$ admite raices reales multiples

Tenemos una raiz r con orden de multiplicidad h, para la cual hay h constantes arbitrarias. La estructura de la solución general para esa raiz r es

$$e^{rx}\, Q_{h-1}(x) = e^{rx} \left(c_1 + c_2 x + \ldots + c_h x^{h-1} \right)$$

y el sistema de soluciones es

$$\left\{ e^{rx}, x\, e^{rx}, \ldots, x^{h-1}\, e^{rx} \right\}$$

Antes de demostrar que es un sistema fundamental de soluciones, tenemos que ver un lema previo:

Lema. *Si $f(x)$ es una función infinitamente derivable, se puede demostrar que*

$$(D - r)^k \left(e^{rx} f(x) \right) = e^{rx} D^k f(x)$$

Demostración. Tenemos que demostrar

$$(D - s)^k \left(e^{rx} f(x) \right) = (D - s + r)^k f(x)$$

y lo haremos por inducción sobre k:

Empezamos por $k = 1$

$$\begin{aligned}(D-r)\left(e^{rx}f(x)\right) &= D\,e^{rx}f(x) - r\,e^{rx}f(x)\\ &= r\,e^{rx}f(x) + e^{rx}Df(x) - r\,e^{rx}f(x)\\ &= e^{rx}Df(x)\end{aligned}$$

Supongamos que es cierto para $k = n-1$, es decir que se cumple

$$(D-r)^{n-1}\left(e^{rx}f(x)\right) = e^{rx}D^{n-1}f(x)$$

así que lo vemos para $k = n$

$$\begin{aligned}(D-r)^{n}\left(e^{rx}f(x)\right) &= (D-r)(D-r)^{n-1}\left(e^{rx}f(x)\right)\\ &= (D-r)\left(e^{rx}D^{n-1}f(x)\right)\\ &= r\,e^{rx}D^{n-1}f(x) + e^{rx}D^{n}f(x) - r\,e^{rx}D^{n-1}f(x)\\ &= e^{rx}D^{n}f(x)\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado. □

Si lo llevamos a nuestro caso,

$$\begin{aligned}P(D)\left(e^{rx}x^{l}\right) &= G(D)(D-r)^{h}\left(e^{rx}x^{l}\right)\\ &= G(D)\,e^{rx}D^{h}x^{l}\\ &= \left\langle\begin{array}{ll}0 & l<h\\ \neq 0 & l\geq h\end{array}\right.\end{aligned}$$

donde el grado de $G(D)$ es $n-h$. Por tanto, aparece un sistema de soluciones

$$\left\{e^{rx}x^{l}\right\}_{l=0:h-1}$$

Comprobamos que ese sistema es linealmente independiente:

$$\begin{aligned}\alpha_1 e^{rx} + \alpha_2 x\,e^{rx} + \ldots + \alpha_h x^{h-1}e^{rx} = 0 &\Rightarrow e^{rx}\left(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_h x^{h-1}\right) = 0\\ &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_h x^{h-1} = 0\\ &\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1:h\end{aligned}$$

Ejemplo:

Del problema 22.d)

$$y^{IV} - y^{'''} - 3y^{''} + 5y^{'} - 2y = 0$$

$$P(D)\,y = 0$$

$$\left(D^4 - D^3 - 3D^2 + 5D - 2\right)y = 0$$

El polinomio característico es

$$r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación:

	1	-1	-3	5	-2
1		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	0
1		1	1	-2	
	1	1	-2	0	
1		1	2		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

El sistema fundamental es

$$\left\{e^{-2x}, e^x, x\, e^x, x^2\, e^x\right\}$$

por lo que la solución general es

$$y = c_1\, e^{-2x} + e^x \left(c_2 + c_3 x + c_4 x^2\right)$$

■

$P(r)$ admite raices complejas múltiples

Tenemos las raices r_1 y r_2 complejas conjugadas múltiples de multiplicidad k

$$\begin{aligned} r_1 &= s + it \\ r_2 &= s - it \end{aligned}$$

La solución general debida a estas raices tiene la forma

$$e^{sx}\left(P_{k-1}(x)\cos tx + Q_{k-1}(x)\,\mathrm{sen}\, tx\right)$$

Conteniendo los polinomios P y Q las constantes arbitrarias.

En caso de que no se encuentren raices reales ni complejas, hay que resolver la ecuación por métodos numéricos.

Ejemplo:

Del problema 22.e)

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = x\,\mathrm{sen}\, 2x$$

La solución general será de la forma

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

Vamos a calcular únicamente la solución homogénea, y_0:

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$$

$$\left(D^4 + 4D^2 + 4\right) y = 0$$

$$P(r) = r^4 + 4r^2 + 4 = \left(r^2 + 2\right)^2 = \left(r + \sqrt{2}i\right)^2 \left(r - \sqrt{2}i\right)^2$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2}i \quad k = 2 \\ r_2 &= -\sqrt{2}i \quad k = 2 \end{aligned}$$

Y la solución queda

$$y_0 = e^{0x}\left((c_1 x + c_2)\cos\sqrt{2}x + (c_3 x + c_4)\,\mathrm{sen}\sqrt{2}x\right)$$

■

2.5.2 Métodos para hallar soluciones particulares de $P(D)\,y = g(x)$

Método de los coeficientes indeterminados

Sólo sirve para hallar soluciones particulares de ecuaciones de coeficientes constantes y cuando $g(x)$ tiene formas determinadas:

- $g(x) = P_m(x)\,e^{rx}$ con $m < n$. Hay dos casos:
  r no es raiz de $P(r)$, entonces buscamos soluciones particulares de la forma

  $$\tilde{y} = Q_m\, e^{rx}$$

  r es raiz de $P(r)$, de multiplicidad h. Entonces buscamos soluciones de la forma

  $$\tilde{y} = x^h\left(Q_m\, e^{rx}\right)$$

- $g(x) = e^{sx}\left(P_n(x)\cos tx + Q_m(x)\operatorname{sen} tx\right)$. De nuevo distinguimos dos casos:
  $s + it$ no es raiz de $P(r)$, en cuyo caso la solución buscada es

  $$\tilde{y} = e^{sx}\left(H_k(x)\cos tx + G_k(x)\operatorname{sen} tx\right) \qquad k = \max\{m, n\}$$

  $s + it$ es raiz de $P(r)$ con multiplicidad l

  $$\tilde{y} = x^l\left(e^{sx}\left(H_k(x)\cos tx + G_k(x)\operatorname{sen} tx\right)\right) \qquad k = \max\{m, n\}$$

Ejemplo:

Del problema 22.a)

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = \left(x^2 + x\right) e^{2x}$$

Calculamos primero la solución homogénea:

$$P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$$

$$y_0 = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{x}$$

Y la solución particular tendrá la forma

$$\tilde{y} = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{2x}\, x = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) e^{2x}$$

con A, B, C a determinar. Derivando dos veces para introducir la expresión en la ecuación:

$$\begin{aligned} y^{'} &= \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{2x} + 2\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) e^{2x} \\ y^{''} &= (6Ax + 2B)\, e^{2x} + \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) 2\, e^{2x}\, 2 + 2\left(Ax^3 + Bx^2 + C\right) e^{2x} \end{aligned}$$

Nos queda

$$\left(x^2 + x\right) e^{2x} = (6Ax + 2B)\, e^{2x} + \left(3Ax^2 + 2B + C\right) e^{2x}$$

$$\left(x^2 + x\right) = 6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2B + C$$

con lo que podemos obtener

$$\begin{aligned} 0 &= 2B + C \\ 1 &= 6A + 2B \\ 1 &= 3A \end{aligned}$$

y los valores de las constantes son

$$A = \frac{1}{3}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$C = 1$$

■

Ejemplo:

Del problema 22.c)

$$y^{'''} + y = 3\operatorname{sen} x$$

$$\left(D^3 + 1\right) y = 3\operatorname{sen} x \rightarrow P\left(r\right) = r^3 + 1 = \left(r + 1\right)\left(r - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(r - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

La solución homogénea es

$$y_0 = c_1\ e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Y la particular tiene la forma

$$\tilde{y} = A\operatorname{sen} x + B\cos x$$

$$g\left(x\right) = e^{0x}\ 3\operatorname{sen} x \rightarrow r = i$$

no es raiz de $P\left(r\right) = 0$. La derivada tercera de $\tilde{y}$ es

$$\tilde{y}^{'''} = -A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

$$\left(A + B\right)\operatorname{sen} x + \left(B - A\right)\cos x = 3\operatorname{sen} x \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B = 3 \\ B - A = 0 \end{array}\right.$$

$$A = \tfrac{3}{2}$$

$$B = \tfrac{3}{2}$$

con lo que la solución general completa es

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1\ e^{-x} + e^{x/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x$$

■

Ejemplo:

Del problema 22.n)

$$y^{IV} - y = 8\ e^x$$

$$P\left(r\right) = r^4 - 1 = \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 + 1\right)$$

$$y_0 = c_1\ e^x + c_2\ e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$$

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{y} = A\ e^x\ x \\ \tilde{y}^{'} = A\ e^x\left(x + 1\right) \\ \tilde{y}^{''} = A\ e^x\left(x + 2\right) \\ \tilde{y}^{'''} = A\ e^x\left(x + 3\right) \\ \tilde{y}^{IV} = A\ e^x\left(x + 4\right) \end{array}\right.$$

$$A\ e^x\left(x + 4\right) - A\ e^x\ x = 8\ e^x \Rightarrow A = 2$$

con lo que la solución general es

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1\ e^x + c_2\ e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x + 2x\ e^x$$

■

Método de Lagrange o de Variación de Constantes

Este es un método más general, ya que sirve también para ecuaciones lineales de coeficientes variables. En primer lugar, encontramos la solución homogénea que forma un sistema fundamental de soluciones:

$$y_0 \to \{y_i(x)\}_{i=1:n}$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

Con c_i las constantes arbitrarias.

La solución particular la buscamos igual que la homogénea pero las constantes no son constantes, son variables de x:

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$$

Las derivadas sucesivas son:

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{y}' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i'(x) & \to & \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i(x) = 0 \\ \tilde{y}'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i''(x) & \to & \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i'(x) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) & \to & \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0 \end{array}\right\} n-1 \text{ condiciones para hallar } c_i(x)$$

$$\tilde{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x)$$

Llevado a la ecuación lineal:

$$\begin{aligned} a_0(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x)\right) + a_1(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) &+ \ldots + \\ +a_{n-1}(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i'(x) + a_n(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x) &= g(x) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x) \overbrace{\left(a_0(x)\, y_i^{(n)} + a_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_i' + a_n(x)\, y_i\right)}^{=L(y_i)=0} + a_0(x)\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = g(x)$$

por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

El determinante del sistema es el Wronskiano del sistema fundamental de soluciones, que es distinto de cero, por tanto quedan determinados los $c_i(x)$ para todo $i = 1:n$, mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{g(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$$

Ejemplo:

Del problema 22.b)

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

La solución homogénea:

$$\left(D^2 + 3D + 2\right) y = 0$$

$$r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$$

$$y_0 = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x}$$

Para la solución particular usamos el método de variación de constantes

$$\tilde{y} = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, e^{-2x}$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2\, e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{-x}\, c_1'(x) + e^{-2x}\, c_2'(x) = 0 \\ -e^{-x}\, c_1'(x) - 2\, e^{-2x}\, c_2'(x) = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$-e^{-2x}\, c_2'(x) = \frac{1}{1+e^x} \rightarrow c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Integrando se llega a

$$c_2(x) = -e^x + \ln\left(1+e^x\right)$$

y despejando $c_1'(x)$

$$c_1'(x) = -e^{-x}\, c_2'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

que es una integral inmediata

$$c_1(x) = \ln\left(1+e^x\right)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x} + e^{-x}\left(\ln\left(1+e^x\right)\right) + e^{-2x}\left(-e^x + \ln\left(1+e^x\right)\right)$$

■

Ejemplo:

Del problema 22.j)

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x$$

La solución homogénea en primer lugar:

$$\left(D^3 + D\right) y = 0$$

$$r^3 + r = r\left(r^2+1\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ r = \pm i \end{array} \right.$$

$$y_0 = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x \to \{y_1, y_2, y_3\} = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$$

La solución particular por el método de variación de constantes es

$$\tilde{y} = c_1(x) + c_2(x)\cos x + c_3(x)\operatorname{sen} x$$

y el sistema a resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Sumando las filas 1 y 3 podemos obtener

$$c_1'(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow c_1(x) = -\ln(\cos x)$$

y multiplicando la fila 2 por $\operatorname{sen} x$ y la 3 por $\cos x$ y sumandolas

$$c_2'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow c_2(x) = \cos x$$

Despejando obtenemos $c_3'(x)$

$$c_3'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

No resolvemos la integral y la solución general queda

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \cos x - \ln(\cos x) + \operatorname{sen} x \int \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx$$

■

Ejemplo:

Hallar la solución particular de

$$4\left(x^2+x\right)y'' + 2(2x+1)y' - y = 2\sqrt{x^2+x}$$

Conociendo las soluciones particulares de la homogénea

$$\begin{array}{l} y_1 = \sqrt{x} \\ y_2 = 2\sqrt{x+1} \end{array}$$

Lo primero que deberíamos hacer es comprobar que son soluciones (no lo hacemos pero es recomendable hacerlo). Por el método de Lagrange necesitamos conocer la solución general de $L(y) = 0$.

Sin embargo, si $\{y_1, y_2\}$ forma un sistema fundamental de soluciones ya tenemos esa solución general. Lo comprobamos:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2\sqrt{x+1} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{vmatrix} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x(x+1)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \neq 0 \end{aligned}$$

por lo que es un sistema fundamental de soluciones, así que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_0 = c_1\sqrt{x} + c_2 2\sqrt{x+1}$$

y la particular de la completa

$$\tilde{y} = c_1(x)\sqrt{x} + c_2(x)\, 2\sqrt{x+1}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 2\sqrt{x+1} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{'}(x) \\ c_2^{'}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{pmatrix}$$

Se obtiene, finalmente:

$$c_1(x) = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

$$c_2(x) = -\tfrac{x^{3/2}}{3}$$

por tanto, la solución particular que nos pedían es

$$\tilde{y} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+x}$$

■

2.6 Ecuación de Euler

Esta ecuación es del tipo

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)\, y^{'} + a_n y = g(x)$$

Para que admita solución, g debe ser continua.

Si se hace el cambio

$$e^z = ax+b, \qquad z = z(x)$$

se convierte en una ecuación de coeficientes constantes. Para la primera derivada:

$$\frac{d}{dx} \to a = e^z\,\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a\,e^{-z}$$

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = a\,e^{-z}\,\frac{dy}{dz}$$

Lo que hacemos es cambiar de variable independiente, que ahora pasa a ser z.

$$e^z\, y^{'} = a\frac{dy}{dz} \to (ax+b)\, y^{'} = a\frac{dy}{dz}$$

La segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \to y^{''} = \frac{d}{dx}\left(a\,e^{-z}\,\frac{dy}{dz}\right) &= \frac{d}{dz}\left(a\,e^{-z}\,\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \\ &= a^2\,e^{-z}\left(-\,e^{-z}\,y_z^{'} + e^{-z}\,y_z^{''}\right) \end{aligned}$$

por tanto

$$a^2\left(y_z^{''} - y_z^{'}\right) = e^{2z}\,y^{''} \to (ax+b)^2\,y^{''} = a^2\left(y_z^{''} - y_z^{'}\right)$$

La tercera derivada se hace de la misma forma y se obtiene (omitimos los cálculos)

$$(ax+b)^3\,y^{'''} = a^3\left(y_z^{'''} - 3y_z^{''} + 2y_z^{'}\right)$$

Por tanto, lo que estamos viendo es que nos quedará siempre una ecuación lineal de coeficientes constantes.

Ejemplo:

Del problema 28.d)

$$(1+x)^3 y^{'''} + (1+x)^2 y^{''} + 3(1+x) y^{'} - 8y = \frac{x}{(1+x)^2}$$

El cambio es $e^z = x+1$ y las derivadas sucesivas

$$\begin{cases} (x+1) y^{'} = \frac{dy}{dz} \\ (x+1)^2 y^{''} = y_z^{''} - y_z^{'} \\ (x+1)^3 y^{'''} = y_z^{'''} - 3y_z^{''} + 2y_z^{'} \end{cases}$$

Así que la ecuación nos queda

$$y_z^{'''} - 3y_z^{''} + 2y_z^{'} + y_z^{''} - y_z^{'} + 3y_z^{'} - 8y = \frac{e^z - 1}{e^{2z}}$$

simplificando la expresión

$$y_z^{'''} - 2y_z^{''} + 4y_z^{'} - 8y = e^{-z} - e^{-2z}$$

La solución general es de la forma

$$y = y_0 + \tilde{y}$$

Calculamos en primer lugar la solución homogénea:

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = (r-2)\left(r^2+4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = \pm 2i \end{cases}$$

$$y_0 = c_1 e^{2z} + c_2 \cos 2z + c_3 \operatorname{sen} 2z$$

Para la solución particular de la completa usamos el método de los coeficientes indeterminados:

$$\tilde{y} = A e^{-z} + B e^{-2z}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}^{'} = -A e^{-z} - 2B e^{-2z} \\ \tilde{y}^{''} = A e^{-z} + 4B e^{-2z} \\ \tilde{y}^{'''} = -A e^{-z} - 8B e^{-2z} \end{cases}$$

Obtenemos para las constantes

$$A = -\tfrac{1}{15}$$

$$B = \tfrac{1}{32}$$

y la solución particular queda

$$\tilde{y} = -\frac{1}{15} e^{-z} + \frac{1}{32} e^{-2z}$$

Finalmente, la solución general es

$$y = c_1 e^{2z} + c_2 \cos 2z + c_3 \operatorname{sen} 2z - \frac{1}{15} e^{-z} + \frac{1}{32} e^{-2z}$$

y deshaciendo el cambio obtenemos el resultado final

$$y = c_1 (x+1)^2 + c_2 \cos\left(2\ln(x+1)\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(2\ln(x+1)\right) - \frac{1}{15}(x+1)^{-1} + \frac{1}{32}(x+1)^{-2}$$

■

Un truco para llegar al polinomio característico rápidamente es el siguiente:

Buscamos soluciones de $L(y) = 0$ de la forma

$$y = (ax + b)^m$$

En el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{rl} -8 \rightarrow & y = (x+1)^m \\ 3(1+x) \rightarrow & y' = m(x+1)^{m-1} \\ (1+x)^2 \rightarrow & y'' = m(m-1)(x+1)^{m-2} \\ (1+x)^3 \rightarrow & y''' = m(m-1)(m-2)(x+1)^{m-3} \end{array}$$

$$0 = (x+1)^m \left(m(m-1)(m-2) + m(m-1) + 3m - 8\right)$$

Se toma

$$m(m-1)(m-2) + m(m-1) + 3m - 8 = 0$$

que es el polinomio característico de la ecuación una vez hecho el cambio:

$$m^3 - 2m^2 + 4m - 8 = 0$$

con lo que sus raices son las raices del polinomio característico y podemos ahorrarnos toda la conversión de la ecuación.

TEMA 3

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1 Generación de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Definimos en primer lugar la **congruencia de curvas**. Dadas dos curvas

$$\left\{ \begin{array}{l} F\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0 \\ G\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0 \end{array} \right.$$

se dice que forman una congruencia si por cada punto (x_0, y_0, z_0) pasa sólo una curva de la congruencia. Se pueden escribir entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda=\varphi_1\left(x,y,z\right) \\ \mu=\varphi_2\left(x,y,z\right) \end{array} \right.$$

De forma más formal, se llama congruencia de curvas a una familia de curvas

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0 \\ g\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0 \end{array} \right.$$

que dependen de los parámetros λ y μ de forma que por cada punto del espacio pasa una sola curva de la familia, con lo que el sistema anterior determina λ y μ como funciones de x, y y z:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda=\varphi_1\left(x,y,z\right) \\ \mu=\varphi_2\left(x,y,z\right) \end{array} \right.$$

Si entre λ y μ se establece una relación de dependencia biunívoca

$$\psi\left(\lambda,\mu\right)=0$$

con ψ continua, la congruencia se reduce a un haz de curvas que dependen de un solo parámetro. Al variar éste de forma continua, las curvas engendran una superficie si se eliminan λ y μ:

$$\psi\left(\varphi_1\left(x,y,z\right),\varphi_2\left(x,y,z\right)\right)=0$$

En todas estas curvas se considera a x como la variable independiente, siendo y y z dependientes de x. Si se derivan las expresiones de λ y μ con respecto a x queda

$$\left\{ \begin{array}{l} 0=\varphi_{1x}'+\varphi_{1y}'\frac{dy}{dx}+\varphi_{1z}'\frac{dz}{dx} \\ \\ 0=\varphi_{2x}'+\varphi_{2y}'\frac{dy}{dx}+\varphi_{2z}'\frac{dz}{dx} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\varphi_{1x}'=\varphi_{1y}'\frac{dy}{dx}+\varphi_{1z}'\frac{dz}{dx} \\ \\ -\varphi_{2x}'=\varphi_{2y}'\frac{dy}{dx}+\varphi_{2z}'\frac{dz}{dx} \end{array} \right.$$

Podemos despejar las derivadas de y y z con respecto a x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left|\begin{array}{cc} -\varphi_{1x}' & \varphi_{1z}' \\ -\varphi_{2x}' & \varphi_{2z}' \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} \varphi_{1y}' & \varphi_{1z}' \\ \varphi_{2y}' & \varphi_{2z}' \end{array}\right|}=\frac{P\left(x,y,z\right)}{Q\left(x,y,z\right)}$$

y

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_{1y} & -\varphi'_{1x} \\ \varphi'_{2y} & -\varphi'_{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_{1y} & \varphi'_{1z} \\ \varphi'_{2y} & \varphi'_{2z} \end{vmatrix}} = \frac{R(x,y,z)}{Q(x,y,z)}$$

Esto se puede escribir de forma simétrica:

$$\frac{dy}{P} = \frac{dx}{Q} = \frac{dz}{R}$$

3.2 Sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden

Se define un **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden** como el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

El Problema de Valor Inicial estará formado por ese conjunto de ecuaciones y las condiciones iniciales siguientes

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \qquad \forall i = 1 : n$$

3.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones

- Si todas las f_i son continuas, $\forall i$ en un entorno de las condiciones iniciales, y
- existen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : n$, y están acotadas

  Entonces el Problema de Valor Inicial tiene solución única.

3.3 Sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

Las funciones f_i corresponden con ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_2(t) \end{cases}$$

Escrito en forma matricial

$$\overline{X}'(t) = A(t) \cdot \overline{X} + \overline{B}(t)$$

con

$$\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = \overline{X}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

y

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Se puede escribir una ecuación diferencial lineal de orden n como un sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$a_0(t)\, y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, y' + a_n(t)\, y = f(t)$$

con

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Si se hacen los cambios

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x_1 \\ y' = x_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = x_n \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{a_0(t)}\left(f(t) - a_n(t)\, x_1 - a_{n-1}(t)\, x_2 - \ldots - a_1(t)\, x_n\right) \end{array} \right.$$

3.4 Reducción a una sola ecuación diferencial de orden superior

Un sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver reduciéndolo a una sola ecuación diferencial de orden superior. Si se tienen f_i continuas tales que existen sus derivadas parciales con respecto a todos sus argumentos hasta el orden $n-1$ (y todas continuas), el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

se puede convertir en una ecuación diferencial, si escogemos una de sus variables, por ejemplo x_1 y calculamos sus derivadas sucesivas con respecto a t

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_1}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Con ello obtenemos un sistema de $n-1$ ecuaciones. Tendrá solución si

$$J = \frac{\partial(f_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0$$

En caso contrario, escogemos otra variable x_i y repetimos las derivadas.

Hallamos $x_2, x_3, \ldots, x_n$ como funciones de x_1 y sus derivadas para poder expresar

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n) = G\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right)$$

que es una ecuación diferencial de orden superior.

Ejemplo:

Dado el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$$

tomamos la variable x y el sistema nos queda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z = f_1 \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 4x + 2y - 2z = F_2 \end{cases}$$

Y su Jacobiano es distinto de cero:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

así que escribimos y y z en función de x y sus derivadas:

$$4z = 2\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 4x \Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + x$$

$$y = \frac{dx}{dt} - z = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} - x$$

Y la tercera derivada de x se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3} &= 4\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} \\ &= 4x^{'} + 2\left(2x - 2z\right) - 2\left(2x + 2y\right) \\ &= 4x^{'} - 4\left(z + y\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto nuestra ecuación de orden superior es

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0$$

con lo que la solución general es

$$x = \left(c_1t^2 + c_2t + c_3\right)$$

Derivamos la expresión

$$\begin{cases} x^{'} = 2c_1t + c_2 \\ x^{''} = 2c_1 \end{cases}$$

y las otras dos soluciones son

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}\left(2c_1t + c_2\right) - \frac{1}{4}\left(2c_1\right) + c_1t^2 + c_2t + c_3 \\ \\ y = 2c_1t + c_2 - z \end{cases}$$

■

3.5 Sistemas de orden superior

Estos sistemas son los que tienen las variables derivadas en un orden superior a 1:

$$\begin{cases} x_1^{(p_1)} = f_1\left(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(p_2-1)}, \ldots, x_k, x_k^{'}, \ldots, x_k^{(p_k-1)}\right) \\ x_2^{(p_2)} = f_2\left(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(p_2-1)}, \ldots, x_k, x_k^{'}, \ldots, x_k^{(p_k-1)}\right) \\ \vdots \\ x_k^{(p_k)} = f_k\left(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(p_2-1)}, \ldots, x_k, x_k^{'}, \ldots, x_k^{(p_k-1)}\right) \end{cases}$$

Para resolver estos sistemas haremos cambios de variables de forma que el sistema que quede sea de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, para el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} x_1^{''} = f_1\left(t, x_1, x_1^{'}, x_2, x_2^{'}\right) \\ \\ x_2^{''} = f_2\left(t, x_1, x_1^{'}, x_2, x_2^{'}\right) \end{cases}$$

se convierte en

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_3 \\ x_2^{'} = x_4 \\ x_3^{'} = f_1 (t, x_1, x_3, x_2, x_4) \\ x_4^{'} = f_2 (t, x_1, x_3, x_2, x_4) \end{cases}$$

que generará una ecuación diferencial de orden 4 al reducirla por el método anteriormente explicado.

3.6 Método operacional

3.6.1 Sistemas lineales con coeficientes constantes

Dado un sistema con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y variable independiente t, si dicho sistema es de ecuaciones lineales de coeficientes constantes, entonces se puede resolver mediante el **operador** D, que se define de la forma

$$D = \frac{d}{dt}$$

Así, el sistema al aplicar dicho operador se convierte en el siguiente

$$\begin{cases} P_{11} (D) x_1 + P_{12} (D) x_2 + \ldots + P_{1n} (D) x_n = f_1 (t) \\ P_{21} (D) x_1 + P_{22} (D) x_2 + \ldots + P_{2n} (D) x_n = f_2 (t) \\ \vdots \\ P_{n1} (D) x_1 + P_{n2} (D) x_2 + \ldots + P_{nn} (D) x_n = f_n (t) \end{cases}$$

Se denota el determinante del sistema como

$$\Delta (D) = |P_{ij} (D)|$$

El sistema se puede resolver mediante el método de Cramer, escribiéndose entonces las soluciones como

$$x_i = \frac{F_i (t)}{\Delta (D)}$$

donde

$$F_i (t) = \begin{vmatrix} P_{11} (D) & P_{12} (D) & \ldots & P_{1,i-1} (D) & f_1 (t) & P_{1,i+1} (D) & \ldots & P_{1n} (D) \\ P_{21} (D) & P_{22} (D) & \ldots & P_{2,i-1} (D) & f_2 (t) & P_{2,i+1} (D) & \ldots & P_{2n} (D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} (D) & P_{n2} (D) & \ldots & P_{n,i-1} (D) & f_n (t) & P_{n,i+1} (D) & \ldots & P_{nn} (D) \end{vmatrix}$$

Dado que son ecuaciones lineales, sus soluciones se pueden expresar como suma de una solución homogénea y una particular:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \tilde{x}_1 \\ x_2 = x_{20} + \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ x_n = x_{n0} + \tilde{x}_n \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1^{''} - 2x_1 - 3x_2 = e^{2t} \\ x_1 + x_2^{''} + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Se puede expresar, mediante el operador D, como

$$\begin{cases} \left(D^2 - 2\right) x_1 - 3x_2 = e^{2t} \\ x_1 + \left(D^2 + 2\right) x_2 = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$\begin{vmatrix} D^2 - 2 & -3 \\ 1 & D^2 + 2 \end{vmatrix} = D^4 - 1$$

Hallamos primero x_2 y luego despejamos $x_1 = -\left(D^2 + 2\right) x_2$:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} D^2 - 2 & e^{2t} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{D^4 - 1} = -\frac{e^{2t}}{D^4 - 1}$$

Formamos una ecuación diferencial con esta expresión:

$$\left(D^4 - 1\right) x_2 = -\, e^{2t}$$

y su solución general es

$$x_2 = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t - \frac{1}{15}\, e^{2t}$$

Una vez obtenido este valor, calculamos el de x_1:

$$x_1 = -\left(3c_1\, e^t + 3c_2\, e^{-t} + c_3 \cos t + 3c_4 \operatorname{sen} t - \frac{2}{5}\, e^{2t}\right)$$

■

Una forma rápida para resolver sistemas lineales de coeficientes constantes es usar el **método de eliminación**, semejante al que se usa con sistemas de ecuaciones lineales algebraicas: se despeja una variable y se sustituye en otra ecuación. Es muy útil con sistemas pequeños.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x^{'} = 4x - 3y \\ y^{'} = 6x - 7y \end{cases}$$

Despejamos de la segunda ecuación la variable x y la derivamos, obteniendo

$$\begin{array}{c} x = \frac{1}{6}y^{'} + \frac{7}{6}y \\ x^{'} = \frac{1}{6}y^{''} + \frac{7}{6}y^{'} \end{array}$$

y sustituyéndola en la primera tenemos

$$\frac{1}{6}y^{''} + \frac{7}{6}y^{'} = 4\left(\frac{1}{6}y^{'} + \frac{7}{6}y\right) - 3y$$

que se simplifica a

$$y^{''} + 3y^{'} - 10y = 0$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden que se puede resolver como se vió en el tema anterior y su solución general es

$$y(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-5t}$$

Sustituyendo en la expresión de x:

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1\, e^{2t} + \frac{1}{3}c_2\, e^{-5t}$$

■

3.6.2 Método de las combinaciones integrables

Este método se usa en sistemas de ecuaciones no lineales.

Dado un sistema

$$\left\{\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right\}_{i=1:n}$$

una **combinación integrable** es una ecuación diferencial procedente del sistema y que se puede integrar con facilidad. Esto es, para el sistema de antes,

$$\frac{d}{dt}\phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \Rightarrow \phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 \text{ integral primera}$$

Tendremos que hallar n integrales primeras que sean linealmente independientes.

El sistema escrito en forma simétrica es

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{f_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)} = \frac{dx_2}{f_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)} &= dt \\ &= \frac{\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \ldots + \alpha_n dx_n + \alpha_{n+1} dt}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1}}\end{aligned}$$

con α_i constantes o variables.

Si escribimos las k integrales primeras

$$\begin{cases} \phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 \\ \phi_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_2 \\ \vdots \\ \phi_k\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_k \end{cases}$$

con $k < n$. El Jacobiano se escribe como

$$J = \frac{\partial\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\right)}{\partial\left(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}\right)}$$

siendo $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$ cualesquiera k valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si $J \neq 0$, se puede reducir el sistema a $n-k$ incógnitas. En caso contrario, la solución del sistema serán las k integrales primeras.

Ejemplo:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{y-x}$$

Escribimos el sistema operando las fracciones en cruz:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z} = f_1 \\ \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{y-z} = f_2 \end{cases}$$

Para obtener las condiciones integrables:

$$\frac{dx+dy}{y-z+z-x} = \frac{d\left(x+y\right)}{y-x} = \frac{dz}{y-x} \to d\left(x+y\right) = dz$$

por lo que la primera condición integrable es

$$\phi_1 : x + y + c_1 = z$$

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x}; \ \frac{dx}{y-\left(x+y+c_1\right)} = \frac{dy}{\left(x+y+c_1\right)-x}$$

$$\frac{dx}{-(x+c_1)} = \frac{dy}{y+c_1} \Rightarrow \ln(y+c_1) + \ln(x+c_1) = \ln c_2$$

con lo que queda la segunda condición integrable

$$\phi_2 : (y+c_1)(x+c_1) = c_2$$

Sustituyendo el valor de c_1 en esta última condición podemos obtener la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+c_1 = z \\ (z-x)(z-y) = c_2 \end{cases}$$

■

Ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

Reescribimos el sistema

$$\frac{dx}{y} = dt = \frac{(dy)\,x}{y^2}$$

Y hallamos sus condiciones integrables

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \phi : \ln x = \ln y + c_1$$

$$\frac{dx}{x} = c_1 dt \Rightarrow \ln x - \ln c_2 = c_1 t$$

$$\frac{x}{c_2} = e^{c_1 t}$$

■

3.7 Resolución matricial

3.7.1 Nociones de análisis matricial

Definimos una **matriz funcional** como

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = (a_{ij}(t))$$

Y se dice que la matriz es **derivable** si $a_{ij}(t)$ lo son, y se denota la derivada como

$$A^{'}(t) = \left(a_{ij}^{'}(t)\right)$$

La derivación es lineal. Dadas dos matrices derivables $A(t) = (a_{ij}(t))$ y $B(t) = (b_{ij}(t))$ y dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

a) $(\alpha A(t) + \beta B(t))^{'} = \alpha A^{'}(t) + \beta B^{'}(t)$

b) $\left(A\left(t\right)\cdot B\left(t\right)\right)^{'}=A^{'}\left(t\right)\cdot B\left(t\right)+A\left(t\right)\cdot B^{'}\left(t\right)$

Se dice que $A\left(t\right)$ es integrable en $[a,b]$ si $a_{ij}\left(t\right)$ son integrables en $[a,b]$, $\forall i,j$. La integral se define como

$$\int_a^b A\left(t\right)dt=\left(\int_a^b a_{ij}\left(t\right)dt\right)$$

También es un operador lineal.

La **exponencial** de una matriz de tamaño $n\times m$ no es tan sencilla como

$$e^{A(t)}=\left(e^{a_{ij}(t)}\right)$$

para empezar porque la igualdad $e^{(0)}=I$ no se cumple, ya que

$$e^{(0)}=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\neq I$$

En su lugar, se define la exponencial de una matriz funcional como

$$e^{A(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

La **norma** de la matriz $A\left(t\right)$ de tamaño $n\times m$ es

$$\|A\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\left(t\right)\right|$$

y tiene las siguientes propiedades:

a) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

b) $\|A\cdot B\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$

c) $\|\alpha\cdot A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$

Teorema 3.1. *Dados* $\{c_1,c_2\dots,c_k,\dots\}$, $c_k=\left(c_{ij}^k\right)$ *y* $\|c_k\|=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\left|c_{ij}^k\right|$.

Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|c_k\|$ *converge, entonces también converge* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$.

Llevado a matrices funcionales, deducimos que si $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|$ *converge, entonces* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=e^{A(t)}$ *también converge.*

Se puede expresar una ecuación diferencial en forma matricial:

$$\phi^{'}\left(t\right)=A\cdot\phi\left(t\right)$$

Teorema 3.2. *Para todo* $t\in\mathbb{R}$, e^{At} *es solución de* $\phi^{'}\left(t\right)=A\cdot\phi\left(t\right)$.

Teorema 3.3 (Teorema de Existencia y Unicidad). *Dadas dos matrices funcionales* A *y* B *de tamaño* $n\times n$*, se expresa el problema de valor inicial matricialmente como*

$$\begin{cases}F^{'}\left(t\right)=A\cdot F\left(t\right)\\F\left(0\right)=B\end{cases}$$

que es una forma de expresar un sistema de ecuaciones diferenciales.

Este sistema tiene una única solución para todo t *que es*

$$F\left(t\right)=e^{At}\cdot F\left(0\right)=e^{At}\cdot B$$

Teorema 3.4. *Dadas dos matrices funcionales* A *y* B *de tamaño* $n\times n$*, si* $A\cdot B=B\cdot A$ *(son permutables), entonces se cumple*

a) $B\cdot e^{At}=e^{At}\cdot B$

b) $e^{A+B}=e^A\cdot e^B$

3.7.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y coeficientes constantes

Estos son sistemas del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + q_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + q_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + q_n(t) \end{cases}$$

Siendo las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(a) = b_1 \\ x_2(a) = b_2 \\ \vdots \\ x_n(a) = b_n \end{cases}$$

Se puede expresar el sistema de forma matricial

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) + Q(t) \\ X(a) = B \end{cases}$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La resolución de este tipo de sistemas consiste en dos pasos:

1. Resolver la primera ecuación matricial del sistema como ecuación diferencial
2. Calcular el valor de e^{At} que aparece en la solución que hemos hallado

El primer paso comienza con usar un factor integrante:

$$\mu = e^{-\int A dt} = e^{-At}$$

con lo que la ecuación matricial queda

$$e^{-At} \cdot \left(X'(t) - A \cdot X(t)\right) = e^{-At} \cdot Q(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At} \cdot X(t)\right) = e^{-At} \cdot Q(t)$$

Integrando

$$\left[e^{-At'} \cdot X\left(t'\right)\right]_{t'=a}^{t} = \int_a^t e^{-At'} \cdot Q\left(t'\right) dt'$$

$$e^{-At} \cdot X(t) - e^{-Aa} \cdot X(a) = \int_a^t e^{-At'} \cdot Q\left(t'\right) dt'$$

($t^{'}$ no denota una derivada, sino una variable diferente a t). La solución por tanto queda

$$X(t) = e^{(t-a)A} \cdot X(a) + e^{At} \cdot \int_a^t e^{-At^{'}} \cdot Q\left(t^{'}\right) dt^{'}$$

donde

$$X_0 = e^{(t-a)A} \cdot X(a)$$

es la solución de la homogénea asociada.

Ahora se nos presenta el problema de calcular e^{At} partiendo de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. El valor de la exponencial siempre es

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k$$

y hay varias formas de calcularlo según la forma de A.

A es diagonal

En este caso la matriz tiene de componentes en la diagonal principal $d_1, d_2, \ldots, d_n$ y el resto son cero. Por tanto, $A^k = diag\left(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k\right)$. El cálculo de la exponencial se reduce por tanto a

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} diag\left(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k\right) \\
&= diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} d_1^k, \sum_{k=0}^{\infty} d_2^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} d_n^k\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{d_n^t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A es diagonalizable

Si una matriz es diagonalizable, entonces existe una matriz P (matriz de paso) tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ con D una matriz diagonal. Las componentes de D son los autovalores de A. Como podemos escribir $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, entonces se puede expresar la exponencial como

$$e^{At} = e^{P \cdot D \cdot P^{-1} t}$$

El desarrollo es

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} P \cdot D^k \cdot P^{-1}\right) \\
&= P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} D^k\right) \cdot P^{-1} \\
&= P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1}
\end{aligned}$$

con lo que la exponencial queda, siendo λ_i los autovalores de A,

$$e^{At} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema $X^{'}(t) = A \cdot X(t)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución será de la forma

$$X = e^{(t-a)A} \cdot X(a) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calculamos los autovalores de A:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Ahora tenemos que calcular la matriz de paso, partiendo de $A \cdot P = P \cdot D$, y construyendo una matriz genérica:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Tras resolver el sistema obtenemos

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -1 \quad d = 1$$

Con lo que la matriz P y su inversa son

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La exponencial queda

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\,e^{6t} + e^{t} & 4\,e^{6t} - 4\,e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4\,e^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la solución es

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8\,e^{6t} - 3\,e^{t} \\ 2\,e^{6t} + 3\,e^{t} \end{pmatrix}$$

■

Aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton

Este teorema dice que toda matriz es raiz de su polinomio característico.

$$f(\lambda) = 0 = |A - \lambda I| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$$

Entonces

$$f(A) = A^n + c_n A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I = 0$$

Y el valor de A^n se puede expresar como combinación lineal de $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$. Entonces, la expresión de la exponencial se puede escribir como

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, A^{k-1}$$

Método de Putzer

Se puede aplicar a matrices diagonalizables y no diagonalizables. Hemos visto en el método anterior que la potencia enésima de una matriz A se puede expresar como combinación lineal de las potencias inferiores, $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$, por lo que puede expresarse e^{At} como un polinomio en A

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) A^k$$

Putzer desarrolló dos métodos para expresar e^{At} como un polinomio en A, pero de forma útil. Con el siguiente teorema se explica el más sencillo de los métodos.

Teorema 3.5. *Dados λ_1, λ_2, ..., λ_n, autovalores de una matriz A de tamaño $n \times n$ y definiendo una sucesión de polinomios en A*

$$P_0(A) = I$$
$$P_m(A) = \prod_{k=1}^{m} (A - \lambda_k I) \qquad m = 1 : n$$

entonces

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A)$$

donde los coeficientes $r_i(t)$ se determinan por recurrencia a partir del sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \quad r_1(0) = 1$$
$$r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t) \qquad r_{k+1}(0) = 0, \quad k = 1 : n-1$$

Demostración. Si definimos la matriz funcional F,

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(t) P_{k-1}(A)$$

donde se puede ver que $F(0) = r_1(0) P_0(A) = I$. Para demostrar que $F(t) = e^{At}$, probaremos que F satisface la misma ecuación diferencial que e^{At}, $F'(t) = A \cdot F(t)$. Si derivamos la expresión anterior de $F(t)$ y usamos las fórmulas de recurrencia vistas en la demostración, obtenemos

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} (r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)) P_k(A)$$

donde se define $r_0(t) = 0$.

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A)$$

Si restamos $\lambda_n F(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(A)$

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) (P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A))$$

donde

$$P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A)$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) \\
&= (A - \lambda_n I) P_k(A)
\end{aligned}
$$

con lo que obtenemos

$$
\begin{aligned}
F'(t) - \lambda_n F(t) &= (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) \\
&= (A - \lambda_n I)(A - \lambda_n I)(F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)) \\
&= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A)
\end{aligned}
$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, $P_n(A) = 0$, por tanto

$$
F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I) F(t) = AF(t) - \lambda_n F(t)
$$

Resultando finalmente

$$
F'(t) = A \cdot F(t)
$$

por el teorema de Existencia y Unicidad 3.3, se demuestra que $F(t) = e^{At}$ ya que $F(0) = I$. □

Ejemplo:

Dada la matriz

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}
$$

calcular e^{At}.

Primero calculamos los autovalores de la matriz,

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 (4 - \lambda) + 2 - 5\lambda \\
&= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2
$$

Para que una matriz sea diagonalizable, el rango de $A - I$ debe ser igual al orden menos el orden de multiplicidad, y mientras que el rango para $\lambda = 1$ es 2, el orden (3) menos la multiplicidad (2) es 1, por lo que la matriz no es diagonalizable y tenemos que aplicar el método de Putzer.

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=1}^{n} r_k(t) P_{k-1}(A) \\
&= r_1(t) P_0(A) + r_2(t) P_1(A) + r_3(t) P_2(A)
\end{aligned}
$$

siendo los polinomios

$$
P_0(A) = I
$$

$$
P_1(A) = A - I
$$

$$
P_2(A) = (A - I)^2
$$

y los coeficientes: $r_1(t)$

$$\left.\begin{array}{l} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \\ r_1(0) = 1 \end{array}\right\} r_1(t) = e^t$$

$r_2(t)$

$$\left.\begin{array}{l} r_2'(t) = \lambda_2 r_2(t) + r_1(t) \\ r_2(0) = 0 \end{array}\right\} r_2(t) = t\, e^t$$

$r_3(t)$

$$\left.\begin{array}{l} r_3'(t) = \lambda_3 r_3(t) + r_2(t) \\ r_3(0) = 0 \end{array}\right\} r_3(t) = e^{2t} - (t-1)\, e^t$$

por lo que la exponencial es

$$e^{At} = e^t \left(I + t(A-I) - (t-1)(A-I)^2\right) + (A-I)^2 e^{2t}$$

■

TEMA 4

Transformada de Laplace

4.1 Introducción a las transformadas integrales

Se llama **transformada integral** a una expresión

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,s)\, f(x)\, dx$$

donde $k(x,s)$ es el **núcleo** de la transformada. Es el núcleo lo que nos permite distinguir los tipos de transformadas. Las dos transformadas más importantes que nos vamos a encontrar son las de Fourier y Laplace.

- La **transformada de Laplace** se obtiene para $k(x,s) = e^{-xs}$, y dentro de ella hay dos tipos:
  Transformada de Laplace bilateral

  $$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xs}\, f(x)\, dx$$

  definida para todo x;
  Transformada de Laplace unilateral

  $$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-xs}\, f(x)\, dx = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

  definida sólo para $x > 0$.

- La **transformada de Fourier** se obtiene para $k(x,s) = e^{-ixs}$

  $$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs}\, f(x)\, dx$$

  Como podemos expresar la exponencial en forma trigonométrica, $e^{-ixs} = \cos xs - i \operatorname{sen} xs$, podemos obtener las transformadas en coseno y en seno:
  - Transformada en coseno:

  $$\mathcal{F}_C\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} \cos(xs)\, f(x)\, dx$$

  - **Transformada en seno**:

  $$\mathcal{F}_S\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(xs)\, f(x)\, dx$$

  Podemos relacionar ambas transformadas de la siguiente forma:

  $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-xs}\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rx}\, e^{-itx}\, f(x)\, dx \\ &= \mathcal{F}\left\{e^{-rx}\, f(x)\right\}\end{aligned}$$

  ya que $s = r + it$.

4.2 Transformada de Laplace

Se define la **transformada de Laplace** de $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-ts} f(t)\, dt = F(s)$$

Siempre que la integral converja uniformemente para algún valor de s.

Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una **función continua a trozos** si existe una partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b\}$$

de forma que f es continua en (x_{j-1}, x_j), $\forall j = 1 : n$ y además existen $f\left(x_j^+\right)$ y $f\left(x_j^-\right)$

Se dice que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es de **orden exponencial** σ si

$$\exists M, N > 0 / |f(t)| < M \cdot e^{\sigma t}, \quad \forall t > N$$

4.3 Teorema de existencia de Transformada de Laplace

Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos en $[0, N]$ con $N > 0$ y de orden exponencial σ, existe una única transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-ts} f(t)\, dt$$

porque converge uniformemente $\forall s > \sigma$.

Demostración. La demostración se reduce a determinar si la integral converge para algún valor de s.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \underbrace{\int_0^N e^{-st} f(t)\, dt}_{\text{Converge } \forall s} + \int_N^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

La segunda integral podemos acotarla:

$$\begin{aligned}
\left|\int_N^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| \leq \int_N^\infty \left|e^{-st}\right| |f(t)|\, dt &\leq \int_N^\infty e^{-st} M\, e^{\sigma t} \\
&\leq M \int_0^\infty e^{(\sigma - s)t}\, dt \\
&= M \left[\frac{e^{(\sigma-s)t}}{\sigma - s}\right]_0^\infty \\
&= \frac{M}{\sigma - s} \lim_{t\to\infty} \left(e^{(\sigma-s)t} - 1\right) \\
&= \begin{cases} \sigma - s > 0 \Rightarrow \text{Diverge} \\ \sigma - s < 0 \Rightarrow \text{Converge a } \frac{M}{s-\sigma} \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $\sigma = s$ la integral

$$\int_0^\infty dt$$

diverge. Por tanto, queda demostrado que existe la transformada de Laplace para cualquier $s > \sigma$. □

4.4 Transformadas elementales de Laplace

Vamos a calcular las transformadas de algunas funciones típicas aplicando la definición.

$f(t) = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1\right) \\
&= \begin{cases} s \le 0 \Rightarrow \infty \\ s > 0 \Rightarrow \frac{1}{s} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0$$

$f(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\,dt &= \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} - 1\right) \\
&= \begin{cases} a \ge s \Rightarrow \infty \\ a < s \Rightarrow \frac{1}{s-a} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a$$

$f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n\, e^{-st}\,dt$$

La integral se resuelve por partes:

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^\infty e^{-st}\,dt &= \left[\frac{t^n\, e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1}dt \\
&= \frac{n}{s} I_{n-1} + \overbrace{\lim_{t\to\infty} t^n\, e^{-st}}^{s>0\Rightarrow=0} \\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s} I_{n-2} = \ldots = \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 2}{s^{n-1}}\frac{1}{s} I_0 \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall s > 0$$

$f(t) = e^{iat}$

La transformada de esta función nos sirve para obtener la transformada de las funciones seno y coseno. Dado que es una exponencial,

$$\mathcal{L}\left\{e^{iat}\right\} = \frac{1}{s-ia}, \quad \forall\, |s| > |a|$$

Y usando la igualdad de Euler

$$e^{iat} = \cos at + i \operatorname{sen} at$$

Como demostraremos más tarde, el operador transformada de Laplace es lineal, con lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos at + i \operatorname{sen} at\} = \mathcal{L}\{\cos at\} + i\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} &= \frac{1}{s-ia} \\
&= \frac{s+ia}{s^2+a^2} \\
&= \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Se pueden despejar las transformadas del seno y el coseno

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

ambas para $|s| > |a|$

Las transformadas de las funciones trigonométricas hiperbólicas se pueden obtener de forma parecida usando las identidades

$$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$$

$$\operatorname{senh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$

Se obtiene

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Función $f(t)$	Transformada $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Tabla 4.1: Transformadas elementales de Laplace

4.5 Propiedades de la Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace tiene algunas propiedades heredadas de su naturaleza integral, que nos sirven para diferentes propósitos como pueden ser el cálculo de integrales impropias, resolución de ecuaciones diferenciales, etc. Veámoslas:

1. **Linealidad**. La Transformada de Laplace es un operador lineal. Dadas dos transformadas $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ y dos constantes a y b, se cumple

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Demostración. Desarrollando la expresión en integrales:

$$\int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))\,dt = a\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}\cdot g(t)\,dt$$

□

2. **Cambios de escala**. Si se multiplica la variable independiente de una función por una constante b, en la Transformada de Laplace correspondiente se ve afectada de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}\{f(b\cdot t)\} = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right) = \frac{1}{b}\,\mathcal{L}\{f(t)\}_{\left(\frac{s}{b}\right)}$$

Demostración. Si tenemos la expresión de la transformada

$$\mathcal{L}\{f(b\cdot t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(b\cdot t)\,dt$$

con hacer el cambio $bt = z$, $dt = \frac{1}{b}dz$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(b\cdot t)\} = \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-sz/b} f(z)\,dz = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)$$

□

3. **Traslación**. Hay dos tipos de traslaciones: en la función y en la transformada. El primer caso es el siguiente:

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

esta función se puede escribir en función del escalón:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

$$g(t) = f(t-a)\cdot u(t-a)$$

con lo que su transformada es

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Demostración. La integral de la transformada nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\ &= \int_0^a e^{-st}\cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt \end{aligned}$$

y con el cambio $t - a = z$, $dt = dz$, el intervalo de integración es $t = a \Rightarrow z = 0$, $t \to \infty \Rightarrow z \to \infty$, con lo que la integral es

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sz} f(z)\,dz = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(z)\} = e^{-as}F(s)$$

con lo que queda demostrado. □

4. **Transformada de las derivadas**. Dadas las Transformadas de Laplace de una función $f(t)$ y la de su derivada $f^{'}(t)$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad \mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\}$$

esta última es

$$\mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Además, la Transformada de Laplace de las derivadas sucesivas es

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f^{'}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Demostración. Empezamos por demostrarlo para la primera derivada:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{'}(t)\,dt &= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}^{\mathcal{L}\{f(t)\}} \\
&= sF(s) + \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) - f(0) \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

ya que $f(t)$ está acotada y $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$.
Para las derivadas sucesivas es muy fácil:

$$\mathcal{L}\left\{f^{''}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} - f^{'}(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f^{'}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{'''}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f^{''}(t)\right\} - f^{''}(0) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf^{'}(0) - f^{''}(0)$$

etcétera. □

5. **Transformada de la integral**. Dada una función $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, si se define la función g como

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

entonces se puede expresar la Transformada de Laplace de la función g como

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Demostración. La derivada de $g(t)$ es $g^{'}(t) = f(t)$, y su transformada es $\mathcal{L}\left\{g^{'}(t)\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Además, podemos expresar la Transformada de la función derivada como

$$\mathcal{L}\left\{g^{'}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

Por otro lado, $g(0) = 0$, ya que $g(0) = \int_0^0 f(\tau)\,d\tau$, con lo que se puede escribir

$$\mathcal{L}\left\{g^{'}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$$

y si se despeja $\mathcal{L}\{g(t)\}$, se obtiene el resultado esperado:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

□

6. **Multiplicación por potencias de** t. Dada una función $f(t)$ y su Transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, se verifica que la Transformada de la función multiplicada por una potencia de t es

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Demostración. Vamos a demostrar esa expresión por inducción, por lo que empezamos con $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F^{'}(s)$$

Aplicando la definición de la Transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\, dt$$

Si derivamos esta expresión con respecto a la variable s, obtenemos

$$F^{'}(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\, dt = -\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$$

con lo que se verifica para $n = 1$. Si suponemos que para un cierto k se cumple

$$\mathcal{L}\left\{t^k \cdot f(t)\right\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

verificamos que se cumple para $k + 1$:

$$\mathcal{L}\left\{t^{k+1} \cdot f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{k+1} f(t)\, dt$$

Si derivamos la expresión para k, tenemos

$$-\int_0^\infty e^{-st}\, t t^k f(t)\, dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s) = -\mathcal{L}\left\{t^{k+1} \cdot f(t)\right\}$$

Como queríamos demostrar. □

7. **División por** t. Dada una función $f(t)$ y su Transformada de Laplace, $F(s)$, si existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$$

entonces existe la Transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}\, du$$

Demostración. Si escribimos la función $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, podemos usar la propiedad anteriormente demostrada para expresar

$$\mathcal{L}\{t \cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Entonces podemos escribir

$$-\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_A^s F(u)\, du \Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_s^A F(u)\, du$$

Si hacemos el límite cuando s tiende a infinito, podemos ver que A vale infinito:

$$0 = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_\infty^A F(u)\, du \Rightarrow A = \infty$$

ya que siempre se cumple que

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st}\, g(t)\, dt = 0$$

Así que queda demostrado que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_s^\infty F(u)\, du$$

□

Ejemplo: Resolver la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Esto se puede escribir como

$$\int_0^\infty e^{-0x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{s \to 0} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{s \to 0} \mathcal{L}\left\{ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right\}$$

Verificamos que podemos aplicar la última propiedad

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Y procedemos a calcularla

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0} \int_s^\infty \mathcal{L}\{\operatorname{sen} x\} du &= \lim_{s \to 0} \int_s^\infty \frac{du}{1+u^2} \\ &= \lim_{s \to 0} [\operatorname{arctg} u]_s^\infty \\ &= \lim_{s \to 0} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

8. **Transformada de una función periódica.** Si $f(t) = f(t + n \cdot T)$ entonces se dice que $f(t)$ es periódica de periodo T, y su transformada se puede escribir como

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t)\, dt + \int_T^{2T} \ldots + \ldots + \int_{nT}^{(n+1)T} \ldots \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} \cdot f(t)\, dt \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $t - nT = z$, se queda

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(z+nT)} \cdot f(z+nT)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \cdot \int_0^\infty e^{-sz} \cdot f(z)\, dz \end{aligned}$$

Por tanto, como $e^{-sT} = \frac{1}{e^{sT}} < 1$, la serie converge y

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-sz} \cdot f(z)\, dz$$

4.6 Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

Dadas una función $f(t)$ y su Transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, se verifican los siguientes teoremas.

Teorema 4.1 (Teorema del Valor Inicial).

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

Teorema 4.2 (Teorema del Valor Final).

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

Demostración. Partiendo de que existe la transformada de la derivada de $f(t)$,

$$\mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f^{'}(t)\,dt = sF(s) - f(0)$$

Para el teorema de valor inicial se tiene

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

y para el teorema de valor final

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0) = \int_0^{\infty} f^{'}(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) \Rightarrow \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

□

4.7 Transformada inversa de Laplace

4.7.1 Definición

Si $f(t)$ es continua a trozos y de orden exponencial σ, entonces existe la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

donde al operador $\mathcal{L}$ se le llama **operador directo de Laplace**. Además, se cumple que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ donde a $\mathcal{L}^{-1}$ se le llama **operador inverso de Laplace**.

Ejemplo:

Dada la transformación

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\} = \frac{4}{s^2+16}$$

se cumple entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \operatorname{sen} 4t$$

■

El operador inverso de Laplace hereda todas las **propiedades** que hemos visto para el operador directo, con la salvedad que la transformada de la derivada exige $f(0) = 0$.

Además, la transformada inversa de Laplace no es única, ya que para funciones que sean iguales en todo el eje real salvo en determinados puntos aislados, su transformada es idéntica.

Ejemplo:

Dadas las funciones

$$f_1(t) = e^{kt} \to \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \frac{1}{s-k}$$

y

$$f_2(t) = \begin{cases} e^{kt} & t \neq 2 \\ 1 & t = 2 \end{cases} \to \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \frac{1}{s-k}$$

Aunque las funciones son distintas, sus Transformadas de Laplace coinciden. Podemos reflejar la diferencia entre ambas funciones definiendo la **función nula**, de la siguiente forma:

$$f_2(t) = f_1(t) + N(t)$$

que cumple

$$\int_0^t N(t)\,dt = 0$$

Para el ejemplo que vemos es

$$N(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 2 \\ 1 - e^{kt} & t = 2 \end{cases}$$

■

4.7.2 Cálculo de transformadas inversas

Las transformadas inversas se pueden calcular usando las tablas de transformadas directas que vimos anteriormente, pero si encontramos una transformada que no esté en la tabla, podemos descomponer dicha transformada en suma de fracciones simples que se parezcan a las que ya conocemos. Si expresamos una función transformada

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

y el grado de $N(s)$ es menor que el de $D(s)$, podemos expresarlo como

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - s_n}$$

para raices de $D(s)$ tanto reales como complejas. Si, por contra, el grado de $D(s)$ es menor que el de $N(s)$, dividimos y nos quedará una fracción del caso anterior.

Los a_i son los residuos asociados a las raices, y se calculan de la forma

$$a_i = \left.\frac{N(s)}{D(s)}(s - s_i)\right|_{s=s_i}$$

Si tenemos dos raices complejas conjugadas, por ejemplo s_1 y s_2, se cumple que $a_1 = \overline{a_2}$.

4.8 Propiedad de convolución

Dadas dos funciones transformadas $F(s)$ y $G(s)$, si existen sus transformadas inversas $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, entonces existe

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du = f * g$$

donde a $*$ se le llama **producto de convolución**. Este producto es conmutativo y asociativo.

Demostración. Conocemos las funciones transformadas $F(s)$ y $G(s)$:

$$\begin{cases} F(s) = \int_0^\infty e^{-sw} f(w)\,dw \\ G(s) = \int_0^\infty e^{-sz} g(z)\,dz \end{cases}$$

Con lo que nos basta demostrar que $F(s)\,G(s)$ es

$$\begin{aligned} F(s)\,G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-sw} f(w)\,dw\right)\left(\int_0^\infty e^{-sz} g(z)\,dz\right) \quad (1) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} &= \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du \end{aligned}$$

$$(1) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+z)}\, f(w)\, g(z)\, dwdz$$

con el cambio $w = u$, $z = t - u$, el Jacobiano de la transformación vale 1, y

$$\begin{aligned}
(1) = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}\, f(u)\, g(t-u)\, dudt &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \right) dt \\
&= \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \right\} \\
&= F(s)\, G(s)
\end{aligned}$$

Con lo que, si existe la transformada inversa del producto $F(s)\, G(s)$, ésta es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\, G(s)\} = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

□

Ejemplo:

Del problema 41.d), resolver la Transformada Inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+5)} \right\}$$

La vamos a resolver por 3 procedimientos, viendo las ventajas y desventajas de cada uno.

Primer procedimiento: Convolución. Si aplicamos la propiedad de convolución,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+5)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{s+5} \right\} \\
&= \int_0^t e^{-5u}\, du \\
&= \frac{e^{-st} - 1}{-5} \\
&= \frac{1}{5} - \frac{e^{-5t}}{5}
\end{aligned}$$

Segundo procedimiento: descomponer en fracciones simples.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} \right\} &= A\, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} + B\, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+5} \right\} \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5t}
\end{aligned}$$

al resolver el sistema obtenemos $A = 1/5$ y $B = -1/5$.

Tercer procedimiento: aplicando la propiedad de división por s:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{s+5}}{s} \right\} &= \int_0^t e^{-5u}\, du \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5t}
\end{aligned}$$

Vemos que la más inmediata es la tercera, ya que directamente escribimos la integral. Sin embargo, si la función transformada hubiera sido $\frac{1}{s^8(s+5)}$, habría sido más rápido usar la convolución ya que sólo tenemos que integral una vez y no 8 (aunque hay que integrar por partes). Y hacerla por descomposición en fracciones simples es todavía peor ya que hay que calcular 9 constantes. ■

Ejemplo:

Del problema 47.b)

Hallar $x(t)$ en la siguiente ecuación diferencial integral

$$x(t) = 7\sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}t + 4\int_0^t \cos 2(t-u)\,x(u)\,du$$

Usando la propiedad de convolución,

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= 7\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{s^2+3} + 4\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 2(t-u)\,x(u)\,du\right\} \\ &= \frac{21}{s^2+3} + 4\left(\frac{s}{s^2+4}X(s)\right) \end{aligned}$$

Despejamos $X(s)$

$$X(s)\left(1 - \frac{4s}{s^2+4}\right) = \frac{21}{s^2+3} \Rightarrow X(s) = \frac{21\left(s^2+4\right)}{\left(s^2+3\right)\left(s^2-4s+4\right)}$$

Descomponemos en fracciones simples para hallar la transformada inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{21\left(s^2+4\right)}{\left(s^2+3\right)(s-2)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2}\right\} \\ &= A\cos\sqrt{3}t + B\frac{\operatorname{sen}\sqrt{3}t}{\sqrt{3}} + Ct\,e^{2t} + D\,e^{2t} \end{aligned}$$

y sólo faltaría calcular las constantes. ■

Ejemplo:

Del problema 40.a)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^t \frac{e^u \cos u}{u\,e^{3t}}du\right)dt &= \int_0^\infty e^{-3t}\left(\int_0^t \frac{e^u\cos u}{u}du\right)dt \\ &= \lim_{s\to 3}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^u\cos u}{u}du\right\} \\ &= \lim_{s\to 3}\frac{\mathcal{L}\left\{\frac{e^u\cos u}{u}\right\}}{s} \end{aligned}$$

Si recordamos la propiedad de división por t, tenía que existir $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$, y en este caso

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u\cos u}{u} = \infty$$

así que como no existe el límite, no existe la Transformada de Laplace de la función. ■

TEMA 5

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden

5.1 Ecuaciones diferenciales totales

5.1.1 Definición e integrabilidad

Definición: Una Ecuación Diferencial Total, en $\mathbb{R}^3$, es una ecuación de la forma

$$P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy+R\left(x,y,z\right)dz=0 \tag{5.1}$$

donde P, Q y R son campos escalares derivables. Se puede decir también que el campo vectorial $\vec{F}=\left(P\left(x,y,z\right),Q\left(x,y,z\right),R\left(x,y,z\right)\right)$ es derivable con respecto a todos sus argumentos. A esta ecuación se la llama **ecuación diferencial de Pfaff**.

Se dice que una ecuación diferencial total es **integrable** (tiene solución) si existe un factor $\mu=\mu\left(x,y,z\right)$ derivable, llamado **factor integrante**, tal que al multiplicar la ecuación diferencial de Pfaff por μ, se convierte en una forma diferencial exacta.

$$\mu\left(x,y,z\right)P\left(x,y,z\right)dx+\mu\left(x,y,z\right)Q\left(x,y,z\right)dy+\mu\left(x,y,z\right)R\left(x,y,z\right)dz=0$$

O, expresado de otra forma, $\mu\vec{F}$ es campo gradiente.

En ese caso, existe una función U llamada *función potencial* diferenciable tal que $\nabla U=\mu\vec{F}$.

Si $dU\left(x,y,z\right)=0$, entonces la solución es $U\left(x,y,z\right)=c_1$.

Lema. *Dado un campo $\vec{F}=\left(P,Q,R\right)$ derivable y un factor integrante derivable $\mu\left(x,y,z\right)$, se verifica siempre que si $\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\neq 0$ entonces $\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right)\neq 0$, y si $\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)=0$ entonces $\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right)=0$*

Demostración. Desarrollando la expresión para $\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right)$,

$$\begin{aligned}
\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu P & \mu Q & \mu R \end{vmatrix}\cdot\mu\vec{F} \\
&= \left(\mu P,\mu Q,\mu R\right)\left(\frac{\partial\left(\mu R\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\mu Q\right)}{\partial z},\frac{\partial\left(\mu P\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\mu R\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\mu Q\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\mu P\right)}{\partial y}\right) \\
&= \mu P\left(\mu'_y R+\mu R'_y-\mu'_z Q-\mu Q'_z\right)+\mu Q\left(\mu'_z P+\mu P'_z-\mu'_x R-\mu R'_x\right)+\mu R\left(\mu'_x Q+\mu Q'_x-\mu'_y P-\mu P'_y\right) \\
&= \mu^2 P\left(R'_y-Q'_z\right)+\mu^2 Q\left(P'_z-R'_x\right)+\mu^2 R\left(Q'_x-P'_z\right)+ \\
&\quad +\mu\underbrace{\left(\mu'_y PR-\mu'_z QP+\mu'_z PQ-\mu'_x QR+\mu'_x RQ-\mu'_y PR\right)}_{0} \\
&= \mu^2\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. *La condición necesaria y suficiente de integrabilidad de las ecuaciones diferenciales totales es*

$$\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$$

Demostración. Para la **condición necesaria**, partimos de que la ecuación de Pfaff es integrable. Queremos llegar a que $\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$. Por la definición anterior, existe un factor integrante derivable $\mu(x,y,z)$ y existe una función $U(x,y,z)$ función potencial diferenciable de forma que $\nabla U = \mu \vec{F}$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (\mu P, \mu Q, \mu R)$$

Por el lema que demostramos antes,

$$\mu\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right) = \mu^2\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \nabla U \cdot \operatorname{rot}(\nabla U)$$

Dado que un gradiente es irrotacional, $\operatorname{rot}(\nabla U) = 0$ y

$$\mu^2\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$$

Para la **condición suficiente**, suponemos que $\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$. Como primer paso, en la ecuación de Pfaff tomamos una variable, x, y o z, como parámetro. Por ejemplo, z, con lo que $dz = 0$.

Después obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy = 0$$

y al hallar su solución general queda

$$G(x,y,z) = c_1$$

Se cumple que

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = \mu P \\ \frac{\partial G}{\partial y} = \mu Q \end{cases}$$

En el segundo paso, z deja de ser parámetro. Volvemos a la ecuación de Pfaff que queremos ver si es integrable.

$$\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = 0$$

que se puede escribir

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \left(\mu R - \frac{\partial G}{\partial z}\right)dz = 0$$

hacemos $k = \mu R - \frac{\partial G}{\partial z}$ y queda

$$dG + k dz = 0$$

Si k se puede poner en función de G y z, la ecuación resultante es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Esto nos va a dar un método general para resolver las ecuaciones diferenciales totales.

Como por hipótesis $\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$, entonces también $\mu\vec{F} \cdot \operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right) = 0$. En este caso,

$$\begin{aligned}
\mu\vec{F} &= (\mu P, \mu Q, \mu R) \\
&= \left(\mu P, \mu Q, \frac{\partial G}{\partial z} + k\right) \\
&= \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} + k\right)
\end{aligned}$$

El rotacional es

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right) &= \operatorname{rot}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)+(0,0,k)\right)\\
&= \underbrace{\operatorname{rot}\left(\nabla G\right)}_{0}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & k\end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{\partial k}{\partial y},-\frac{\partial k}{\partial x},0\right)
\end{aligned}$$

Y el producto $\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right)$

$$\begin{aligned}
0=\mu\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\mu\vec{F}\right) &= \left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}+k\right)\left(\frac{\partial k}{\partial y},-\frac{\partial k}{\partial x},0\right)\\
&= \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial x}\\
&= \begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\\ \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y}\end{vmatrix}\\
&= \frac{J\left(G,k\right)}{J\left(x,y\right)}=0
\end{aligned}$$

Entre G y k existe una relación que no depende de x e y, ya que su Jacobiano es nulo. Entonces, $k=f\left(G,z\right)$. $\square$

5.1.2 Método general de resolución

Como hemos visto en la demostración anterior, existe un método general de resolución de ecuaciones diferenciales totales, que repetimos a continuación:

1. Hacemos una de las variables parámetro, por ejemplo z, con lo que

$$P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy=0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y su solución general es

$$G\left(x,y,z\right)=c_1$$

2. La variable deja de ser un parámetro, con lo que la ecuación diferencial total

$$\mu Pdx+\mu Qdy+\mu Rdz=0$$

la podemos escribir como

$$dG+\left(\mu R-\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz=0$$

y para que $\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)=0$,

$$k=\mu R-\frac{\partial G}{\partial z}=f\left(G,z\right)$$

Ejemplo:

$$\left(3xz+2y\right)dx+xdy+x^2dz=0$$

Tendríamos que comprobar en primer lugar que $\vec{F}\cdot\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)=0$, nos lo creemos.

1. Hacemos x parámetro: $dG + \left(\mu P + \frac{\partial G}{\partial x}\right) dx = 0$. La EDO de primer orden queda
$$xdy + x^2 dz = 0 \Rightarrow G(x, y, z) \equiv xy + x^2 z = c_1$$
con lo que
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial y} = \mu Q = x \\ \\ \frac{\partial G}{\partial z} = \mu R = x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \mu = 1$$
2. x deja de ser parámetro y
$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \left(\mu P - \frac{\partial G}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz = 0$$
$$\begin{aligned} k = f(G, x) &= \mu P - \frac{\partial G}{\partial x} \\ &= 3zx + 2y - (y + 2xz) \\ &= xz + y \end{aligned}$$
La ecuación diferencial ordinaria que nos queda es
$$dG + \frac{G}{x} dx = 0 \to \frac{dG}{G} + \frac{dx}{x} = 0$$
y su solución
$$\ln G + \ln x = \ln c_2 \to Gx = c_2$$
por lo que la solución de la ecuación diferencial total es
$$x\left(xy + x^2 z\right) = c_2$$

■

5.1.3 Casos especiales de ecuaciones diferenciales totales

Todas las variables están separadas

$$P(x) dx + Q(y) dy + R(z) dz = 0$$

En este caso, siempre se cumple la condición de integrabilidad, y la solución es

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy + \int R(z) dz = c_1$$

La ecuación diferencial total es diferencial exacta

En este caso, $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$, ya que la condición de forma diferencial exacta es

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Entonces, existe una función potencial $U : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $dU(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0$ con lo que la solución es $U(x, y, z) = c_1$.

La función potencial se calcula como ya se vió en la asignatura Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales I. Recordamos uno de los métodos:

Si definimos la función potencial como

$$U(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + f(y, z)$$

para calcular $f(y, z)$, derivamos la expresión anterior con respecto a y y z, y las igualamos a $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$, respectivamente. De estas dos ecuaciones que obtenemos calculamos la función $f(y, z)$.

La ecuación diferencial total tiene una sola variable separada

Si por ejemplo está separada la x, la ecuación tiene la forma

$$P(x)\,dx + Q(y,z)\,dy + R(y,z)\,dz = 0$$

si lo está la y,

$$P(x,z)\,dx + Q(y)\,dy + R(x,z)\,dz = 0$$

y si lo está la z

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(z)\,dz = 0$$

En este caso, la condición de integrabilidad se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot \mathrm{rot}\left(\vec{F}\right) &= (P(x,y), Q(x,y), R(z)) \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P(x,y) & Q(x,y) & R(z)\end{vmatrix} \\ &= P(x,y)\left(-\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y)\right) + Q(x,y)\cdot 0 + R(z)\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

Si $R(z) = 0$ lo que se tiene es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que no es un caso que nos interese.
Si $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ la forma sin la z es exacta, por lo que existe una función potencial $U(x,y)$ tal que $dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ y

$$dU(x,y) + R(z)\,dz = 0$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial total es

$$U(x,y) + \int R(z)\,dz = c_1$$

Se puede llevar a EDT con las variables x o y separadas de la misma forma.

Ejemplo:

$$(x-y)\,dx - xdy + zdz = 0$$

La z está separada, y la forma de (x,y) es diferencial exacta. La solución por tanto es

$$U(x,y) + \frac{z^2}{2} = c_1$$

Calculamos la función potencial

$$dU(x,y) = (x-y)\,dx - xdy = xdx - ydx - xdy = xdx - d(xy)$$

por tanto

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy$$

y la solución a la ecuación diferencial total es

$$\frac{x^2}{2} - xy + \frac{z^2}{2} = c_1$$

Se podía hacer de forma directa escribiendo

$$xdx - d(xy) + zdz = 0$$

■

Ecuaciones diferenciales totales homogéneas

Este método no reduce, complica la ecuación, pero puede que alguna vez en la vida nos sea útil. Diremos que la ecuación

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$$

es homogénea si P, Q y R son homogéneas del mismo grado, n:

$$\begin{cases} P(tx,ty,tz) = t^n P(x,y,z) \\ Q(tx,ty,tz) = t^n Q(x,y,z) \\ R(tx,ty,tz) = t^n R(x,y,z) \end{cases}$$

Se pueden hacer cambios de forma que quede una ecuación diferencial total con una de las variables separadas. Si el cambio es

$$\begin{cases} y = x\mu(x) \\ z = xv(x) \end{cases}$$

la variable separada es la x. Si hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = yu_1(y) \\ z = yu_2(y) \end{cases}$$

la separada es y, y si el cambio es

$$\begin{cases} x = zh_1(z) \\ y = zh_2(z) \end{cases}$$

entonces la variable separada es z.

Usaremos el primer cambio. Si diferenciamos y sustituimos

$$\begin{cases} y = x\mu \\ z = xv \end{cases} \quad \begin{cases} dy = \mu dx + x d\mu \\ dz = v dx + x dv \end{cases}$$

$$P(x,x\mu,xv)\,dx + Q(x,x\mu,xv)(\mu dx + x d\mu) + R(x,x\mu,xv)(v dx + x dv)$$

Como es homogénea de grado n, extraemos la x y queda

$$\begin{aligned} x^n P(1,\mu,v)\,dx + x^n Q(1,\mu,v)(\mu dx + x d\mu) + x^n R(1,\mu,v)(v dx + x dv) &= \\ \underbrace{(P(1,\mu,v) + \mu Q(1,\mu,v) + vR(1,\mu,v))}_{g(\mu,v)} dx + xQ(1,\mu,v)\,d\mu + xR(1,\mu,v)\,dv = 0 \end{aligned}$$

Si dividimos la forma diferencial por $xg(\mu,v)$ obtenemos

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1,\mu,v)}{g(\mu,v)}d\mu + \frac{R(1,\mu,v)}{g(\mu v)}dv = 0$$

Se ve claramente que x está separada.

Ecuación diferencial no lineal

Las veremos más adelante, y se reducirán a

$$dz = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$$

Que se puede escribir también como

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy - dz = 0$$

y el campo vectorial es

$$\vec{F} = (P, Q, -1)$$

5.2 Ecuaciones en derivadas parciales

5.2.1 Definiciones

- **Definición:** una ecuación en derivadas parciales es una función diferencial en la que la variable dependiente depende de varias variables independientes. Normalmente trataremos ecuaciones en derivadas parciales con dos variables independientes.

$$F\left(x, y, z\left(x, y\right), z_x^{'}, z_y^{'}, z_{xx}^{''}, z_{xy}^{''}, z_{yy}^{''}, \ldots\right) = 0$$

- **Definición:** el orden de una ecuación en derivadas parciales es el mayor orden de derivación parcial que aparezca en la ecuación. En este tema trataremos las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden,

$$F\left(x, y, z\left(x, y\right), z_x^{'}, z_y^{'}\right) = 0$$

  y en los siguientes las de segundo orden,

$$F\left(x, y, z\left(x, y\right), z_x^{'}, z_y^{'}, z_{xx}^{''}, z_{xy}^{''}, z_{yy}^{''}\right) = 0$$

- En una ecuación diferencial ordinaria $F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$, la **solución general** es una familia de curvas, $\phi\left(x, y, c\right) = 0$, mientras que en una ecuación en derivadas parciales es una familia de superficies.

5.3 Generación de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

5.3.1 Introducción

Si partimos de una familia de curvas $\phi\left(x, y, c\right) = 0$, podemos engendrar una ecuación diferencial ordinaria, eliminando las constantes arbitrarias. En una ecuación en derivadas parciales eliminamos funciones arbitrarias:

$$z_x^{'} = x + y \rightarrow z = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_1\left(y\right)$$

Si hacemos $z_{xy}^{''} = 0$, queda

$$z_x^{'} = \varphi_1\left(x\right) \rightarrow z = \int \varphi_1\left(x\right) dx + \varphi_2\left(y\right)$$

Para generar una ecuación en derivadas parciales de orden p, eliminamos p funciones arbitrarias.

5.3.2 Eliminación de funciones arbitrarias

Vamos a ver cómo generar ecuaciones en derivadas parciales eliminando una sola función arbitraria, para generar ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Sea la congruencia de curvas características

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(x, y, z\right) = c_1 \\ g\left(x, y, z\right) = c_2 \end{array} \right.$$

donde f y g son derivables con respecto a x, y y z. Tomamos la familia de superficies formada por

$$\psi\left(f\left(x, y, z\right), g\left(x, y, z\right)\right) = 0$$

con ψ arbitraria y derivable con respecto a f y g. La llamamos **integral o solución general**. Para eliminar ψ, derivamos con respecto a x e y:

$$x \rightarrow \psi_f^{'} \cdot \left(f_x^{'} + f_z^{'} z_x^{'}\right) + \psi_g^{'} \cdot \left(g_x^{'} + g_z^{'} z_x^{'}\right) = 0$$

$$y \to \psi'_f \cdot \left(f'_y + f'_z z'_y\right) + \psi'_g \cdot \left(g'_y + g'_z z'_y\right) = 0$$

Con lo que obtenemos un sistema lineal homogéneo con respecto a ψ'_f y ψ'_g. Como siempre hay varios casos:

1. Solución trivial: $\psi'_f = \psi'_g = 0$, con lo que ψ es una constante y no una función arbitraria, pero como queremos que sea una función, esta solución no puede darse.
2. Determinante del sistema nulo

$$\begin{vmatrix} f'_x + f'_z z'_x & g'_x + g'_z z'_x \\ f'_y + f'_z z'_y & g'_y + g'_z z'_y \end{vmatrix} = 0$$

$$f'_x g'_y + z'_y f'_x g'_z + z'_x z'_y f'_z g'_z + z'_x f'_z g'_y - \left(f'_y g'_x + z'_x f'_y g'_z + z'_y g'_x f'_z + z'_x z'_y f'_z g'_z\right) = 0$$

simplificando,

$$\left(f'_z g'_y - f'_y g'_z\right) z'_x + \left(f'_x g'_z - f'_z g'_x\right) z'_y = f'_y g'_x - f'_x g'_y$$

que es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal de primer orden, de la forma

$$P(x,y,z)\, z'_x + Q(x,y,z)\, z'_y = R(x,y,z)$$

5.3.3 Eliminación de constantes arbitrarias

Se eliminan tantas constantes como el número de variables independientes. Si tenemos una superficie biparamétrica en forma normal

$$h(x,y,z,c_1,c_2) = 0$$

siendo h conocida y derivable, derivamos con respecto a x e y,

$$\left\{ \begin{array}{l} h'_x + h'_z z'_x = 0 \\ h'_y + h'_z z'_y = 0 \\ h(x,y,z,c_1,c_2) = 0 \end{array} \right. \quad \to \text{Eliminar } c_1, c_2$$

y se obtiene

$$F\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right) = 0$$

una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Esta ecuación puede ser cuasilineal o no lineal. La solución a dicha ecuación no es una integral general, sino una **solución completa**. No existe relación entre las constantes c_1 y c_2.

Ejemplo:

Dada la superficie siguiente, hallar la ecuación en derivadas parciales de la que es solución

$$z = ax + by + ab$$

las derivadas son

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_x = a \\ z'_y = b \end{array} \right.$$

y junto con la superficie en sí, eliminamos las constantes y obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$z = xz'_x + z'_y y + z'_x z'_y$$

■

5.4 Integración de la ecuación en derivadas parciales cuasilineal de primer orden

La ecuación en derivadas parciales cuasilineal es una ecuación de la forma

$$P(x,y,z)\, z_x^{'} + Q(x,y,z)\, z_y^{'} = R(x,y,z)$$

donde P, Q y R son derivables con respecto a todos sus argumentos. Si P y Q sólo dependen de x e y y $R = R(x,y)\cdot z$, entonces es una **ecuación lineal**.

Si $R(x,y,z) = 0$ se llama **ecuación en derivadas parciales lineal homogénea**. Según vimos en 5.3.2, eliminando una función arbitraria, si $\psi(f(x,y,z), g(x,y,z))$ es una función arbitraria y derivable con respecto a f y g, la eliminación de ψ nos lleva a

$$\underbrace{\left(f_z^{'}g_y^{'} - f_y^{'}g_z^{'}\right)}_{P} z_x^{'} + \underbrace{\left(f_x^{'}g_z^{'} - f_z^{'}g_x^{'}\right)}_{Q} z_y^{'} = \underbrace{f_y^{'}g_x^{'} - f_x^{'}g_y^{'}}_{R}$$

y $\psi(f(x,y,z), g(x,y,z)) = 0$ es la solución o integral general de esta ecuación.

Por otro lado, si determinamos las curvas características

$$\begin{cases} f(x,y,z) = c_1 \\ g(x,y,z) = c_2 \end{cases}$$

f y g son derivables con respecto a x, y y z. Si x es la variable independiente y derivamos con respecto a ella,

$$\begin{cases} f_x^{'} + f_y^{'}\frac{dy}{dx} + f_z^{'}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \\ g_x^{'} + g_y^{'}\frac{dy}{dx} + g_z^{'}\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -f_x^{'} = f_y^{'}\frac{dy}{dx} + f_z^{'}\frac{dz}{dx} \\ \\ -g_x^{'} = g_y^{'}\frac{dy}{dx} + g_z^{'}\frac{dz}{dx} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x^{'}g_z^{'} + f_z^{'}g_x^{'}}{f_y^{'}g_z^{'} - f_z^{'}g_y^{'}} = \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-f_y^{'}g_x^{'} + f_x^{'}g_y^{'}}{f_y^{'}g_z^{'} - f_z^{'}g_y^{'}} = \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}$$

Escrito en forma simétrica

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

donde f y g son soluciones del sistema. Si determinamos ψ, tenemos una relación entre f y g, o lo que es lo mismo, entre c_1 y c_2, que da una solución particular.

➢ Notaremos en los ejemplos $p = z_x^{'}$ y $q = z_y^{'}$.

Ejemplo:

$$yp - xq = y^2 - x^2$$

La solución es $\psi(f(x,y,z), g(x,y,z)) = 0$ con

$$\begin{cases} f(x,y,z) = c_1 \\ g(x,y,z) = c_2 \end{cases}$$

y f, g soluciones del sistema

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{y^2 - x^2}$$

dos soluciones son

$$\begin{cases} ydy = -xdx \rightarrow x^2 + y^2 = c_1 \\ ydx + xdy = dz \rightarrow xy - z = c_2 \end{cases}$$

por lo que la solución general de la ecuación es

$$\psi\left(x^2 + y^2, xy - z\right) = 0$$

■

Si tuviéramos una ecuación en derivadas parciales homogénea,

$$P(x,y)\, z_x^{'} + Q(x,y)\, z_y^{'} = 0$$

el sistema sería

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dz}{0}$$

donde $z = c_1$ sería una de las curvas características y la otra, $\phi(x,y) = c_2$, vendría de una ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

con lo que la solución general es

$$\psi(z, \phi(x,y)) = 0$$

o

$$z = \varphi_1\left(\overbrace{\phi(x,y)}^{u}\right)$$

o

$$\phi(x,y) = \varphi_2(z)$$

Para que sea solución de la ecuación en derivadas parciales,

$$z_x^{'} = \frac{d\varphi_1}{du}\phi_x^{'}(x,y)$$

$$z_y^{'} = \frac{d\varphi_1}{du}\phi_y^{'}(x,y) = \frac{z_x^{'}}{\phi_x^{'}(x,y)}\phi_y^{'}(x,y)$$

Las llevamos a la ecuación

$$P(x,y)\frac{d\varphi_1}{du}\phi_x^{'} + Q(x,y)\frac{d\varphi_1}{du}\phi_y^{'} = \frac{d\varphi_1}{du}\left(P(x,y)\,\phi_x^{'} + Q(x,y)\,\phi_y^{'}\right)$$

Como $\phi(x,y)$ es solución del sistema anterior,

$$\phi_x^{'}dx + \phi_y^{'}dy = 0 \rightarrow \frac{\phi_x^{'}dx + \phi_y^{'}dy}{\phi_x^{'}P + \phi_y^{'}Q}$$

Para una **ecuación en derivadas parciales lineal homogénea con** n **variables independientes**, $x_1 : x_n$, la ecuación se escribe

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u_{x_1}^{'} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u_{x_2}^{'} + \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u_{x_n}^{'} = 0$$

y el sistema es

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{0}$$

Se obtienen n curvas características

$$\begin{cases} u = c_1 \\ \alpha_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2 \\ \alpha_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_n \end{cases}$$

y la solución general se escribe

$$\psi (u, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$$

o bien

$$u = \varphi_1 (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$$

y la derivada

$$du = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{n-1}} d\alpha_{n-1} = 0$$

Para hallar soluciones particulares en ecuaciones diferenciales ordinarias, dábamos un valor a las constantes arbitrarias, haciendo pasar a la solución general por un punto. En ecuaciones en derivadas parciales, se dan unas condiciones analíticas o geométricas (la mas sencilla es una directriz que no sea curva característica) donde se apoyen las curvas características. Si se toman las curvas características

$$\begin{cases} f (x, y, z) = c_1 \\ g (x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

y la directriz, entre ambas se intenta hallar una relación particular entre c_1 y c_2, eliminando x, y y z.

Ejemplo:

Hallar la superficie integral $z = z(x, y)$ de $4yzp + q + 2y = 0$ que pasa por

$$A \begin{cases} x + z = 2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} y^2 + z = 1 \\ z^2 + x = 2 \end{cases}$$

La ecuación es cuasilineal:

$$4yz\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Daremos la solución general como una función arbitraria de la congruencia de curvas características, $\psi (f (x, y, z), g (x, y, z)) = 0$,

$$\begin{cases} f (x, y, z) = c_1 \\ g (x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

El sistema a resolver para hallar la congruencia es

$$\frac{dx}{4yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2y}$$

Y las curvas son

$$-2ydy = dz \rightarrow z + y^2 = c_1$$

$$4yzdz + 2ydx = 2zdz + dx \rightarrow z^2 + x = c_2$$

con lo que la solución general es

$$\psi\left(z+y^2, z^2+x\right)=0$$

Ahora particularizamos para la directriz A:

$$\left\{\begin{array}{l} z+y^2=c_1 \\ x+z^2=c_2 \\ z+x=2 \\ y^2+z^2=1 \end{array}\right. \rightarrow c_1+c_2=x+z^2+z+y^2=2+1$$

con lo que la relación es $c_1+c_2=3$. Entonces, la solución particular es

$$z+y^2+x+z^2=3$$

Para la directriz B obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} z+y^2=c_1 \\ x+z^2=c_2 \\ y^2+z=1 \\ z^2+x=2 \end{array}\right.$$

las curvas de la directriz son curvas contenidas en la congruencia de curvas características, por lo que no se puede hallar una solución particular para esta directriz. Tienen que ser ambas curvas características para que no se pueda.

Por tanto, se puede decir que no existe ninguna superficie particular de este tipo. ■

Ejemplo:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=-z^2$$

Directriz:

$$\left\{\begin{array}{l} z=1 \\ x+y=xy \end{array}\right.$$

Hallamos la solución general en primer lugar

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{-z^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1 \\ \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c_2 \end{array}\right.$$

$$\psi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$$

La solución particular se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1 \\ \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=c_2 \\ \\ z=1 \\ \\ x+y=xy \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{y}=c_2-1 \\ \\ c_2-1-\frac{1}{x}=c_1 \end{array}\right.$$

Usamos la segunda directriz, sumando las relaciones:

$$c_2-1+c_2-c_1-1=1 \rightarrow 2c_2-c_1=3$$

Con lo que la solución particular es

$$2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=3$$

■

5.5 Aplicaciones de las ecuaciones en derivadas parciales

Vamos a ver el **cálculo de superficies ortogonales** como aplicación de las ecuaciones en derivadas parciales.

Sea el campo vectorial

$$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

y el vector normal a una superficie

$$\vec{N} = \left(z_x^{'}, z_y^{'}, -1\right)$$

Ambos son ortogonales si

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 0$$

Si $\vec{F}$ coincide con un vector $\vec{N}_1$ normal a una superficie dada $F(x,y,z) = c$, obtenemos una ecuación en derivadas parciales al multiplicar por $\vec{N}$.

Por tanto, dada la familia de superficies $F(x,y,z) = c$, el problema consiste en hallar la superficie ortogonal a ella

$$\vec{N}_1 = \left(F_x^{'}, F_y^{'}, F_z^{'}\right) = \nabla F$$

$$\vec{N}_2 = \left(\pm z_x^{'}, \pm z_y^{'}, \mp 1\right)$$

El producto escalar de ambos vectores es

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = F_x^{'} z_x^{'} + F_y^{'} z_y^{'} - F_z^{'} = 0$$

que es la ecuación en derivadas parciales de las superficies ortogonales al campo inicial.

Ejemplo:

Hallar la superficie ortogonal a

$$x^2 + y^2 = az$$

que contiene a la curva

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

La familia de superficies es

$$F(x,y,z) = a = \frac{x^2 + y^2}{z} \rightarrow \vec{N}_1 = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

o bien

$$x^2 + y^2 - az = 0 \rightarrow \vec{N}_1 = (2x, 2y, -a) = \left(2x, 2y, -\frac{x^2 + y^2}{z}\right)$$

ya que a depende de x, y y z. El vector normal a la trayectoria ortogonal es

$$\vec{N}_2 = \left(z_x^{'}, z_y^{'}, -1\right)$$

y la ecuación en derivadas parciales que tenemos que resolver es

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 = 2xz_x^{'} + 2yz_y^{'} + \frac{x^2 + y^2}{z}$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-\frac{x^2+y^2}{z}}$$

La primera curva característica es

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} \to \ln x - \ln y = \ln c_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = c_1$$

y la segunda la obtenemos de una regla compuesta

$$R_{C1} = \frac{xdx + ydy}{2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{zdz}{-\left(x^2+y^2\right)} \to \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = c_2$$

Así que la ecuación de las trayectorias ortogonales es

$$\psi\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2+y^2}{2} + z^2\right) = 0$$

Particularizamos para la curva que nos han dado

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y} = c_1 \\ \\ \frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = c_2 \\ \\ z = 1 \\ \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}\right. \to x^2 + y^2 + 2z^2 = 2c_2,\ x = yc_1$$

Sustituimos $z = 1$

$$y^2\left(c_1^2 + 1\right) + 2 = 2c_2 \Rightarrow y^2 = \frac{2c_2 - 2}{c_1^2 + 1}$$

y usando la segunda condición

$$3 = c_1^2 \frac{2c_2 - 2}{c_1^2 + 1} + \frac{2c_2 - 2}{c_1^2 + 1} = 2c_2 - 2$$

con lo que $2c_2 = 5$. Por tanto, la trayectoria ortogonal es

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$$

que es una elipse. ■

Ejemplo:

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right)p + 2xyq = 2xz$$

que contiene a

$$\left\{\begin{array}{l} z = x^3 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Es cuasilineal. El sistema para hallar las curvas de la congruencia es

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

Y se obtienen las siguientes curvas

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{z}{y} = c_1$$

$$R_{C1} = \frac{xdx + ydy + zdz}{x\left(x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2z^2\right)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = c_2$$

Y la relación entre las constantes es

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{z}{y}=c_1 \\ \frac{x^2+y^2+z^2}{z}=c_2 \\ z=x^3 \\ y=1 \end{array}\right. \rightarrow c_1=\left(c_2c_1-c_1^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

de la cual se puede obtener la solución particular. ■

5.6 Ecuación en derivadas parciales no lineal de primer orden

Dada una ecuación en derivadas parciales con tres variables, dos independientes:

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

donde $p=z_x^{'}$ y $q=z_y^{'}$, el problema ahora radica en hallar una integral que vamos a llamar completa de esa ecuación, que tiene que ser una superficie biparamétrica en forma normal:

$$f(x,y,z,c_1,c_2)=0$$

5.6.1 Método de Lagrange-Sharpy

Dada una ecuación en derivadas parciales

$$F(x,y,z,p,q)=0 \tag{5.2}$$

, derivable con respecto a todos sus argumentos y $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$ tales que no se anulan simultáneamente ($\left|F_p^{'}\right|+\left|F_q^{'}\right|\neq 0$), si suponemos que encontramos una relación

$$\phi(x,y,z,p,q)=c_1 \tag{5.3}$$

entonces junto con la ecuación a resolver podemos despejar p y q:

$$\left\{\begin{array}{l} p=p(x,y,z,c_1) \\ q=q(x,y,z,c_1) \end{array}\right.$$

de forma que al sustituirlo en la ecuación de Pfaff, da como resultado una ecuación integrable:

$$dz=p(x,y,z,c_1)\,dx+q(x,y,z,c_1)\,dy$$

al integrar obtenemos

$$f(x,y,z,c_1,c_2)=0$$

Para que $p(x,y,z,c_1)\,dx+q(x,y,z,c_1)\,dy-dz=0$ sea integrable, debe ser $\vec{F}\cdot\mathrm{rot}\left(\vec{F}\right)=0$, es decir

$$\begin{aligned}(p,q,-1)\cdot\left|\begin{array}{ccc}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ p & p & -1\end{array}\right| &= (p,q,-1)\left(-\frac{\partial q}{\partial z},\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\\ &= -pq_z^{'}+qp_z^{'}-q_x^{'}+p_y^{'}=0\end{aligned}$$

Si derivamos las ecuaciones (5.2) y (5.3) con respecto a las variables x, y y z, y aplicando el Teorema de la Función Implícita, podemos obtener las expresiones para $p_x^{'}$, $q_x^{'}$, $p_y^{'}$, $q_y^{'}$, $p_z^{'}$ y $q_z^{'}$:

$$p_x^{'}=\frac{-\phi_x^{'}F_q^{'}+\phi_q^{'}F_x^{'}}{\phi_p^{'}F_q^{'}-\phi_p^{'}F_p^{'}}$$

$$q_x^{'} = \frac{-\phi_p^{'} F_x^{'} + \phi_x^{'} F_p^{'}}{\phi_p^{'} F_q^{'} - \phi_p^{'} F_p^{'}}$$

$$p_y^{'} = \frac{-\phi_y^{'} F_q^{'} + \phi_q^{'} F_y^{'}}{\phi_p^{'} F_q^{'} - \phi_p^{'} F_p^{'}}$$

$$q_y^{'} = \frac{-\phi_p^{'} F_y^{'} + \phi_y^{'} F_p^{'}}{\phi_p^{'} F_q^{'} - \phi_p^{'} F_p^{'}}$$

$$p_z^{'} = \frac{-\phi_z^{'} F_q^{'} + \phi_q^{'} F_z^{'}}{\phi_p^{'} F_q^{'} - \phi_p^{'} F_p^{'}}$$

$$q_z^{'} = \frac{-\phi_p^{'} F_z^{'} + \phi_z^{'} F_p^{'}}{\phi_p^{'} F_q^{'} - \phi_p^{'} F_p^{'}}$$

Y llevando estas expresiones a la ecuación que obtuvimos de la condición de integrabilidad, se acaba obteniendo

$$F_p^{'}\phi_x^{'} + F_q^{'}\phi_y^{'} + \left(pF_p^{'} + qF_q^{'}\right)\phi_z^{'} - \left(pF_z^{'} + F_x^{'}\right)\phi_p^{'} - \left(qF_z^{'} + F_y^{'}\right)\phi_q^{'} = 0$$

que es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal de primer orden con 5 variables independientes. El sistema que se obtiene se llama **sistema característico de Lagrange-Sharpy**:

$$\frac{dx}{F_p^{'}} = \frac{dy}{F_q^{'}} = \frac{dz}{pF_p^{'} + qF_q^{'}} = \frac{dp}{-\left(pF_z^{'} + F_x^{'}\right)} = \frac{dq}{-\left(qF_z^{'} + F_y^{'}\right)} = \frac{d\phi}{0}$$

Podemos hallar muchas integrales primeras de este sistema, por lo que no hay una única integral completa. Los pasos a dar para resolver un ecuación en derivadas parciales por este método son:

1. Hallar una integral primera $\phi\left(x, y, z, p, q\right) = c_1$ del sistema característico de Lagrange-Sharpy.

2. De esa integral primera y de la ecuación en derivadas parciales a resolver despejamos $p = p\left(x, y, z, c_1\right)$ y $q = q\left(x, y, z, c_1\right)$, sustituyéndolos en la ecuación de Pfaff:

$$dz = p\left(x, y, z, c_1\right)dx + q\left(x, y, z, c_1\right)dy$$

E integrando obtenemos una integral completa

$$f\left(x, y, z, c_1, c_2\right) = 0$$

Ejemplo:

$$pq = z \rightarrow pq - z = 0 \equiv F\left(x, y, z, p, q\right)$$

1. Escribimos el sistema característico

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = -\frac{dp}{0 - p} = -\frac{dq}{0 - q} = \frac{d\phi}{0}$$

y una de las integrales primeras puede ser

$$p = y + c_1$$

2. El sistema para despejar p y q es

$$\left\{\begin{array}{l} pq - z = 0 \\ p = y + c_1 \end{array}\right. \rightarrow q = \frac{z}{p} = \frac{z}{y + c_1}$$

3. Las metemos en la ecuación de Pfaff

$$dz = (y + c_1)\, dx + \left(\frac{z}{y + c_1}\right) dy$$

Dividimos por $y + c_1$ y nos queda

$$\frac{dz}{y + c_1} = dx + \frac{z}{(y + c_1)^2} dy$$

Podemos expresar la solución de esta ecuación de la forma

$$U(z, y) - x = c_2$$

y si observamos cuidadosamente la parte que corresponde a $dU(z, y)$, vemos que

$$d\left(\frac{z}{y + c_1}\right) - dx = 0 \Rightarrow \frac{z}{y + c_1} - x = c_2$$

■

5.7 Soluciones singulares

➢ A partir de una solución completa no se pueden obtener soluciones particulares, pero sí soluciones singulares.

Las obtendremos despejando c_1 y c_2 del sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, z, c_1, c_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c_2} = 0 \end{array}\right. \rightarrow g(x, y, z) = 0$$

si es que se pueden despejar.

Del ejemplo anterior, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0 = \frac{-z}{(y + c_1)^2} \rightarrow z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_2} = 0 = -1$$

no es posible, por lo que no existe solución singular.

Ejemplo:

$$F \equiv px + qy + pq - z = 0$$

El sistema característico es

$$\frac{dx}{x + q} = \frac{dy}{y + p} = \frac{dz}{p(x + q) + q(y + p)} = \frac{-dp}{p - p} = \frac{-dq}{q - q}$$

Con lo que podemos extraer la integral primera $p = c_1$ y, junto con la ecuación original, obtener

$$q = \frac{z - c_1 x}{y + c_1}$$

Que lo llevamos a la ecuación en derivadas parciales

$$dz = c_1 dx + \frac{z - c_1 x}{y - c_1} dy \rightarrow \frac{dz - c_1 dx}{z - c_1 x} = \frac{dy}{y + c_1}$$

$$\ln (z - c_1 x) = \ln (y + c_1) + \ln c_2$$

con lo que la integral completa es

$$\frac{z - c_1 x}{y + c_1} = c_2$$

Ahora calculamos la solución singular, en caso de que exista:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \equiv c_1 x + c_2 y + c_1 c_2 - z = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial c_1} = x + c_2 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial c_2} = y + c_1 = 0 \end{array} \right. \rightarrow -yx - yx + xy - z = 0 \Rightarrow xy + z = 0$$

Si al hallar la integral completa hubiésemos tomado dos integrales primeras, por ejemplo

$$\begin{array}{l} p = c_1 \\ q = c_2 \end{array}$$

entonces al introducirlas en la ecuación y derivando,

$$dz = c_1 dx + c_2 dy \rightarrow z = c_1 x + c_2 y + c_3$$

si igualamos esta última expresión con la ecuación original, obtenemos que $c_1 c_2 = c_3$. ■

Ejemplo:

$$(x + y) p + (x - y) q = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{z}$$

Hacemos el sistema característico

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{x - y} = \frac{z}{y^2 - 2xy - x^2} dz$$

y hallamos dos curvas integrales

$$xdx - ydx = xdy + ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - xy = c_1$$

$$\frac{-xdx - ydy}{-x^2 - xy - xy - y^2} = \frac{-xdx - ydy}{y^2 - x^2 - 2xy} = \frac{z}{y^2 - 2xy - x^2} dz \Rightarrow z + y + x = c_2$$

■

5.8 Casos particulares para el cálculo de la integral completa

5.8.1 $F(p, q) = 0$

Si despejamos q en función de p, $q = g(p)$ y hacemos una de las dos constantes, por ejemplo $p = c_1$, entonces $q = g(c_1)$ y la ecuación

$$dz = pdx + qdy$$

podemos escribirla como

$$dz = c_1 dx + g(c_1) dy$$

cuya solución es

$$z = c_1 x + g(c_1) y + c_2$$

5.8.2 $F(x,y,p,q)=0$

En este tipo de ecuaciones no aparece la variable z. Si podemos escribir

$$c_1 = g_1(x,p) = g_2(y,q)$$

entonces

$$g_1(x,p) = c_1 \Rightarrow p = h_1(x,c_1)$$

y

$$g_2(y,q) = c_1 \Rightarrow q = h_2(y,c_1)$$

que llevado a la ecuación,

$$dz = h_1(x,c_1)\,dx + h_2(y,c_1)\,dy$$

es de variables separadas y su solución es sencilla:

$$z = \int h_1(x,c_1)\,dx + \int h_2(y,c_1)\,dy + c_2$$

Ejemplo:

$$\frac{p}{x^2} - \frac{q^2}{y} - 1 = 0 = F(x,y,p,q)$$

Podemos escribirlo como

$$\frac{p}{x^2} - 1 = \frac{q^2}{y} = c_1 \rightarrow \begin{cases} p = (c_1+1)\,x^2 \\ q^2 = c_1 y \Rightarrow q = \pm\sqrt{c_1 y} \end{cases}$$

y la ecuación queda

$$dz = (c_1+1)\,x^2 dx \pm \sqrt{c_1 y}\,dy$$

de variables separadas, cuya solución es

$$z = (c_1+1)\frac{x^3}{3} \pm \sqrt{c_1}\frac{y^{3/2}}{3/2} + c_2$$

Si lo hacemos por el método de Lagrange-Sharpy, tenemos el sistema

$$\frac{dx}{\frac{1}{x^2}} = \frac{dy}{-\frac{2q}{y}} = \frac{dz}{\frac{p}{x^2} - \frac{2q^2}{y}} = \frac{-dp}{-\frac{2p}{x^3}} = \frac{-dq}{\frac{q^2}{y^2}}$$

■

5.8.3 $F(z,p,q)=0$

En este caso no aparecen las variables independientes x e y en la ecuación. Si la ecuación es lineal, conviene hacerlo como ya hemos visto, pero si no lo es, es mejor hacer el cambio

$$z = z(t) \quad \text{con } t = c_1 x + y$$

Con este cambio obtenemos

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = c_1\frac{dz}{dt}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dz}{dt}$$

Con lo que la ecuación toma la forma

$$F\left(z(t), c_1\frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo:

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{1}{z^2}$$

El cambio es $z = z(t)$ con $t = c_1 x + y$, por lo que la ecuación queda

$$c_1^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1 - z^2}{z^2}$$

Hacemos la raiz

$$\pm\sqrt{c_1^2 + 1}\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \to \sqrt{c_1^2 + 1}\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}dz = \pm dt$$

y ahora integramos

$$\sqrt{c_1^2 + 1}\left(-\sqrt{1 - z^2}\right) = \pm t + c_2$$

y por último deshacemos el cambio

$$-\sqrt{c_1^2 + 1}\sqrt{1 - z^2} = \pm c_1 x + y + c_2$$

Si la resolvemos por el método de Lagrange-Sharpy, el sistema es

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)} = \frac{-dp}{pF_z'} = \frac{-dq}{qF_z'}$$

convendría igualar las 2 últimas expresiones para obtener

$$q = c_1 p$$

y llevándolo a la ecuación,

$$p^2\left(1 + c_1^2\right) = \frac{1 - z^2}{z^2} \to p = \pm\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z\sqrt{1 + c_1^2}}$$

Y tenemos

$$dz = \pm\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}\frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2}}dx \pm \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + 1}}dy$$

Multiplicando por $\frac{\sqrt{c_1^2+1}}{\sqrt{1-z^2}}z$ llegamos a la expresión que obtuvimos antes. ■

5.8.4 Ecuación en Derivadas Parciales no lineal generalizada de Clairaut

Recordemos que en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden teníamos la ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + g\left(y'\right)$$

que se resolvía haciendo $y' = c$.

Ahora tenemos una ecuación de la forma

$$z = xz_x' + yz_y' + g\left(z_x', z_y'\right) = xp + yq + g(p, q)$$

y ahora hacemos $p = c_1, q = c_2$ con lo que

$$z = c_1 x + c_2 y + g(c_1, c_2)$$

Demostración. Es fácil de demostrar. Volvemos a escribir la ecuación:

$$xp + yq + g(p,q) - z = 0$$

y aplicamos Lagrange-Sharpy

$$\frac{-dp}{p + p(-1)} = -\frac{dp}{0} \Rightarrow p = c_1$$

$$\frac{-dq}{q + q(-1)} = -\frac{dq}{0} \Rightarrow q = c_2$$

Lo llevamos a la ecuación de Pfaff

$$dz = c_1 dx + c_2 dy$$

y la integramos, con lo que nos queda

$$z = c_1 x + c_2 y + c_3$$

Eliminamos c_3 con $z = xp + yq + g(p,q)$ y nos quedará finalmente

$$z = xc_1 + yc_2 + g(c_1, c_2)$$

Que es una solución completa de la ecuación. □

Ejemplo:

$$z = px + qy + 3p^{1/3}q^{1/3}$$

Una solución completa es

$$z = c_1 x + c_2 y + 3c_1^{1/3}c_2^{1/3}$$

Las derivadas con respecto c_1 y c_2 son

$$x + c_1^{-2/3}c_2^{1/3} = 0$$

y

$$y + c_1^{1/3}c_2^{-2/3} = 0$$

de donde se tiene que

$$c_1 x + c_2 y = -2c_1^{1/3}c_2^{1/3}, \quad xy = c_1^{-1/3}c_2^{-1/3}$$

Sustituyendo en la solución completa, obtendríamos la solución singular:

$$z = c_1^{1/3}c_2^{1/3} = \frac{1}{xy}$$

o bien

$$xyz = 1$$

■

TEMA 6

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Segundo Orden (I)

6.1 Consideraciones generales

Dada una expresión con dos funciones arbitrarias φ y ψ,

$$z = f\left(x, y, \varphi\left(x\right), \psi\left(y\right)\right)$$

Lo lógico sería llegar a una ecuación en derivadas parciales de 2 º orden si eliminamos ambas funciones arbitrarias. Sin embargo, podemos obtener 6 relaciones (las derivadas primeras y segundas de z) para eliminar 6 funciones (φ, ψ y sus derivadas primera y segunda), que no es suficiente. Sin embargo, si derivamos hasta el tercer orden, tenemos 10 relaciones para eliminar 8 funciones.

Sólo en casos especiales la eliminación de 2 funciones arbitrarias lleva a una sola ecuación diferencial.

Ejemplo:

Dada la función

$$u\left(x, t\right) = \varphi\left(x + at\right) + \psi\left(x - at\right)$$

hallar la ecuación de la que es solución.

Hacemos el cambio $x + at = u$ y $x - at = v$. Derivamos 2 veces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{dv} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{d\varphi}{du} - a\frac{d\psi}{dv}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{d^2\psi}{dv^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(a\frac{d^2\varphi}{du^2} + a\frac{d^2\psi}{dv^2}\right)$$

con lo que obtenemos, finalmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta es la **ecuación de la cuerda vibrante**. ∎

Se expresa una ecuación en derivadas parciales de segundo orden como

$$F\left(x, y, z, z_x^{'}, z_y^{'}, z_{xx}^{''}, z_{xy}^{''}, z_{yy}^{''}\right) = 0$$

6.2 Casos sencillos de integración

Hay un par de casos en los que la integración de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden es sencilla, vamos a verlos a continuación.

6.2.1 No aparecen derivadas con respecto a x o y

Se pueden dar uno de los dos casos siguientes:

$$F\left(x, y, z, z_x^{'}, z_{xx}^{''}\right) = 0$$

o bien

$$F\left(x, y, z, z_y^{'}, z_{yy}^{''}\right) = 0$$

Para resolverlas se toman y o x como parámetros (respectivamente en cada una de las ecuaciones), y la solución general queda

$$\phi_1\left(x, y, z, c_1, c_2\right) = 0 \to \phi_1\left(x, y, z, \varphi_1\left(y\right), \varphi_2\left(y\right)\right) = 0$$

$$\phi_2\left(x, y, z, c_1, c_2\right) = 0 \to \phi_2\left(x, y, z, \psi_1\left(x\right), \psi_2\left(x\right)\right) = 0$$

Ejemplo:

$$z_{xx}^{''} - 5z_x^{'} + 6z = y$$

Se toma y parámetro y resolvemos la homogénea que se puede resolver como una ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$r^2 - 5r + 6 = \left(r-2\right)\left(r-3\right) = 0 \Rightarrow z_0 = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x}$$

y la particular

$$\tilde{z} = A \Rightarrow A = \frac{y}{6}$$

con lo que la solución es, sustituyendo las constantes por funciones arbitrarias de y,

$$z = \varphi_1\left(y\right) e^{2x} + \varphi_2\left(y\right) e^{3x} + \frac{y}{6}$$

■

6.2.2 No aparece la derivada segunda con respecto a xx o yy

$$F\left(x, y, z, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

con $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejemplo:

$$xz_{xx}^{''} + yz_{xy}^{''} = 0$$

hacemos $z_x^{'} = p$ y nos queda

$$x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

que es una EDP de primer orden. Hacemos el sistema:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dp}{0}$$

y obtenemos las curvas

$$p = c_1 \to c_1 = \psi_1(c_2)$$

$$\frac{x}{y} = c_2 \to p = \psi_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

con lo que

$$z_x^{'} = p = \psi_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

y la solución es

$$z = \int \psi_1\left(\frac{x}{y}\right) dx + \psi_2(y)$$

■

6.3 Ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden

Para las ecuaciones en derivadas parciales lineales de 2º orden, que son las que más nos vamos a encontrar, se puede hacer un estudio similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

➢ ***Definición:*** una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden (con x, y variables independientes) es una expresión del tipo

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Z \cdot z = F(x, y)$$

donde R, S, T, P, Q y Z son funciones de (x, y) (en cuyo caso es una EDP lineal de coeficientes variables de 2º orden) o números reales (EDPL de coeficientes constantes de 2º orden).

Aplicando los operadores

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

la expresión queda

$$\underbrace{\left(RD_x^2 + SD_xD_y + TD_y^2 + PD_x + QD_y + Z\right)}_{\phi(D_x, D_y)} z = F(x, y)$$

Y si $R \dots Z$ son constantes, sería equivalente al polinomio en D que vimos para las EDO de 2º orden.

La **propiedad fundamental** de $\phi(D_x, D_y)$ es la linealidad:

1. $\phi(D_x, D_y)(az) = a\phi(D_x, D_y)z$
2. $\phi(D_x, D_y)(z_1 + z_2) = \phi(D_x, D_y)z_1 + \phi(D_x, D_y)z_2$

Y la **consecuencia** de esto es:

(I) Si $z_1, z_2, \dots, z_k$ son soluciones de $\phi(D_x, D_y)z = 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} c_i z_i$$

también es solución de $\phi(D_x, D_y)z = 0$. No se puede hablar de solución general sino sólo de solución. Esta consecuencia se llama **principio de superposición de soluciones**.

(II) Si z_h es solución de $\phi(D_x, D_y)z = 0$, y $\tilde{z}$ es solución particular de la completa $\phi(D_x, D_y)z = F(x, y)$, entonces

$$z = z_h + \tilde{z}$$

será solución de la completa:

$$\phi(D_x, D_y)z = \phi(D_x, D_y)(z_h + \tilde{z}) = \phi(D_x, D_y)z_h + \phi(D_x, D_y)\tilde{z} = F(x, y)$$

En la mayoría de aplicaciones que vamos a ver obtendremos ecuaciones en derivadas parciales lineales de coeficientes constantes.

6.4 Soluciones de la EDP homogénea de segundo orden y coeficientes constantes

Dada una EDP homogénea de segundo orden y coeficientes constantes,

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Z \cdot z = 0 \equiv \phi\left(D_x, D_y\right) z = 0$$

$$R, P, Q, S, T, Z \in \mathbb{R}$$

Tenemos varios casos, que vemos a continuación.

6.4.1 $\phi\left(D_x, D_y\right)$ es reducible

Que es reducible significa que se puede descomponer en factores lineales de primer grado de derivación:

$$\phi\left(D_x, D_y\right) = \left(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1\right)\left(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2\right)$$

Puede ocurrir que $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sean números reales distintos o proporcionales, con lo que se distinguen dos casos más que vemos a continuación. Antes recordemos de cónicas (Álgebra) cuando es reducible:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & S/2 & P/2 \\ S/2 & T & Q/2 \\ P/2 & Q/2 & Z \end{vmatrix}$$

si $\Delta = 0$, entonces es reducible, mientras que si $\Delta \neq 0$ no lo es.

Veamos a continuación los casos:

a) $\left(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1\right)$ y $\left(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2\right)$ forman un sistema lineal determinado

Esto es, que los a_i, b_i, c_i son distintos y no guardan una relación de proporcionalidad. Podemos escribir entonces el sistema como

$$\begin{cases} a_1 z_x^{'} + b_1 z_y^{'} = -c_1 z \\ a_2 z_x^{'} + b_2 z_y^{'} = -c_2 z \end{cases}$$

Hallamos la solución de cada una y la suma de las soluciones es la solución de la total, que sólo en caso de que $\phi\left(D_x . D_y\right)$ sea reducible, será una solución general.

$$a_1 z_x^{'} + b_1 z_y^{'} = -c_1 z \to \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{b_1} = \frac{-dz}{c_1 z}$$

y la solución es

$$\begin{cases} a_1 y - b_1 x = k_1 \\ \ln z = \ln k_2 - \frac{c_1}{a_1} x \Rightarrow z = k_2\, e^{-\frac{c_1}{a_1} x} \end{cases}$$

$$\psi\left(k_1, k_2\right) = 0 \sim k_2 = \varphi_1\left(k_1\right)$$

por tanto, para la primera ecuación, la solución es

$$z_1\, e^{\frac{c_1}{a_1} x} = \varphi_1\left(a_1 y - b_1 x\right) \to z_1 = e^{-\frac{c_1}{a_1} x}\, \varphi_1\left(a_1 y - b_1 x\right)$$

y para la segunda

$$z_2 = e^{-\frac{c_2}{a_2} x}\, \varphi_2\left(a_2 y - b_2 x\right)$$

con lo que la solución general de $\phi\left(D_x, D_y\right) z = 0$ es

$$z = z_1 + z_2 = e^{-\frac{c_1}{a_1} x}\, \varphi_1\left(a_1 y - b_1 x\right) + e^{-\frac{c_2}{a_2} x}\, \varphi_2\left(a_2 y - b_2 x\right)$$

Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vamos a ver que se llega a lo que vimos al principio del tema.

$$\left(D_t^2 - a^2 D_x^2\right) u = 0$$

es homogénea y reducible.

$$\left(D_t - aD_x\right)\left(D_t + aD_x\right) u = 0$$

con lo que queda el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(D_t - aD_x\right) u = 0 \rightarrow u_t^{'} - au_x^{'} = 0 \\ \left(D_t + aD_x\right) u = 0 \rightarrow u_t^{'} + au_x^{'} = 0 \end{array} \right.$$

De la primera se obtiene

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-a} = \frac{du}{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = k_1 \\ x + at = k_2 \end{array} \right.$$

y de la segunda

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} = \frac{du}{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = k_3 \\ x - at = k_4 \end{array} \right.$$

Y las soluciones para cada una son

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \varphi_1 \left(x + at\right) \\ u_2 = \varphi_2 \left(x - at\right) \end{array} \right.$$

con lo que la solución general (en el sentido de que al eliminar las dos funciones arbitrarias se obtiene la ecuación diferencial) es

$$u\left(x,t\right) = \varphi_1\left(x + at\right) + \varphi_2\left(x - at\right)$$

■

b) $\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$

El sistema es indeterminado, es decir, que la ecuación es

$$\phi\left(D_x, D_y\right) z = \left(aD_x + bD_y + c\right)\left(aD_x + bD_y + c\right) z = 0$$

Con lo que las dos ecuaciones que obtenemos son iguales. Para arreglarlo, hacemos el cambio

$$\left(aD_x + bD_y + c\right) z = u$$

y resolvemos entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(aD_x + bD_y + c\right) z = u \\ \left(aD_x + bD_y + c\right) u = 0 \end{array} \right.$$

Para la segunda se obtendrá

$$u = e^{-\frac{c}{a}x} \varphi_1\left(ay - bx\right)$$

y la primera queda, tras sustituir u por su valor,

$$\left(aD_x + bD_y + c\right) z = e^{-\frac{c}{a}x} \varphi_1\left(ay - bx\right)$$

es decir,

$$az_x^{'} + bz_y^{'} = -cz + e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi_1\,(ay - bx)$$

Y el sistema característico:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz + e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi_1\,(ay - bx)}$$

De donde podemos sacar

$$bdx = ady \Rightarrow ay - bx = c_1$$

y la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{-cz + e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi_1\,(ay - bx)} \to \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}\left(-cz + e^{\frac{c}{a}x}\,\varphi_1\,(ay - bx)\right)$$

y como $ay - bx = c_1$, la ecuación es

$$\frac{dz}{dx} + \frac{c}{a}z = \frac{1}{a}\,e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi_1\,(c_1)$$

La solución de esta ecuación queda

$$z = e^{-\frac{c}{a}x}\left(\frac{1}{a}\varphi_1\,(c_1)\,x + c_2\right)$$

y para la solución general hacemos $c_2 = \varphi_2\,(c_1)$ con lo que obtenemos

$$z = e^{-\frac{c}{a}x}\left(\frac{1}{a}\varphi_1\,(ay - bx)\,x + \varphi_2\,(ay - bx)\right)$$

que, como podemos observar, es similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo

$$(D - r)^2\,y = 0$$

en las que la solución es de la forma

$$e^{rx}\,(c_1x + c_2)$$

6.4.2 $\phi\,(D_x, D_y) = 0$ no es reducible

En este caso, para

$$\phi\,(D_x, D_y)\,z = \left(RD_x^2 + SD_xD_y + TD_y^2 + PD_x + QD_y + Z\right)z = 0$$

lo podemos considerar de la misma forma que para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, en las que buscábamos soluciones de la forma e^{rx}:

$$P\,(D)\,e^{rx} = e^{rx}\,P\,(r) = 0$$

En este caso tenemos 2 variables independientes, así que las soluciones buscadas serán de la forma

$$z = e^{\alpha x + \beta y}$$

y tenemos que ver de dónde provienen α y β. Al introducir esto en la ecuación, queda

$$\phi\,(D_x, D_y)\,e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x + \beta y}\underbrace{\left(\alpha^2 R + \alpha\beta S + \beta^2 T + \alpha P + \beta Q + Z\right)}_{\phi(\alpha,\beta)}z = 0$$

Propiedad fundamental para el operador ϕ:

$$\phi\,(D_x, D_y)\,e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x + \beta y}\,\phi\,(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \phi\,(\alpha, \beta) = 0$$

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que $e^{\alpha x+\beta y}$ sea solución de la ecuación es

$$\phi(\alpha,\beta)=0$$

Se hallan los infinitos valores α_i, β_i que la verifican y la solución (no general) es

$$z=\sum_{i=1}^{?} c_i\, e^{\alpha_i x+\beta_i y}$$

Resolver $\phi(\alpha,\beta)=0$ es bastante complicado, pero observamos que

$$e^{\alpha x+\beta y}=e^{\alpha x}\, e^{\beta y}=X(x)\,Y(y)$$

y con esto podemos ver otro método que nos servirá: el método de separación de variables.

6.5 Método de separación de variables

Este método tiene una única pega: se puede usar siempre que no esté el término de derivadas cruzadas D_{xy}. Esto es, que la ecuación sea

$$\phi(D_x,D_y)\,z=\left(RD_x^2+TD_y^2+PD_x+QD_y+Z\right)z=0$$

Ese término se puede eliminar en una forma cónica, que lo veremos más tarde.

Buscamos soluciones $z=X(x)\,Y(y)$, por lo que tenemos

$$\begin{cases} z_x^{'}=X^{'}Y \\ z_{xx}^{''}=X^{''}Y \\ z_y^{'}=XY^{'} \\ z_{yy}^{''}=XY^{''} \end{cases}$$

y la ecuación es entonces

$$RX^{''}Y+TXY^{''}+PX^{'}Y+QXY^{'}+ZXY=0$$

dividimos por XY y separamos las variables

$$\underbrace{R\frac{X^{''}}{X}+P\frac{X^{'}}{X}+Z}_{f(x)}=\underbrace{-T\frac{Y^{''}}{Y}-Q\frac{Y^{'}}{Y}}_{g(y)}=\lambda$$

por lo que tenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden siguientes:

$$\begin{cases} R\frac{X^{''}}{X}+P\frac{X^{'}}{X}+Z=\lambda \\ \\ -T\frac{Y^{''}}{Y}-Q\frac{Y^{'}}{Y}=\lambda \end{cases}$$

Por lo que hemos convertido el problema en resolver 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con λ arbitrario. Por tanto, vamos a obtener soluciones indefinidas.

Si apareciese el término cruzado en la ecuación, aparecería $SX^{'}Y^{'}$, con lo que al dividir por XY no se podrían separar las variables.

Este método también es válido para ecuaciones reducibles.

6.6 Cálculo de soluciones particulares de la ecuación completa

Si conocemos una solución homogénea de la ecuación $\phi(D_x,D_y)\,z=0$, z_h y una particular de la completa

$$\tilde{z}:\phi(D_x,D_y)\,z=F(x,y)$$

entonces la suma de ambas

$$z=z_h+\tilde{z}$$

es solución de $\phi(D_x,D_y)\,z=F(x,y)$, y será solución general si z_h lo es.

Ahora trataremos de calcular las soluciones particulares. Distinguimos 2 casos, igual que antes.

6.6.1 $\phi(D_x, D_y)$ es reducible

En este caso, igual que antes, podemos descomponer $\phi(D_x, D_y)$ en dos operadores lineales, con lo que la ecuación completa queda

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) z = F(x, y)$$

Da igual que los coeficientes sean proporcionales entre sí que no, ya que para esta ecuación hacemos

$$u = (a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) z$$

y

$$F(x, y) = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1) u$$

1. Hallamos una solución u particular
2. La llevamos a la otra y hallamos la z particular.

Ejemplo:

$$z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x + 2z'_y = 4x\, e^{-2y}$$

$$\left(D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2 - 2D_x + 2D_y\right) z = 4x\, e^{-2y}$$

Es reducible, y nos queda

$$(D_x - D_y - 2)(D_x - D_y) z = 4x\, e^{-2y}$$

Si no podemos ver que lo es (y cómo queda reducida) a la primera, hacemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} D_x = \alpha \\ D_y = \beta \end{array}\right\} \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta = 0$$

y resolvemos

$$\alpha^2 - \alpha(2\beta + 2) + \beta^2 + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\beta + 2 \pm \sqrt{(2\beta + 2)^2 4(\beta^2 + 2\beta)}}{2}$$

finalmente tenemos

$$\alpha = \left\{\begin{array}{l} \beta + 2 \\ \beta \end{array}\right.$$

por lo que la descomposición es

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 2) \equiv (D_x - D_y)(D_x - D_y - 2)$$

que es lo que hemos visto antes. Seguimos por tanto, las ecuaciones que se sacan son

$$\left\{\begin{array}{l} (D_x - D_y) z = 0 \Rightarrow z_1 = \varphi_1(x + y) \\ (D_x - D_y - 2) z = 0 \Rightarrow z_2 = e^{2x}\varphi_2(x + y) \end{array}\right.$$

por lo que la solución homogénea es

$$z_h = \varphi_1(x + y) + e^{2x}\varphi_2(x + y)$$

Ahora hallamos la particular:

$$\left\{\begin{array}{l} (D_x - D_y - 2) z = u \\ (D_x - D_y) u = 4x\, e^{-2y} \end{array}\right.$$

Resolvemos la segunda, obteniendo

$$u_x^{'} - u_y^{'} = 4x\, e^{-2y}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{4x\, e^{-2y}}$$

La primera curva característica es

$$x + y = c_1$$

y la segunda la obtenemos de

$$\frac{dy}{-1} = \frac{du}{4x\, e^{-2y}}$$

sustituyendo x por $c_1 - y$:

$$4\left(c_1 - y\right) e^{2-y}\, dy = -du \Rightarrow u = 2\left(c_1 - y\right) e^{-2y} - e^{-2y} + c_2$$

como buscamos una particular, hacemos $c_2 = 0$ por ejemplo.

$$\tilde{u} = e^{-2y}\left(2\left(c_1 - y\right) - 1\right)$$

La sustituimos en la primera ecuación:

$$\left(D_x - D_y - 2\right) z = e^{-2y}\left(2x - 1\right)$$

usando $x + y = c_1$. Resolvemos esta ecuación

$$z_x^{'} - z_y^{'} = 2z + e^{-2y}\left(2x - 1\right)$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2z + e^{-2y}\left(2x - 1\right)}$$

Sacamos una curva

$$x + y = c_3$$

y la otra de

$$\frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2z + e^{-2y}\left(2x - 1\right)}$$

de nuevo usamos la primera curva, para que la solución particular nos quede, después de integrar,

$$\tilde{z} = \left(y^2 - \left(2\left(x + y\right) - 1\right) y\right) e^{-2y}$$

y la solución completa

$$z = \varphi_1\left(x + y\right) + e^{2x}\, \varphi_2\left(x + y\right) + e^{-2y}\left(-y^2 + y - 2xy\right)$$

■

6.6.2 $\phi\left(D_x, D_y\right)$ no es reducible

Ahora no podemos hacerla como antes. Hay que hacerla por el método de los coeficientes indeterminados, que sirve también para las ecuaciones reducibles.

Recordemos que

$$\phi\left(D_x, D_y\right) e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x + \beta y}\, \phi\left(\alpha, \beta\right)$$

Tenemos varios casos en función de la forma de $F\left(x, y\right)$.

a) $F(x,y) = C\ e^{\alpha x+\beta y}$

En este caso ensayamos soluciones particulares de la forma

$$\tilde{z} = K\ e^{\alpha x+\beta y}$$

Donde

$$K = \frac{C}{\phi(\alpha,\beta)}$$

siempre que $\phi(\alpha,\beta) \neq 0$.

De todas formas, si $\phi(\alpha,\beta) = 0$, las buscamos de la forma

$$\tilde{z} = xK_1\ e^{\alpha x+\beta y}$$

o bien

$$\tilde{z} = yK_2\ e^{\alpha x+\beta y}$$

Ejemplo:

$$z''_{xx} + 2z'_y = e^{3x-y}$$

Hallamos la solución particular únicamente:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 3 \\ \beta = -1\end{array}\right. \rightarrow \phi(\alpha,\beta) = 7 \neq 0$$

Ensayamos la solución

$$\tilde{z} = K\ e^{3x-y}$$

$$K(9-2)\ e^{3x-y} = e^{3x-y}$$

$$K = \frac{1}{7}$$

por lo que la solución particular es

$$\tilde{z} = \frac{1}{7}\ e^{3x-y}$$

■

Ejemplo:

$$4z''_{xx} + z''_{yy} - 8z'_x = 3\ e^{x+2y}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \beta = 2\end{array}\right. \rightarrow \phi(1,2) = 0$$

En este caso, la solución particular que ensayamos es

$$\tilde{z} = yK_1\ e^{x+2y} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z'_x = z''_{xx} = K_1 y\ e^{x+2y} \\ \\ z'_y = K_1\ e^{x+2y}(2y+1) \\ \\ z''_{yy} = K_1\ e^{x+2y}(4y+4)\end{array}\right.$$

Y al llevarlo a la ecuación,

$$K_1 \left(4D_x^2 + D_y^2 - 8D_x\right) y\ e^{x+y} = 3\ e^{x+2y}$$

que queda

$$K_1\ e^{x+2y} \left(4y + 4y + 4 - 8y\right) = 3\ e^{x+2y}$$

$$K_1 = \frac{3}{4}$$

No se debe tener un polinomio en el paréntesis, si se tiene, ha habido un error, o hay que escoger la otra forma de $\tilde{z}$.
La solución particular será por tanto

$$\tilde{z} = \frac{3}{4} y\ e^{x+2y}$$

■

b) $F(x, y) = m \cos(\alpha x + \beta y) + n \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y)$

Tenemos dos posibilidades:

- $\phi(\alpha i, \beta i) \neq 0$. Entonces, ensayamos soluciones particulares de la forma

$$\tilde{z} = k \cos(\alpha x + \beta y) + l \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y)$$

- Si $\phi(\alpha i, \beta i) = 0$, ensayamos soluciones de la forma

$$\tilde{z} = \begin{cases} x\left(k \cos(\alpha x + \beta y) + l \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y)\right) \\ y\left(k \cos(\alpha x + \beta y) + l \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y)\right) \end{cases}$$

Ejemplo:

$$z''_{xx} - 2z'_y = \operatorname{sen}(3x - y)$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \rightarrow \phi(\alpha i, \beta i) = -9 + 2i \neq 0$$

La solución particular la tomamos de la forma

$$\tilde{z} = l \cos(3x - y) + k \operatorname{sen}(3x - y) \rightarrow \begin{cases} z'_x = 3k \cos(3x - y) - 3l \operatorname{sen}(3x - y) \\ z''_{xx} = -9k \operatorname{sen}(3x - y) - 9l \cos(3x - y) \\ z'_y = -k \cos(3x - y) + l \operatorname{sen}(3x - y) \end{cases}$$

y la ecuación queda

$$\operatorname{sen}(3x - y)(-9k - 2l) + \cos(3x - y)(9l + 2k) = \operatorname{sen}(3x - y)$$

por lo que sólo tenemos que resolver el siguiente sistema para obtener l y k:

$$\begin{cases} -9k - 2l = 1 \\ 2k - 9l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{9}{85} \\ l = -\frac{2}{85} \end{cases}$$

■

Ejemplo:

$$z''_{xx} + z''_{yy} + 2z = \cos(x+y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right. \to \phi(i,i) = 0$$

Ensayamos

$$\tilde{z} = x\left(A\cos(x+y) + B\,\mathrm{sen}\,(x+y)\right) \to \left\{ \begin{array}{l} z''_{yy} = x\left(-A\cos(x+y) - B\,\mathrm{sen}\,(x+y)\right) \\ z'_x = x\left(-A\,\mathrm{sen}\,(x+y) + B\cos(x+y)\right) + A\cos(x+y) + B\,\mathrm{sen}\,(x+y) \\ z''_{xx} = -2A\,\mathrm{sen}\,(x+y) + 2B\cos(x+y) + \\ \qquad +x\left(-A\cos(x+y) - B\,\mathrm{sen}\,(x+y)\right) \end{array} \right.$$

Que llevado a la ecuación queda

$$\cos(x+y)\,2B - 2A\,\mathrm{sen}\,(x+y) = \cos(x+y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1/2 \end{array} \right.$$

$$\tilde{z} = \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,(x+y)$$

■

c) $F(x,y) = x^m y^n + \dots$

Es un polinomio entero en xy. En las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden vimos que para una ecuación como

$$\left(D^2+1\right)y = \left(3x^2+5x+3\right)$$

ensayábamos soluciones particulares de la forma

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$$

pero si no aparecía el término en y, por ejemplo

$$\left(D^2+D\right)y = 3x^2+5x+3$$

entonces las soluciones particulares eran

$$\tilde{y} = \left(Ax^2+Bx+C\right)x$$

Elevando x al menor orden de derivación que aparecía en la ecuación diferencial.

En este caso, es bastante similar:

- Si en $\phi(D_x, D_y)\,z$ aparece coeficiente en z distinto de cero, ensayamos con polinomios de la forma de $F(x,y)$, es decir

$$\tilde{z} = A_1 x^m y^n + \dots$$

- Sin embargo, si en $\phi(D_x, D_y)$ no aparecen z, z'_x ni z'_y, entonces

$$\tilde{z} = A_1 x^{m+2} y^{n+2} + \dots$$

Ejemplo:

$$z''_{xy} - 2z'_x + z = x^2 y$$

La solución particular será de la forma

$$\tilde{z} = Ax^2 y + Bxy + Cy + Dx^2 + Ex + F$$

$$\begin{cases} -2z'_x = -4Axy - 2By - 4Dx - 2E \\ z''_{xy} = 2Ax + B \end{cases}$$

y al meterlas en la ecuación, tenemos

$$2Ax + B - 4Axy - 2By - 4Dx - 2E + Ax^2 y + Bxy + Cy + Dx^2 + Ex + F = x^2 y$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ D = 0 \\ B = 4A = 4 \\ E = -2 \\ C - 2B = 0 \Rightarrow C = 8 \\ B - 2E + F = 0 \Rightarrow F = -8 \end{cases}$$

Así que, finalmente, la solución particular es

$$\tilde{z} = x^2 y + 4xy + 8y - 2x - 8$$

■

d) $F(x,y) = (x^m y^n + \ldots)\, e^{\alpha x + \beta y}$

Aplicando el lema que vimos en el tema 2 a

$$\phi(D_x, D_y)\, z = g(x,y)\, e^{\alpha x + \beta y}$$

tenemos que

$$D_x^k\, e^{\alpha x + \beta y}\, g(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}\, (D_x + \alpha)^k\, g(x,y)$$

y

$$D_y^h\, e^{\alpha x + \beta y}\, g(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}\, (D_y + \beta)^h\, g(x,y)$$

por tanto, la ecuación queda

$$\phi(D_x, D_y)\, e^{\alpha x + \beta y}\, g(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}\, \phi(D_x + \alpha, D_y + \beta)\, g(x,y)$$

Así que las soluciones particulares de la ecuación

$$\phi(D_x, D_y)\, z = g(x,y)\, e^{\alpha x + \beta y}$$

son

$$\tilde{z} = \tilde{h}\, e^{\alpha x + \beta y}$$

donde $\tilde{h}$ es solución particular de

$$\phi(D_x + \alpha, D_y + \beta)\, h = g(x,y)$$

Ejemplo:

$$z''_{xy} - z'_y + z = x^2 y\, e^{x-2y}$$

Hallamos la solución particular. La homogénea queda indeterminada porque no es reducible y está el término cruzado.

$$(D_x D_y - D_y + 1)\, z = x^2 y\, e^{x-2y}$$

$$\tilde{z} = \tilde{h}\, e^{x-2y}$$

Siendo $\tilde{h}$ solución particular de

$$((D_x + 1)(D_y - 2) - D_y - \beta + 1)\, h = x^2 y$$

Que queda

$$(D_x D_y - 2D_x + 1)\, h = x^2 y$$

que se resuelve igual que en uno de los ejemplos anteriores. ■

e) $F(x, y)$ suma de todos los anteriores

Como son ecuaciones lineales, la solución particular será la suma de las particulares por cada uno de los sumandos.

6.7 Ecuaciones en derivadas parciales de Euler

Son semejantes a las que vimos en el tema 2, pero esta vez con 2 variables independientes.

$$\sum c_{m,n} x^m y^n D_x^m D_y^n z = F(x, y)$$

Haciendo el cambio

$$\begin{cases} x = e^u \\ y = e^v \end{cases}$$

Se convierte en una ecuación en derivadas parciales de coeficientes constantes.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}; \frac{dv}{dy} = \frac{1}{y}$$

Para las derivadas con respecto a x, tenemos

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = D_u z \frac{1}{x} \Rightarrow x z'_x = D_u z$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_u z \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} D_u z + \frac{1}{x} D_u^2 \frac{du}{dx} \Rightarrow x^2 z''_{xx} = D_u (D_u - 1)\, z$$

$$x^3 z'''_{xxx} = D_u (D_u - 1)(D_u - 2)$$

en general,

$$x^m z^{(m)}_{x^m} = \left(\prod_{n=0}^{m-1} (D_u - n)\right) z$$

Para la variable y es igual, y se obtiene

$$y^n z_{y^n}^{(n)} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (D_v - k) \right) z$$

Y para los cruzados se multiplican ambos:

$$x^m y^n D_x^m D_y^n z = \left(\prod_{n=0}^{m-1} (D_u - n) \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (D_v - k) \right) z$$

Ejemplo:

$$x^2 z''_{xx} - 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} - x z'_x + 3y z'_y = \frac{4 \ln x}{y^2}$$

Hacemos el cambio correspondiente,

$$\begin{cases} x = e^u \\ y = e^v \end{cases}$$

Y nos queda la siguiente ecuación de coeficientes constantes:

$$(D_u (D_u - 1) - 2D_u D_v + D_v (D_v - 1) - D_u + 3D_v) z = 4u \, e^{-2v}$$

Que es de uno de los tipos que vimos antes. ■

TEMA 7

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Segundo Orden (II)

En este tema veremos las ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales y de contorno, así como la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales.

7.1 Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Dada la ecuación en derivadas parciales

$$Rz''_{xx} + Sz''_{yy} + Tz''_{xy} + Pz'_x + Qz'_y + Zz = F(x,y)$$

Por su analogía con las cónicas,

$$Rx^2 + Sy^2 + Txy + Px + Qy + z$$

Podemos distinguir, según $S^2 - 4RT$:

$$S^2 - 4RT \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{reducible a parabólica} \\ > 0 \rightarrow \text{reducible a hiperbólica} \\ < 0 \rightarrow \text{elíptica} \end{cases}$$

Buscamos el cambio

$$\begin{cases} r = r(x,y) \\ s = s(x,y) \end{cases}$$

con r y s dos veces derivables y tales que el Jacobiano

$$\frac{J(r,s)}{J(x,y)} \neq 0$$

Las derivadas de z se obtienen fácilmente:

$$\begin{cases} z'_x = z'_r r'_x + z'_s s'_x \\ z'_y = z'_r r'_y + z'_s s'_y \\ \vdots \end{cases}$$

y al sustituir finalmente en la ecuación, queda

$$B_1 z''_{rr} + B_2 z''_{rs} + B_3 z''_{ss} + B_4 z'_r + B_5 z'_s + B_6 z = f(r,s)$$

De donde

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = R\left(r_x^{'}\right)^2 + Sr_x^{'}r_y^{'} + T\left(r_y^{'}\right)^2 \\ B_3 = R\left(s_x^{'}\right)^2 + Ss_x^{'}s_y^{'} + T\left(s_y^{'}\right)^2 \\ B_6 = Z \end{array} \right.$$

Para hallar r y s, hacemos $B_1 = B_3 = 0$ si $R \neq 0$:

$$R\left(f_x^{'}\right)^2 + Sf_x^{'}f_y^{'} + T\left(f_y^{'}\right)^2 = 0$$

Donde $f = r, s$. Dividiendo por $\left(f_y^{'}\right)^2$

$$R\left(\frac{f_x^{'}}{f_y^{'}}\right)^2 + S\frac{f_x^{'}}{f_y^{'}} + T = 0$$

Podemos escribir

$$\left(\frac{f_x^{'}}{f_y^{'}}\right) = \frac{-dy}{dx} = -y^{'}(x)$$

si $f(x,y) = C \Rightarrow df = 0$, con lo que

$$f_x^{'}dx + f_y^{'}dy = 0$$

y se obtiene la expresión anterior. Por tanto, la ecuación queda

$$R\left(y^{'}(x)\right)^2 - Sy^{'}(x) + T = 0$$

una ecuación de segundo grado que se puede resolver de la siguiente forma:

$$y^{'}(x) = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \to y(x) = \lambda_1 x + c_1 \\ \lambda_2 \to y(x) = \lambda_2 x + c_2 \end{array} \right.$$

Podemos tener varias posibilidades según el valor de $S^2 - 4RT$:

7.1.1 $S^2 - 4RT > 0$

Se obtienen raices λ_1, λ_2 reales y distintas, por lo que tomamos

$$\left\{ \begin{array}{l} r = y - \lambda_1 x \\ s = y - \lambda_2 x \end{array} \right.$$

transformándose la ecuación en la siguiente forma canónica

$$B_2 z_{rs}^{''} = -B_4 z_r^{'} - B_5 z_s^{'} - B_6 z + f(r,s)$$

que se llama **primera forma canónica**. Nos interesa sin embargo una forma canónica en la que no aparezca el término cruzado para que podamos usar el método de separación de variables. Esto se consigue con el cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} r + s = \alpha \\ r - s = \beta \end{array} \right.$$

con el que se obtiene la **segunda forma canónica**:

$$z_{\alpha\alpha}^{''} - z_{\beta\beta}^{''} = C_4 z_\alpha^{'} + C_5 z_\beta^{'} + C_6 z + g(\alpha,\beta)$$

Si $R = 0$, no podríamos calcular λ_1 y λ_2, pero la ecuación sería

$$Sf_x^{'}f_y^{'} + T\left(f_y^{'}\right)^2 = 0$$

de forma que, dividiendo por $\left(f_x^{'}\right)^2$ obtenemos la siguiente

$$S\frac{f_y^{'}}{f_x^{'}} + T\left(\frac{f_y^{'}}{f_x^{'}}\right)^2 = 0$$

y como

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y^{'}}{f_x^{'}} = x^{'}(y)$$

la ecuación se puede escribir como

$$-Sx^{'}(y) + T\left(x^{'}(y)\right)^2 = 0 \to x^{'}(y)\left(Tx^{'}(y) - S\right) = 0$$

Tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} x^{'}(y) = 0 \Rightarrow x = c_1 \\ Tx^{'}(y) - S = 0 \Rightarrow x^{'}(y) = \frac{S}{T} \Rightarrow x(y) = \frac{S}{T}y + c_2 \end{cases}$$

con lo que tenemos

$$\begin{cases} r = x \\ s = x - \frac{S}{T}y \end{cases}$$

Con este cambio vamos a llegar a la misma primera forma canónica y hay que hacer el mismo cambio que en el caso en que $R \neq 0$.

7.1.2 $S^2 - 4RT = 0$

En este caso, tenemos 1 sola raiz real de multiplicidad 2.

Si $R = 0$, entonces $S = 0$ y la forma canónica no tiene término cruzado, por lo que el caso de interés es cuando $R \neq 0$:

$$y^{'}(x) = \frac{S}{2R} \Rightarrow y = \frac{S}{2R}x + c_1$$

Sólo podemos obtener 1 curva característica, por lo que nos inventamos la otra

$$\begin{cases} r = y - \frac{S}{2R}x \\ \\ s = k_1 x + k_2 y \end{cases}$$

y exigimos que

$$\frac{J(r,s)}{J(x,y)} \neq 0$$

lo cual nos lleva a

$$-\frac{S}{2R}k_2 - k_1 \neq 0$$

7.1.3 $S^2 - 4RT < 0$

Ahora tenemos dos raices complejas conjugadas:

$$y^{'}(x) = \frac{S}{2R} \pm i\frac{\sqrt{4RT - S^2}}{2R} = a \pm ib$$

y hacemos lo mismo que en el primer caso:

$$\begin{cases} y - (a+ib)x = c_1 = r \\ y - (a-ib)x = c_2 = s \end{cases}$$

pero el cambio para obtener la segunda forma canónica es

$$\begin{cases} \frac{r+s}{2} = \alpha \\ \\ \frac{r-s}{2i} = \beta \end{cases}$$

Ejemplo:

$$z''_{xy} - 2z'_x + z = x^2 y$$

La solución homogénea la tenemos calculada de un ejemplo del tema anterior. ϕ no es reducible:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

La ecuación tiene la misma pinta que la primera forma canónica, por lo que podemos hacer directamente el cambio

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

y se convierte en

$$\begin{cases} z'_x = z'_\alpha \alpha'_x + z'_\beta \beta'_x = z'_\alpha + z'_\beta \\ z''_{xy} = z''_{\alpha\alpha}\alpha'_y + z''_{\alpha\beta}\beta'_y + z''_{\beta\alpha}\alpha'_y + z''_{\beta\beta}\beta'_y = z''_{\alpha\alpha} - z''_{\beta\beta} \end{cases}$$

llevándolo a la ecuación tenemos la siguiente ecuación de variables separadas:

$$z''_{\alpha\alpha} - z''_{\beta\beta} - 2z'_\alpha - 2z'_\beta + z = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

■

7.2 Condiciones iniciales y de contorno para ecuaciones en derivadas parciales

En las ecuaciones diferenciales ordinarias, veíamos que el número de condiciones iniciales es igual al orden de la ecuación diferencial.

En ecuaciones en derivadas parciales tenemos 2 variables independientes, una de las cuales se considerará el **tiempo**, así que las condiciones iniciales las daremos para el tiempo. Esto es por las aplicaciones en Telecomunicaciones de las EDP.

El número de condiciones iniciales coincide con el orden de la ecuación en derivadas parciales con respecto al tiempo.

Por ejemplo, en la ecuación de ondas,

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx} + A(x,t)$$

es de segundo orden con respecto a t, por lo que habrá 2 condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

donde f y g son continuas en cierto intervalo donde la ecuación tiene solución.

Por contra, en la ecuación de calor,

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + B(x,t)$$

el orden de derivación de t es 1, por lo que habrá una única condición inicial:

$$u(x,0) = f(x)$$

- Definimos las **condiciones de contorno** como valores en la frontera de una región en la que la ecuación tiene solución.

Hay varios tipos de condiciones de contorno para ecuaciones de segundo grado. Por ejemplo, para las ecuaciones diferenciales ordinarias:

- Condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

- Condiciones de Neumann

$$\begin{cases} y'(a) = y_a \\ y'(b) = y_b \end{cases}$$

- Condiciones de Robin

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = y_a \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = y_b \end{cases}$$

Es decir, que se pueden dar en función de los valores de la solución, de su derivada o de una combinación lineal de ambas.

Vemos ahora las condiciones de contorno para las ecuaciones en derivadas parciales:

7.2.1 Condiciones de contorno de Dirichlet

Si la ecuación en derivadas parciales tiene solución en una cierta región Ω y $x \in [0, l]$:

$$u(x,t)\big|_{Fr(\Omega)} \rightarrow \begin{cases} u(0,t) \\ u(l,t) \end{cases}$$

7.2.2 Condiciones de contorno de Neumann

Con las mismas condiciones que antes, siendo $\frac{\partial}{\partial n}$ la derivada direccional:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)\right|_{Fr(\Omega)} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) \end{cases}$$

7.2.3 Condiciones de contorno de Robin

$$\left.\alpha u(x,t) + \beta\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)\right|_{Fr(\Omega)}$$

7.3 Solución de la ecuación de ondas con condiciones iniciales

Tenemos la ecuación de ondas homogénea y unas condiciones iniciales en $t = 0$,

$$\begin{cases} u''_{tt} = c^2 u''_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

donde f y g son funciones continuas en la región donde la ecuación tiene solución.

Se resuelve de la misma forma que con ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. Hallar la solución general
2. Aplicar las condiciones iniciales

$$\left(D_t^2 - c^2 D_x^2\right) u = 0 \to \left(D_t - cD_x\right)\left(D_t + cD_x\right) u = 0$$

con lo que la solución general es

$$u\left(x,t\right) = \varphi_1\left(x+ct\right) + \varphi_2\left(x-ct\right)$$

Imponemos las condiciones iniciales y determinamos con ellas φ_1 y φ_2. Primero hacemos el cambio siguiente:

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

Con lo que

$$u_t^{'} = \frac{d\varphi_1}{du}c - \frac{d\varphi_2}{dv}c$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right) + \varphi_2\left(x\right) = f\left(x\right)$$

$$u_t^{'}\left(x,0\right) = c\left(\frac{d\varphi_1\left(x\right)}{dx} - \frac{d\varphi_2\left(x\right)}{dx}\right) = g\left(x\right)$$

Tenemos un sistema para determinar φ_1 y φ_2:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x\right) - \varphi_2\left(x\right) = \frac{1}{c}\int_\alpha^x g\left(\xi\right)d\xi \\ \\ \varphi_1\left(x\right) + \varphi_2\left(x\right) = f\left(x\right) \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$\varphi_1\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{2} + \frac{1}{2C}\int_\alpha^x g\left(\xi\right)d\xi$$

y restándolas,

$$\varphi_2\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{2} - \frac{1}{2C}\int_\alpha^x g\left(\xi\right)d\xi$$

Así queda la solución:

$$u\left(x,t\right) = \frac{f\left(x+ct\right) + f\left(x-ct\right)}{2} + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} g\left(\xi\right)d\xi$$

llamada **solución de D'Alembert**.

7.4 Solución de la ecuación de ondas con condiciones iniciales y de contorno

Ahora tratamos de hallar la solución a la ecuación

$$u_{tt}^{''} = c^2 u_{xx}^{''}$$

válida en $[0, l]$, con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u\left(x,0\right) = f\left(x\right) \\ u_t^{'}\left(x,0\right) = g\left(x\right) \end{cases}$$

siendo f y g continuas en $[0, l]$ y con las condiciones de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Con el método que hemos visto antes no se puede hallar para las condiciones de contorno. Hay que hallar la solución por el método de separación de variables.

Buscamos por tanto una solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

con lo que la ecuación nos queda

$$XT'' = c^2 X'' T$$

Dividiendo por XT

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}\frac{1}{c^2} = -\lambda$$

donde λ es una constante. Nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} T'' + \lambda c^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases}$$

Empezamos por la segunda:

$$r^2 = -\lambda$$

tenemos varias posibilidades:

$$\begin{cases} \lambda > 0 \to r = \pm\sqrt{\lambda} i \\ \lambda = 0 \to r = 0 \\ \lambda < 0 \to r = \pm\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

El carácter vibratorio lo da $\lambda > 0$, y además en las otras dos, al poner las condiciones de contorno, siempre se obtiene la solución trivial, $u(x,t) = 0$. Por ejemplo, para $\lambda = 0$,

$$X = c_1 x + c_2$$

al aplicar

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

se obtiene

$$\begin{cases} X(0) = 0 = c_2 \\ X(l) = l = c_1 l + c_2 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 0 \to u(x,t) = 0$$

Por tanto, nos quedamos con $\lambda > 0$. En este caso, la ecuación es

$$x'' + \lambda x = 0$$

y la solución tiene la forma

$$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x$$

Aplicando las condiciones de contorno a la solución,

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(l) = 0 \Rightarrow c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases}$$

ya que buscamos la solución no trivial, $c_2 = 0$ no nos sirve. De esto se obtiene que

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Tenemos infinitos valores de λ. La solución es

$$X = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Ahora hallamos la solución de T:

$$T^{''} + \lambda c^2 T = 0 \rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}c$$

ya que hemos considerado el caso de $\lambda > 0$. Entonces, la solución tiene la forma

$$T = c_3 \cos\left(\sqrt{\lambda}ct\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}ct\right) \rightarrow T = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)$$

Aplicamos el principio de superposición de soluciones y obtenemos la siguiente serie:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + \beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

Donde $\alpha_n = c_n A_n$ y $\beta_n = c_n B_n$. Ahora aplicamos las condiciones iniciales para determinar α_n y β_n:

$$u_t^{'}\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(-\frac{cn\pi}{l}\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l} + \frac{cn\pi}{l}\beta_n \cos\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

$t = 0$:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$g\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{cn\pi}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

Si hacemos el desarrollo en series de Fourier de $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ convirtiéndolas en funciones impares para que sólo aparezcan los términos en senos:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x$$

$$g\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x$$

podemos establecer finalmente

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_n = \alpha_n^* \\ \beta_n = \frac{l}{n\pi c}\beta_n^* \end{array}\right.$$

donde, como sabemos,

$$\alpha_n^* = \frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}dx$$

y

$$\beta_n^* = \frac{2}{l}\int_0^l g\left(x\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}dx$$

Ejemplo:

Hallar la solución de

$$u_t^{'} = u_{xx}^{''}$$

válida en $[0, 2]$, con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

y la condición inicial

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

En primer lugar, tenemos que resolver la ecuación por el método de separación de variables:

$$XT^{'} = X^{''}T$$

$$\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T^{'} + \lambda T = 0 \\ X^{''} + \lambda X = 0 \end{cases}$$

Todo es muy parecido al desarrollo que vimos para la ecuación de onda.

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

$$T = A\, e^{-\lambda t} \rightarrow T = A_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$$

Aplicando la condición inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

De donde sacamos

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto, la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$$

■

Bibliografía

[1] *Calculus II*, Apostol, T.M; Ed. Reverté 1995

[2] *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Elsgolth; Ed. Mir 1992

[3] *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*, Edwards/Penney; Ed. Prentice Hall 1994

[4] *Ecuaciones diferenciales*, Ayres, F.; Ed. Schaum McGraw-Hill 1996

[5] *Las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones* (Curso elemental de matemáticas superiores, tomo 5), Quinet, M.J.; Ed. Paraninfo 1967

[6] Relaciones de problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales 2, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación, Universidad de Málaga