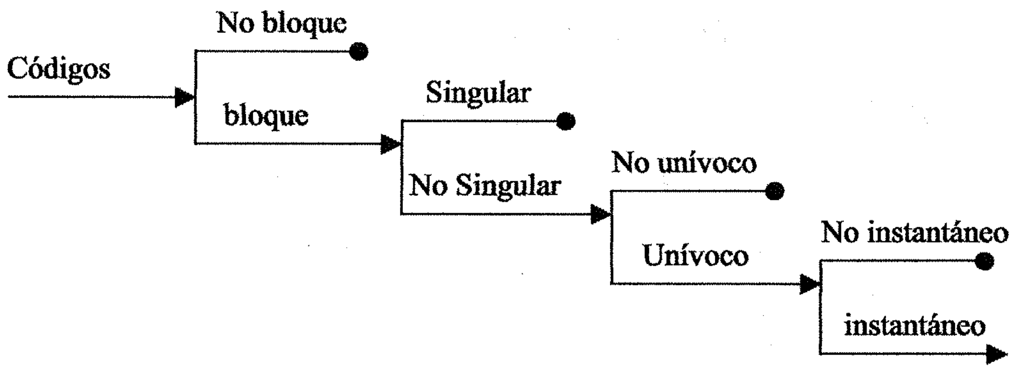
Clasificación de códigos



Ejemplos de códigos

Símbolos de la fuente	Código A	Código B	Código C	Código D
s_1	0	0	0	0
s_2	11	11	10	100
s_3	00	00	110	110
s_4	11	01	11	11
	Singular	No unívoco	No unívoco	No unívoco
Inec.Kraft	No	No	No	Sí

Símbolos de la fuente	Código E	Código F	Código G	Código H
s_1	0	00	0	0
s_2	01	01	10	10
s_3	011	10	110	110
s_4	0111	11	1110	111
	Unívoco	Instantáneo	Instantáneo	Instantáneo
Inec.Kraft	Sí	Sí	Sí	Sí

Codificación Huffman

REDUCCIÓN DE FUENTE

Fuente original		Fuentes reducidas			
Símbolos	**Probabilidades**	S_1	S_2	S_3	S_4
s_1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6
s_2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4
s_3	0.1	0.1	0.2	0.3	
s_4	0.1	0.1	0.1		
s_5	0.06	0.1			
s_6	0.04				

C_i = 20,14

CODIFICACIÓN

Fuente original			Fuentes reducidas							
Símbolos	**Probabilidades**		S_1		S_2		S_3		S_4	
s_1	0.4	**1**	0.4	**1**	0.4	**1**	0.4	**1**	0.6	**0**
s_2	0.3	**00**	0.3	**00**	0.3	**00**	0.3	**00**	0.4	**1**
s_3	0.1	**0100**	0.1	**011**	0.2	**010**	0.3	**01**		
s_4	0.1	**0101**	0.1	**0100**	0.1	**011**				
s_5	0.06	**0110**	0.1	**0101**						
s_6	0.04	**0111**								

Ejemplo codificación según algoritmo Lempel-Ziv

Secuencia a codificar: 001001100100110

Ls = 8 n = 16 Lc = 1 + ceil[log(16-8)] + ceil[log(8)] = 7

A	B		Px	lx	1
00000000	00100110		000	010	1
00000001	00110010		101	011	1
00010011	00100110		001	111	0

Para tener un buen rendimiento los buffers tienen que ser largos

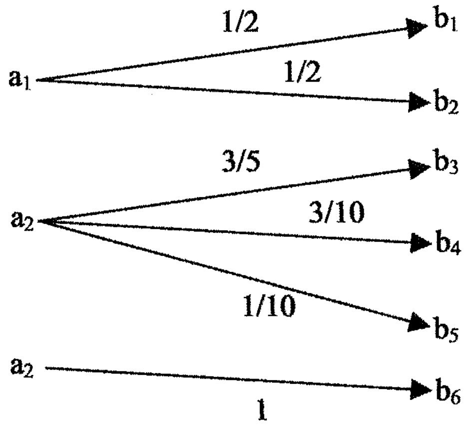
Ej: A: 4096 bits = 2^{12} (P_x = 12 bits)
B = 128 bits = 2^7 (l_x = 7 bits)

Palabra código = 20 bits

Ejemplos de canales

Canal sin ruido

sólo un elemento de cada columna distinto de cero

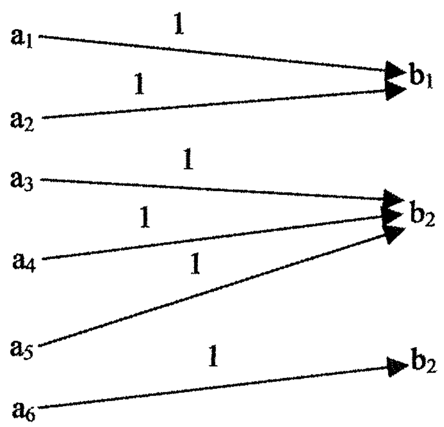


$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \max\{I(A;B)\} = \max\{H(A) - \overset{0}{H(A/B)}\} = \log q$$

Canal determinante

sólo un elemento de cada fila distinto de cero



$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \log r$$

Canal uniforme

sus filas son permutaciones de la primera

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$C = \max \{H(B)\} - \sum_i p(b_j|a_i) \log \frac{1}{p(b_j|a_i)}$$

Canal débilmente simétrico

la suma de los elementos de las columnas es igual para todas las columnas

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$C = \log r - \sum_i p(b_j|a_i) \log \frac{1}{p(b_j|a_i)}$$

Canal simétrico

mismos elementos en filas y columnas, permutados

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C = \log r - \sum_i p(b_j|a_i) \log \frac{1}{p(b_j|a_i)}$$

Ejemplo de Canal Uniforme. Cálculo de la capacidad

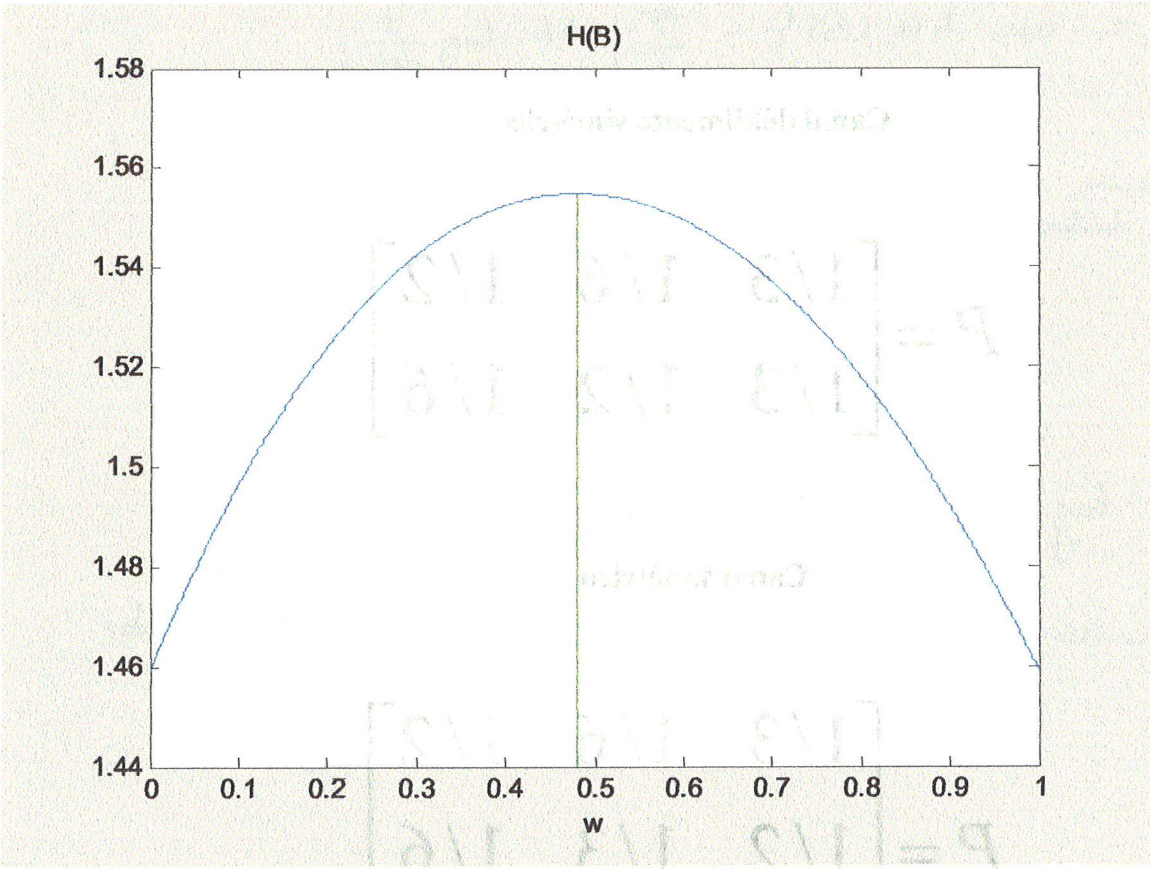
$\{a_1, a_2\} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$p(a_1) = w$ $\Rightarrow p(a_2) = \bar{w}$

$p(b_1) = w/3 + (1-w)/2$
$p(b_2) = w/6 + (1-w)/3$
$p(b_3) = w/2 + (1-w)/6$

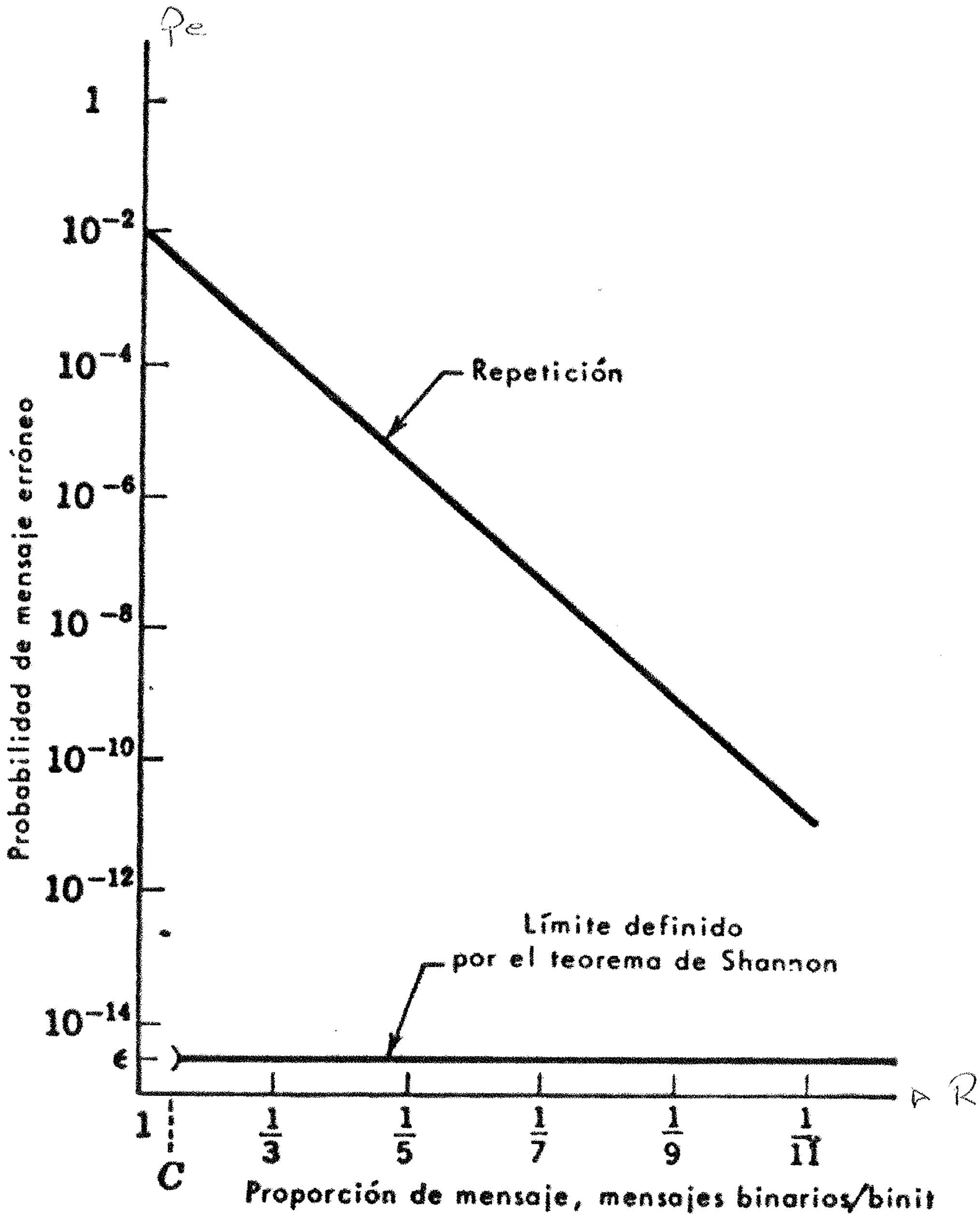
no hay ningún valor de w que verifique $p(b_1) = p(b_2) = p(b_3)$



Max H(B) = 1.554 para w = 0.48 $\neq$ símbolos de entrada equiprobables
log3 = 1.584 $(p(b_1) = p(b_2) = p(b_3))$

$$C = \begin{Bmatrix} Max\ H(B) \\ p(a_i) \end{Bmatrix} - \sum_j p(b_j / a_i) \log \frac{1}{p(b_j / a_i)} = 0.095\ bits$$

Codificación por Repetición



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE COMUNICACIONES ANALÓGICAS
TEMA I: TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

I.1. Dos fuentes de memoria nula, S_1 y S_2, tienen q_1 y q_2 símbolos, respectivamente. Los símbolos de S_1 se representan con probabilidades P_i, i = 1, 2,....,q; los de S_2 con Q_i, i = 1, 2, ..., q_2; las entropías de ambas son H_1 y H_2, respectivamente. Una nueva fuente de memoria nula $S(\lambda)$, compuesta de S_1 y S_2, está formada por $q_1 + q_2$. símbolos. Los q_1 primeros símbolos de $S(\lambda)$ tiene probabilidades λPi, i = 1,2,...q_1, y los últimos q_2 probabilidades $(1-\lambda)Q_i$, i = 1, 2, ..,q_2.

- **a)** Demuestre que $H[S(\lambda)] = \lambda H_1 + (1-\lambda)H_2 + H(\lambda)$ dando una interpretación a esta igualdad.
- **b)** Exprese λ_0, valor de λ que hace máximo a $H[S(\lambda)]$, en función de H_1 y H_2. Calcular $H[S(\lambda_0)]$.

I.2. Sea S_0 la extensión de tercer orden de una fuente binaria de memoria nula, cuya probabilidad de emitir un 0 es igual a p. Otra fuente, S, observa las salidas de S_0, emitiendo un 0, 1, 2 ó 3 según la salida de S_0 contenga 0, 1, 2 ó 3 ceros.

- **a)** Calcule $H(S_0)$.
- **b)** Calcule H(S).
- **c)** Calcule $H(S_0) - H(S)$. Interprete el significado de esta diferencia de entropías.

I.3. Sea X una variable aleatoria de distribución geométrica, cuya probabilidad viene definida por: $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ con k=1,2,3,...

- **a)** Determine H(X)
- **b)** Si se sabe que X > K donde K en entero positivo, ¿cuál es la entropía de X?

I.4. Demuestre que si Y = g(X) donde g es una función determinista, entonces H(Y/X)=0.

I.5. Las palabras de un código instantáneo tiene longitudes l_1, l_2,..,l_q, que satisfacen la inecuación:

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} < 1$$

Su alfabeto es $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$. Demuestre que existen secuencias de símbolos x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}... que no pueden ser decodificadas en secuencias de palabras.

√ **I.6.** Una secuencia de símbolos de S^n se codifica en un alfabeto $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, según el método de Huffman. El resultado puede considerarse una nueva fuente de información de alfabeto X. Demuestre que la probabilidad de los símbolos x_i de la nueva fuente tiende a 1/r al crecer n.

√ **I.7.** Dada la tabla:

S	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$P(s_i)$	1/3	1/3	1/9	1/9	1/27	1/27	1/27

a) Calcule H(S) y $H_3(S)$

b) Encuentre códigos compactos de H(S) cuando X = {0,1} y X = {0,1,2}

c) Calcule el valor de L en ambos casos.

√ **I.8.**

a) Determínese cuál de los siguientes conjuntos de longitudes son válidas para un código unívoco binario.

Longitud de la palabra l_i	1	2	3	4	5
Nº de palabras de longitud l_i por código:					
Código A	0	0	5	0	0
Código B	1	1	1	2	0
Código C	0	2	3	0	0
Código D	1	2	0	2	0
Código E	1	1	3	0	0

b) Para una fuente de símbolos x_1......x_5 con probabilidades 1/2 ,1/4,1/8,1/16, 1/16, construir con cada conjunto de longitudes válido un código instantáneo y hallar su longitud media.

c) ¿Alguno de estos códigos es de Huffman?

I.9. Sean P_1 y P_2 las matrices de dos canales de alfabetos de entrada A_1 y A_2 y de salida B_1 y B_2, respectivamente. Formar una nueva matriz **P** de alfabeto de entrada $A = A_1 \cup A_2$ y de salida $B = B_1 \cup B_2$, como se muestra a continuación:

$$P = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{vmatrix}$$

O representa una matriz de elementos nulos.
Sea $P(a_i)$ la probabilidad de un símbolo de entrada $a_i \in A$. Supongamos

$$Q_1 = \sum_{A_1} P(a_i) \qquad\qquad Q_2 = \sum_{A_2} P(a_i)$$

Q_i es la probabilidad de que un símbolo de A_i sea enviado. Sean C_1, C_2 y C las capacidades respectivas de P_1, P_2 y P.

a) Calcule los valores de Q_i (en función de C_1 y C_2) que dan lugar a la capacidad del canal P.

b) Calcule C en función de C_1 y C_2.

c) Generalice los resultados de a) y b) al caso en se combinan n canales, en lugar de dos.

d) Calcule la capacidad de los siguientes canales a partir de los cálculos anteriores:

$$\begin{vmatrix} \overline{p} & p & 0 & 0 \\ p & \overline{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{p} & p \\ 0 & 0 & p & \overline{p} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} & p \\ 0 & p & \overline{p} \end{vmatrix}$$

I.10. Encuentre la capacidad del canal siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{vmatrix}$$

I.11. X es una fuente binaria sin memoria con $p(X=0) = 0.2$. Esta fuente es transmitida por canal binario simétrico con $p = 0.02$.

a) Si se conecta la fuente directamente al canal sin hacer ninguna codificación, ¿cuál es la probabilidad de error en el destino?

b) Si se utiliza codificación, ¿cuál es la mínima probabilidad de error que se puede alcanzar?

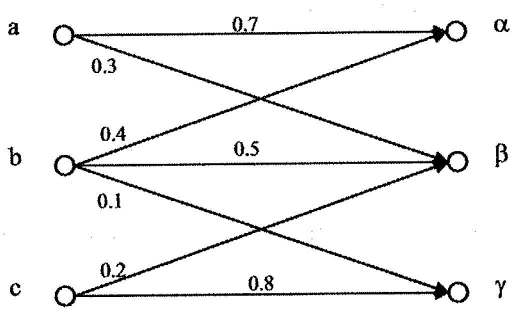
c) Para qué valores de p es posible la transmisión sin errores.

I.12. Calcule la capacidad del siguiente canal y la distribución de entrada que la consigue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix}$$

I.13. Obtenga las reglas de decisión óptima y de máxima verosimilitud para el canal de la figura adjunta, e indique la probabilidad de error en cada caso. Las probabilidades de ocurrencia de los símbolos del alfabeto fuente son:

P(a) = 0.2 ; P(b) = 0.5 ; P(c) = 0.3



I.14.

a) Demuestre que de entre todas las variables aleatorias continuas de varianza σ^2, la variable aleatoria de distribución Gaussiana es la que tiene máxima entropía. Para ello definir dos distribuciones: una arbitraria y otra gaussiana; y usar la aproximación $\ln x \leq x-1$.

b) Demuestre que de entre todas las variables aleatorias continuas distribuidas sobre el eje real positivo y que tienen media *m*, la variable aleatoria de distribución exponencial es la que tiene mayor entropía. Seguir un proceso similar al apartado a)

c) Demuestre que de entre todas las variables aleatorias continuas distribuidas en un intervalo finito, la variable aleatoria de distribución uniforme es la que tiene mayor entropía. Seguir un proceso similar a los apartados anteriores.

I.15. El canal C_1 es un canal con ruido gaussiano aditivo y un ancho de banda W, la potencia transmitida es P, y la densidad espectral de potencia del ruido es $N_0/2$. El canal C_2 es un canal con ruido gaussiano aditivo con el mismo ancho de banda y potencia transmitida que C_1 pero la densidad espectral de potencia del ruido es $S_n(f)$. Se asume que la potencia de ruido total de ambos canales es la misma, es decir:

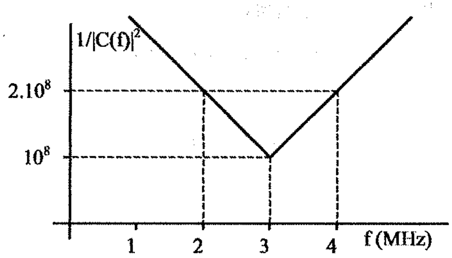
$$\int_{-W}^{W} S_n(f)df = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2} df = N_0 W$$

¿Qué canal tendrá mayor capacidad? Dé una respuesta intuitiva.

I.16. Un canal radio tiene una respuesta en frecuencia C(f). En la figura adjunta se representa la inversa del módulo al cuadrado de dicha respuesta. El ruido a la entrada del receptor se puede considerar AWGN con un valor de su densidad espectral de potencia de 10^{-12} w/Hz. El transmisor dispone de 1 w de potencia.

a) Obtenga y dibuje la densidad espectral de potencia a la salida del transmisor que permite alcanzar la capacidad del canal.

b) Indique el procedimiento para calcular la capacidad del canal.



I.17. Dada una fuente sin memoria de 3 símbolos, que ocurren con probabilidades 1/2, 1/3 y 1/6.

a) Haga una codificación Huffman binaria de la fuente y calcule el rendimiento del código construido.

b) Haga lo mismo para la extensión 2 de la fuente.

c) Compare y comente los resultados. ¿Cuál es el límite del rendimiento cuando se reitera indefinidamente dicho proceso?

d) ¿Qué tipo de códigos produce la codificación Huffman? Indique su nombre y significado.

I.18. Considere un canal BSC con matriz:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & \overline{p} \\ \overline{p} & p \end{bmatrix}$$

Sea q la probabilidad de que el símbolo de entrada sea cero.

a) Especifique todas las posibles reglas de decisión

b) Especifique, en función de p y q la decisión óptima.

c) Represente gráficamente, en el plano formado por las variables p y q, la regiones en que la decisión optima se corresponde con cada una de las reglas enumeradas en el apartado a).

I.19. Considere un canal BSC con matriz:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & \overline{p} \\ \overline{p} & p \end{bmatrix}$$

Dicho canal se utiliza para transmitir símbolos de un alfabeto de cuatro elementos. Para ello los símbolos se codifican usando dos bits más un tercero de paridad (de forma que el número de unos en la palabra código de cuatro bits sea siempre par).

Tras recibir por el canal BSC los tres bits de información correspondiente a una palabra código, el decodificador actúa del siguiente modo:

Si el número de unos es par, decodifica el símbolo que corresponda.

Si el número de unos es impar, indica error.

Considere ahora el canal discreto que resulta de agregar el codificador y decodificador descrito, junto al canal BSC.

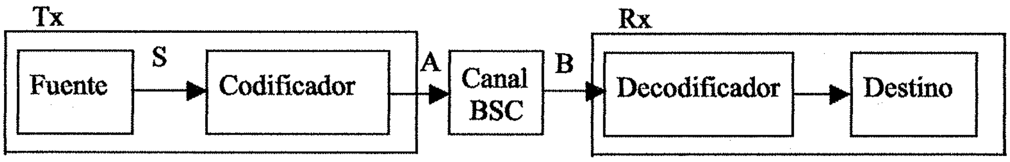
a) Detalle los elementos del nuevo canal: alfabetos de entrada y salida y matriz de probabilidades de transición.

b) Calcule la probabilidad del símbolo error.

c) Indique de que tipo de canal se trata y calcule su capacidad.

d) Compare los valores numéricos de la capacidad y la probabilidad de error del canal resultante con la del BSC que lo soporta, cuando $\overline{p} = 10^{-1}$. Comente los resultados obtenidos.

I.20. Se propone el sistema de comunicaciones de la figura:



a) Si la probabilidad de equivocación del canal binario simétrico es p, indique la capacidad del canal.

b) ¿Cuáles han de ser las probabilidades de los símbolos en el punto A para que se consiga la capacidad?

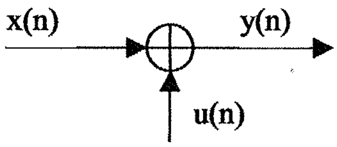
c) Represente gráficamente, en un plano formado por la equivocación del canal, p, y la entropía de la fuente, H(S), las regiones que permiten transmitir por el canal sin errores y las que no. Explique así, de qué manera influye p en la información que se puede transmitir por el canal.

I.21. Sea un canal binario cuyas probabilidades conjuntas son las de la tabla. Obtenga H(X), H(Y), H(X/Y), H(Y/X), I(X;Y), H(X,Y), y la capacidad del canal.

p(x=0,y=0) = 1/3	p(x=1,y=0) = 0
p(x=0,y=1) = 1/3	p(x=1,y=1) = 1/3

Nota: x es la entrada e y la salida del canal.

I.22. Considere el canal gaussiano de tiempo discreto:



La señal u(n) es blanca y gaussiana de potencia igual a la unidad. La frecuencia de muestreo es de 1KHz. La potencia de la señal de entrada es también igual a la unidad.

1. Obtenga la capacidad del canal (expresada en bit/seg), indicando la distribución de probabilidad de la señal x(n) para la que se alcanza.

Suponga ahora que x(n) es una secuencia binaria y blanca, que toma valores ± 1. A partir de y(n) obtenemos otra señal z(n):

$$z(n)=1, \qquad y(n)\geq 0$$
$$z(n)=-1, \qquad y(n)<0$$

2. Identificar la matriz del canal discreto cuya entrada es x(n) y su salida z(n). Obtener su capacidad (expresada en bit/seg).

3. Repetir el punto anterior, si la señal z(n) es ahora:

$$z(n)=1, \qquad y(n)\geq 0.5$$
$$z(n)=-1, \qquad y(n)<0.5$$

NOTA 1: Para realizar el punto 3 es recomendable derivar la capacidad del canal utilizando letras para representar las probabilidades condicionales del canal, y sustituir los valores numéricos al final. También se sugiere expresar la información mutua, utilizando la función entropía:

$$H(p)=-p.\log(p)-\overline{p}.\log(\overline{p})$$
$$\frac{dH(p)}{dp}=\log\left(\frac{\overline{p}}{p}\right)$$

NOTA 2: Por si la necesita le damos la siguiente tabla de la función Q:

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
Q(x)	.5	.460	.421	.382	.345	.309	.274	.242	.212	.184

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Q(x)	.159	.136	.115	.097	.081	.067	.055	.045	.036	.029

OTROS PROBLEMAS PROPUESTOS

Norman Abranson. "Teoría de la Información y Codificación"
2.11 2.12 3.2 3.3 4.4 4.6 4.9 5.1 5.7 5.9 5.17

J.G. Proakis. "Communications System Engineering"
4.1 4.5 4.7 4.8 4.9 4.11 4.15 4.16 4.17 4.22 4.23
4.24 4.25 4.26 4.28 4.29 4.30 4.31 4.35 4.26 4.47 4.38
10.2 10.4 10.5 10.6 10.9 10.13 10.14 10.18

TEMA 1

I.1

$S_1 \to q_1 \,,\; P_i \quad i=1:q_1 \,,\; H_1$

$S_2 \to q_2 \,,\; Q_i \quad i=1:q_2 \,,\; H_2$

$S(\lambda) = S_1 \times S_2 \,,\; q_1 + q_2$

$q_1 \to \lambda p_i \,,\; i=1:q_1$

$q_2 \to (1-\lambda) Q_i \quad i=1:q_2$

a) Demostrar $H(S(\lambda)) = \lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 + H(\lambda)$

$$H(S(\lambda)) = \sum_i \lambda p_i \log \frac{1}{\lambda p_i} + \sum_i (1-\lambda) q_i \log \frac{1}{(1-\lambda) q_i}$$

$$H_1 = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} \qquad H_2 = \sum_i q_i \log \frac{1}{q_i}$$

$$H(S(\lambda)) = \lambda \overbrace{\sum_i p_i \log \frac{1}{p_i}}^{H_1} + \lambda \sum_i p_i \log \frac{1}{\lambda} +$$

$$+ (1-\lambda) \underbrace{\sum_i q_i \log \frac{1}{q_i}}_{H_2} + (1-\lambda) \sum_i q_i \log \frac{1}{1-\lambda}$$

$$\sum_i p_i \log \frac{1}{\lambda} = \log \frac{1}{\lambda} \qquad \sum_i q_i \log \frac{1}{1-\lambda} = \log \frac{1}{1-\lambda}$$

$$\Rightarrow H(S(\lambda)) = \lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 + \underbrace{\lambda \log \frac{1}{\lambda} + (1-\lambda) \log \frac{1}{1-\lambda}}_{H(\lambda)}$$

b) $\lambda_0 = \lambda \,/\, H(S(\lambda))$ es máximo

Expresar $\lambda_0 = f(H_1, H_2)$

$$\frac{dH(S(\lambda))}{d\lambda} = H_1 - H_2 + \frac{dH(\lambda)}{d\lambda}$$

$$H(\lambda) = \lambda \log \frac{1}{\lambda} + (1-\lambda) \log \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{\ln 2}\left(\lambda \cdot \ln \frac{1}{\lambda} + (1-\lambda) \ln \frac{1}{1-\lambda}\right)$$

$$\frac{dH(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln \frac{1}{\lambda} - \cancel{1} - \ln \frac{1}{1-\lambda} + \cancel{1}\right) = \frac{\ln \frac{1-\lambda}{\lambda}}{\ln 2}$$

$$\frac{dH(S(\lambda))}{\lambda} = 0 \Rightarrow H_1 - H_2 = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} = \log \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}$$

$$\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} = 2^{H_1 - H_2} \rightarrow \frac{1}{\lambda_0} - 1 = 2^{H_2 - H_1}$$

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{1}{1 + 2^{H_2 - H_1}}}$$

$$\log \frac{1}{\alpha_0} = \log\left(1 + 2^{H_2 - H_1}\right) \qquad \log \frac{1}{1-\alpha_0} = \log\left(1 + 2^{H_1 - H_2}\right)$$

$$\boxed{H(S(\alpha_0)) = \frac{H_1 + \log\left(1 + 2^{H_2 - H_1}\right)}{1 + 2^{H_2 - H_1}} + \frac{H_2 + \log\left(1 + 2^{H_1 - H_2}\right)}{1 + 2^{H_1 - H_2}}}$$

— o —

I.2

$p_0 = p \longrightarrow p_1 = 1 - p$

$S_0 = \{0, 1\}^3$

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ = nº de ceros de S_0

a) $H(S_0) = 3H(S_b)$

$$H(S_b) = p \log 1/p + (1-p)\log \frac{1}{1-p}$$

$$\boxed{H(S_0) = 3p \log \frac{1}{p} + 3(1-p)\log \frac{1}{1-p}}$$

b) $H(S)$

$\underline{S_0}$:

$000 \longrightarrow p^3$
$001 \longrightarrow p^2(1-p)$
$010 \longrightarrow p^2(1-p)$
$100 \longrightarrow p^2(1-p)$
$011 \longrightarrow p(1-p)^2$
$101 \longrightarrow p(1-p)^2$
$110 \longrightarrow p(1-p)^2$
$111 \longrightarrow (1-p)^3$

$\longrightarrow$ $\underline{S}$:

$P(3) = p^3$

$P(2) = 3 \cdot p^2(1-p)$

$P(1) = 3\,p\,(1-p)^2$

$P(0) = (1-p)^3$

$$\boxed{H(S) = p^3 \log \frac{1}{p^3} + 3p^2(1-p)\log\frac{1}{3p^2(1-p)} + 3p(1-p)^2 \log\frac{1}{3p(1-p)^2} + (1-p)^3 \log\frac{1}{(1-p)^3}}$$

$$= (\ldots) = 3p \log \frac{1}{p} + 3(1-p)\log\frac{1}{1-p} + 3p(1-p)\log 3$$

$$\boxed{= H(S_0) + 3p(1-p)\log 3}$$

c) $H(S_0) - H(S) = \underbrace{-3p(1-p)\log 3}$

es la diferencia de bits/símbolo que provoca la re-codificación de S_0 a S.

$\boxed{\text{I.3}}$ X geométrica $\to P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \geq 1$

a) $$\boxed{H(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \log \frac{1}{p(1-p)^{i-1}}} =$$

$$= -p\log p \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} - p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\log(1-p)^{i-1}$$

$$= -p\log p\,\frac{1}{p} - p\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-1}\log(1-p)$$

$$= \frac{p\log 1/p + (1-p)\log 1/(1-p)}{p} = \boxed{\frac{H(p)}{p}}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}(1-p)^i = \frac{(1-p)^k}{p}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-1} = \frac{1-p}{p^2}$$

b) $X > k \rightarrow H(X)$?

$$H(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \log \frac{1}{p(1-p)^{i-1}} = \{ \bar{X} > k \} =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \log \frac{1}{p(1-p)^{i-1}}$$

$$\sum_i (i-1)(1-p)^{i-1} = (1-p) \sum_i (i-1)(1-p)^{i-2} =$$

$$= (1-p) \frac{d}{dp} \left(-\sum_i (1-p)^{i-1} \right) =$$

$$= (1-p) \frac{d}{dp} \frac{(1-p)^{n}}{p} = +(1-p) \frac{n(1-p)^{n-1} p + (1-p)^{n}}{p^2}$$

$n = k-1$

$$H(X) = \underbrace{(1-p)^{k-1} \log \frac{1}{p} + (1-p)^{k-1} \frac{1-p}{p} \log \frac{1}{1-p}}_{(1-p)^{k-1} \frac{H(p)}{p}} + p^2 \log \frac{1}{1-p} (1-p) \frac{(1-p)^{k-2}}{p^2} (k-$$

$$\boxed{= (1-p)^{k-1} \left(\frac{H(p)}{p} + (k-1) \cdot \log \frac{1}{1-p} \right)}$$

— o —

$\boxed{I.4}$ $Y = g(X)$ $\longrightarrow H(Y/X) = 0$

g determinista

g = canal determinante y sin ruido, $\bar{\bar{G}} = \bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}$

$p(y_i/_j) = 1 \quad \forall i, j$

$$H(Y/X) = \sum_{j=1}^{r} p(x_j) \sum_{i=1}^{q} p(y_i/x_j) \log \frac{1}{p(y_i/x_i)}$$

$\log 1 = 0 \Rightarrow \boxed{H(Y/X) = 0}$

$\boxed{I.6}$ $S^n \longrightarrow$ extensión de orden n

$\longrightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$

Huffman $\Rightarrow$ código compacto

1er teorema de Shannon: $\lim_{n \to \infty} \frac{L_n}{n} = H_r(S)$

Al codificar con Huffman la extensión de orden n de S se hace $\lim_{n \to \infty} \eta_X = 1$ $\quad \eta_X = \frac{H(X)}{L}$

$H(X) = L \Rightarrow$ equiprobabilidad de los símbolos de la fuente

I.7

a) $\boxed{H(S) = \sum p_i \log 1/p_i = 2{,}29 \text{ bits/símbolo}}$

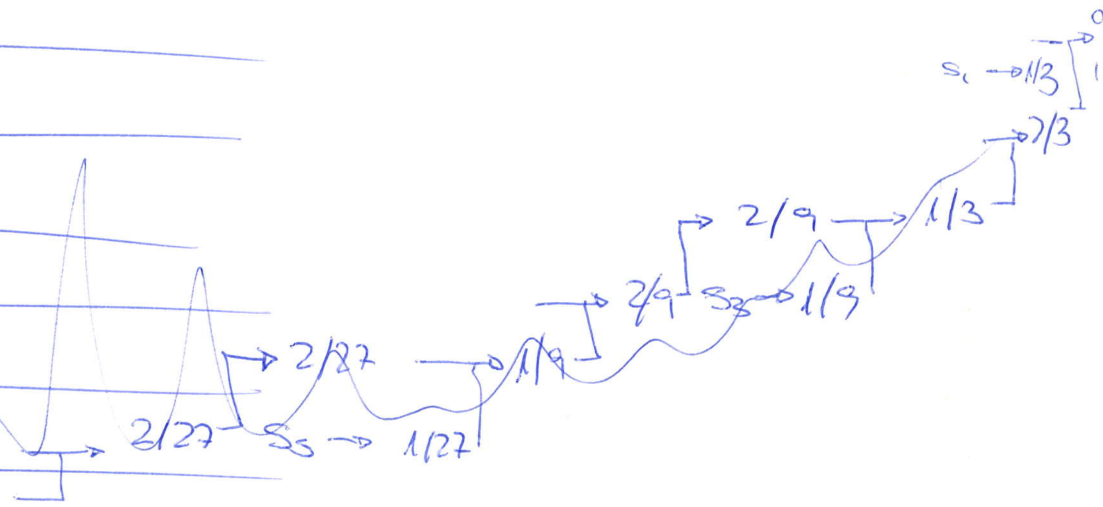
$$\boxed{H_3(S) = H(S) \cdot \frac{\log 2}{\log 3} = 1{,}44 \text{ símbolo}^{-1}}$$

unidades 3-arias

b) Código compacto → Huffman

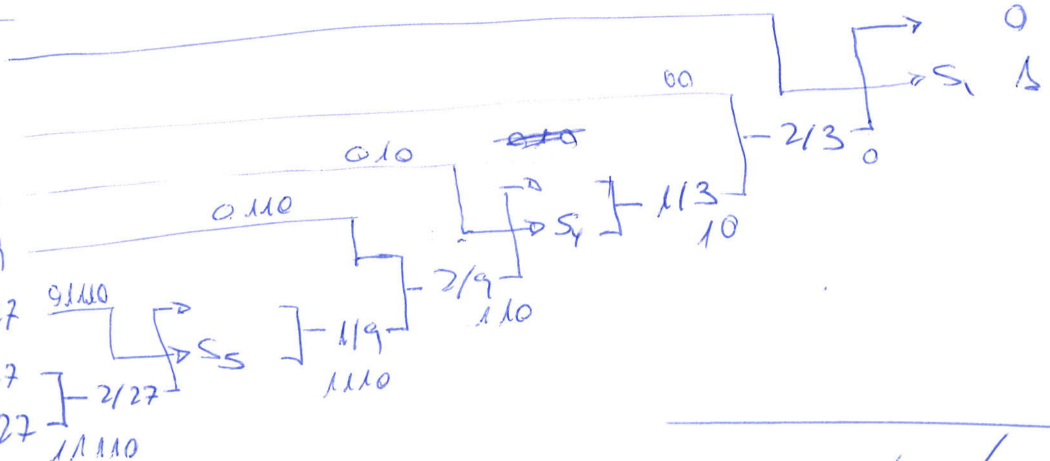
$X = \{0, 1\}$

S_i	P_i
S_1	1/3
S_2	1/3
S_3	1/9
S_4	1/9
S_5	1/27
S_6	1/27
S_7	1/27



Vamos a hacerlo bien...

	S_i	P_i
1	S_1	1/3
00	S_2	1/3
010	S_3	1/9
0110	S_4	1/9
01110	S_5	1/27
011110	S_6	1/27
111110	S_7	1/27



$$\boxed{L = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} = 2{,}41 \text{ bits/símbolo}}$$

$X = \{0, 1, 2\}$

	S_i	P_i			
0	S_1	1/3			0
1	S_2	1/3			1
02	S_3	1/9	02		
12	S_4	1/9	12	1/3	2
022	S_5	1/27			
122	S_6	1/27	1/19		
222	S_7	1/27	22		

$$\boxed{L_3 = \frac{1}{3}\cdot 2 + 2\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{3}{27} = 1{,}44 \text{ símbolo}^{-1}}$$

I.8

a) Código unívoco binario $\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} \leq 1$

A: $\sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} = 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} = 0{,}625 < 1$ Sí

B: $\sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-4} = 1 \Rightarrow$ Sí

C: $\sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} = 0{,}875 \Rightarrow$ Sí

D: $\sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-4} = 1{,}125 \Rightarrow$ NO

E: $\sum_{i=1}^{5} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1{,}125 \Rightarrow$ NO

b) $P = \{1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16\}$

A: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{000, 001, 010, 011, 110\}$

$\boxed{L_A = 3}$

B: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{0, 10, 100, 1100, 1110\}$

$\boxed{L_B = 1{,}875 \text{ bits/símbolo}}$

$C: \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{00, 10, 110, 010, 111\}$

$$\boxed{L_C = 2{,}25 \text{ bits/símbolo}}$$

c) Huffman $\Rightarrow$ longitud media mínima

$H(S) = 1{,}875$

$\longrightarrow$ Código B

$$\begin{cases} l_q = l_{q-1} \\ l_i = i(r-1) \quad i = 1 : q-1 \end{cases}$$

$\boxed{I.9}$

$$A_1 \longrightarrow \overset{C_1}{\boxed{P_1}} \longrightarrow B_1 \qquad A_2 \longrightarrow \overset{C_2}{\boxed{P_2}} \longrightarrow B_2$$

$A = A_1 \cup A_2 \quad B = B_1 \cup B_2$

$$A \longrightarrow \overset{C}{\boxed{P}} \longrightarrow B \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \sum_{A_1} P(a_i) \qquad Q_2 = \sum_{A_2} P(a_i)$$

a) $C = \max\limits_{p(a_i)} I(A;B)$

Ver $(I.1) \longrightarrow Q_1 + Q_2 = 1 \longrightarrow I(A;B) = Q_1 I(A_1;B_1) + Q_2 I(A_2;B_2) + H(Q_1)$

$$\Rightarrow C = Q_1 C_1 + (1-Q_1) C_2 + \max\left\{ Q_1 \log \frac{1}{Q_1} + (1-Q_1)\log\frac{1}{1-Q_1} \right\}$$

$$\frac{dC}{dQ_1} = C_1 - C_2 + \log\frac{1}{Q_1} - \cancel{\frac{1}{\ln 2}} - \log\frac{1}{1-Q_1} + \cancel{\frac{1}{\ln 2}} = 0$$

$$C_1 - C_2 = \log\frac{Q_1}{1-Q_1} \longrightarrow \frac{Q_1}{1-Q_1} = 2^{C_1 - C_2}$$

$$Q_1 (1 + 2^{C_1-C_2}) = 2^{C_1-C_2} \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{2^{C_1-C_2}}{1 + 2^{C_1-C_2}}}$$

$$\boxed{Q_2 = 1 - Q_1 = 1 - \frac{2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 + c_2}} = \frac{1}{1 + 2^{c_1 - c_2}}}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{1}{1 + 2^{c_2 - c_1}}}$$

b) $C = Q_1 C_1 + Q_2 C_2 + Q_1 \log 1/Q_1 + (1 - Q_1) \log 1/(1-Q_1)$

Usando $Q_1 = \dfrac{2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}}$, $1 - Q_1 = \dfrac{1}{1 + 2^{c_1 - c_2}} = Q_2$:

$$C = C_1 \frac{2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}} + C_2 \frac{1}{1 + 2^{c_1 - c_2}} + \frac{2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}} \log \frac{2^{c_1 - c_2} + 1}{2^{c_1 - c_2}} +$$

$$+ \frac{1}{1 + 2^{c_1 - c_2}} \log \left(1 + 2^{c_1 - c_2}\right) =$$

$$= \frac{C_1 2^{c_1 - c_2} + C_2}{1 + 2^{c_1 - c_2}} + \underbrace{\cancel{\frac{1 + 2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}}}}_{1} \log \left(2^{c_1 - c_2} + 1\right) - \frac{2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}} \log 2^{c_1 - c_2}$$

$$= \frac{\cancel{C_1} 2^{c_1 - c_2} + C_2 - (\cancel{C_1} - C_2) 2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}} + \log \left(2^{c_1 - c_2} + 1\right)$$

$$= \frac{1 + 2^{c_1 - c_2}}{1 + 2^{c_1 - c_2}} C_2 + \log \left(2^{c_1 - c_2} + 1\right) = \boxed{C_2 + \log \frac{1}{Q_2}}$$

$$= \boxed{C_1 + \log \frac{1}{Q_1}}$$

Con $Q_1 = \dfrac{1}{1 + 2^{c_2 - c_1}}$, $Q_2 = \dfrac{2^{c_2 - c_1}}{1 + 2^{c_2 - c_1}}$

c) Como que paso

d) $\begin{bmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 \\ p & \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} & p \\ 0 & 0 & p & \bar{p} \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{C = C_1 + \log \frac{1}{Q_1} = 2 - H(p)}$

BSC $\Rightarrow C_1 = 1 - H(p)$

$Q_1 = 1/2 = Q_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} & p \\ 0 & p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

$C_2 = 1 - H(p)$

$Q_2 = \ldots$

$C_1 = 0 = \log 1$

$Q_1 = \dfrac{1}{1 + 2^{C_2 - C_1}} = \dfrac{1}{1 + 2^{1-H(p)}}$

$\boxed{C = C_1 + \log \frac{1}{Q_1} = \log 1 + 2^{1-H(p)}}$

I. 10

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Canal uniforme y simétrico

$C = \log r + \sum_{j=1}^{r} p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i) =$

$= \log 3 + 0,5 \log 0,5 + 0,3 \log 0,3 + 0,2 \log 0,2 = \boxed{99,49 \cdot 10^{-3}}$ bps

12

$\boxed{\text{I.M}}$ X fuente binaria sin memoria

$p(X=0)=0{,}2$

$p=0{,}02 \rightarrow$ BSC

$$\begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{bmatrix}$$

a) Sin codificación, ¿pe?

Transmito → me equivoco ⇒ $\boxed{p_e = 0{,}02}$

b) Mínima pe

2ª teorema de Shannon: dice que pe se puede hacer arbitrariamente pequeña

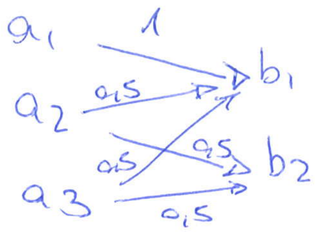
⇒ $\boxed{\min p_e = 0}$

c) Sin errores ⇒ canal determinista:

$\boxed{p=1 \text{ ó } p=0}$

$$\boxed{I.12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$



$$I(A;B) = H(A) - H(A/B) = H(B) - H(B/A)$$

$$H(A/B) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} p(a_i, b_j) \log \frac{1}{p(a_i/b_j)}$$

$$H(B/A) = \sum_{i=1}^{q} p(a_i) \sum_{j=1}^{r} p(b_j/a_i) \log \frac{1}{p(b_j/a_i)}$$

$$C = \max I(A;B) = \max \{ H(B) - H(B/A) \}$$

$$= \max \left\{ p(b_1) \log \frac{1}{p(b_1)} + p(b_2) \log \frac{1}{p(b_2)} - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} p(a_i)\, p(b_j/a_i) \log \frac{1}{p(b_j/a_i)} \right\}$$

$$\underline{H(B/A)} = p(a_1)\, p(b_1/a_1) \underbrace{\cancel{\log \frac{1}{p(b_1/a_1)}}}_{0} + p(a_1) \underbrace{\cancel{p(b_2/a_1)}}_{0} \log \frac{1}{p(b_2/a_1)} + p(a_2)\, p(b_1/a_2) \log \frac{1}{p(b_1/a_2)}$$

$$+ p(a_2)\, p(b_2/a_2) \log \frac{1}{p(b_2/a_2)} + p(a_3)\, p(b_1/a_3) \log \frac{1}{p(b_1/a_3)} + p(a_3)\, p(b_2/a_3) \log \frac{1}{p(b_2/a_3)}$$

$$= \underline{p(a_2) + p(a_3)}$$

$$\Rightarrow C = \max \left\{ p(b_1) \log \frac{1}{p(b_1)} + p(b_2) \log \frac{1}{p(b_2)} - p(a_2) - p(a_3) \right\}$$

$$\begin{cases} p(b_1) = p(a_1) + 0{,}5\, p(a_2) + 0{,}5\, p(a_3) \\ p(b_2) = \big(p(a_2) + p(a_3)\big) \cdot 0{,}5 \end{cases}$$

$$C = \max \left\{ \big(p(a_1) + 0{,}5\, p(a_2) + 0{,}5\, p(a_3)\big) \log \frac{1}{p(a_1) + 0{,}5\big(p(a_2) + p(a_3)\big)} + \dots \right\}$$

$$p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) = 1 \rightarrow p(a_2) + p(a_3) = 1 - p(a_1)$$

$$C = \max_{p(a_1)} \left\{ \frac{1}{2}(1+p(a_1)) \log \frac{1}{\frac{1}{2}(1+p(a_1))} + \frac{1}{2}(1-p(a_1)) \log \frac{1}{\frac{1}{2}(1-p(a_1))} \right.$$

$$\left. + p(a_1) - 1 \right\}$$

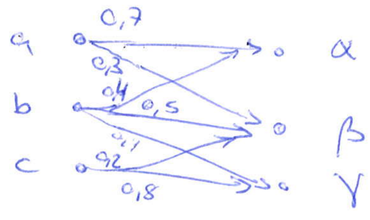
$$\frac{dC}{dp(a_1)} = 0 \Rightarrow (\ldots) \quad \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{2}(1-p(a_1)) - \log \frac{1}{2}(1+p(a_1))\right) = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{p(a_1) = 3/5}$$

$$\boxed{p(a_2) + p(a_3) = 2/5}$$

$$\boxed{C = 0{,}3219 \text{ bits/mensaje}}$$

$\boxed{\text{I.13}}$ $\quad p(a) = 0{,}2 \quad p(b) = 0{,}5 \quad p(c) = 0{,}3$



$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

óptimo: $p(a^*/b_j) \geq p(a_i/b_j) \quad \forall i$

$\hookrightarrow p(b_j/a^*)\,p(a^*) \geq p(b_j/a_i)\,p(a_i)$

$\alpha \to p(\alpha/a)p(a) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$

$\quad p(\alpha/b)\,p(b) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \qquad \boxed{\alpha \to b}$

$\beta \to p(\beta/a)\,p(a) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$\quad p(\beta/b)\,p(b) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 \qquad \boxed{\beta \to b}$

$\quad p(\beta/c)\,p(c) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

$$\gamma \to p(\gamma/b)\,p(b) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$$
$$p(\gamma/c)\,p(c) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24 \quad \boxed{\gamma \to c}$$

ML: $p(b_j/a^*) \geq p(b_j/a_i) \ \forall i$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \to a \\ \beta \to b \\ \gamma \to c \end{array}}$$

$Pe_{opt} = 1 - p(b)\cdot p(\ /b) - p(b)p(\beta/b) - p(c)\,p(\gamma/c) = 0{,}3$

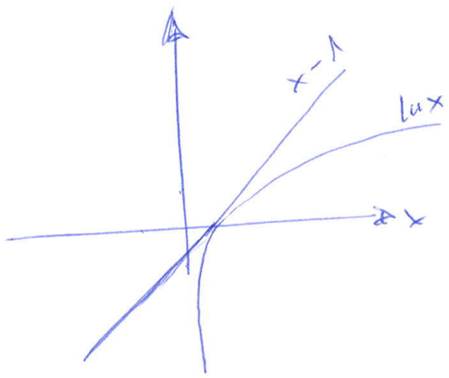
$Pe_{ML} = 1 - p(a)\,p(\alpha/a) - p(b)\,p(\beta/b) - p(c)\,p(\gamma/c) = 0{,}37$

$\boxed{I.14}$ a) Gaussiana $\to g(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$

Genérica $\to f(x)$

$$h(g(x)) \geq h(f(x)) \qquad \ln x \leq x - 1$$

$$h(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)}\, dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{g(x)}{f(x)}\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{g(x)}{f(x)} - 1\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{1}{f(x)}\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{1}{g(x)}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{1}{g(x)}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{x^2}{2\sigma^2}\, dx - \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)}^{1} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx}_{\sigma^2} = \frac{1}{2}\left(1+\ln 2\pi\sigma^2\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 e = \text{entropia di una v.a. gaussiana}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 e}$$

b) $f(x)$ arbitraria

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}e^{-x/m} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad h(g(x)) \ge h(f(x))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\frac{1}{g(x)}dx = \int_0^{\infty} f(x)\ln m\, e^{x/m}dx = \int_0^{\infty} f(x)\ln m\, dx +$$

$$+ \int_0^{\infty}\frac{x}{m}f(x)\,dx = \ln m + 1 = \boxed{\ln(em) = \text{entropia di } h \text{ esponenziale}}$$

$$\boxed{h(f(x)) = \int_0^{\infty} f(x)\ln\frac{1}{f(x)} \le \ln em}$$

c) $f(x)$ arbitraria $\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

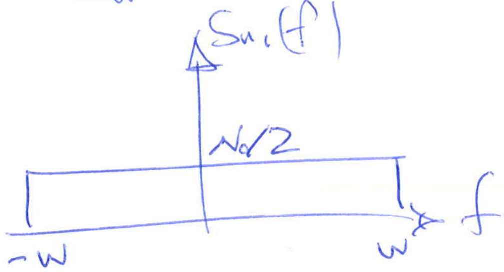
$$\int_a^b f(x)\ln\frac{1}{g(x)}dx = \int_a^b f(x)\ln(b-a)\,dx = \ln(b-a)$$

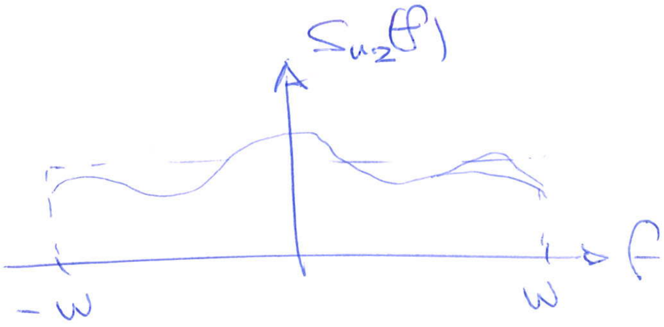
$$\boxed{h(f(x)) = \int_a^b f(x)\ln\frac{1}{f(x)} \le \ln(b-a)}$$

$\boxed{I.15}$ $C_1 \rightarrow AWGN,\ W \quad P_{tx} = P$
$N_0/2$

$C_2 \rightarrow A\ GN,\ W,\ S_u(f) \quad P_{tx} = P$

$$\int_{-W}^{W} S_u(f)\,df = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2}\,df = N_0 W$$



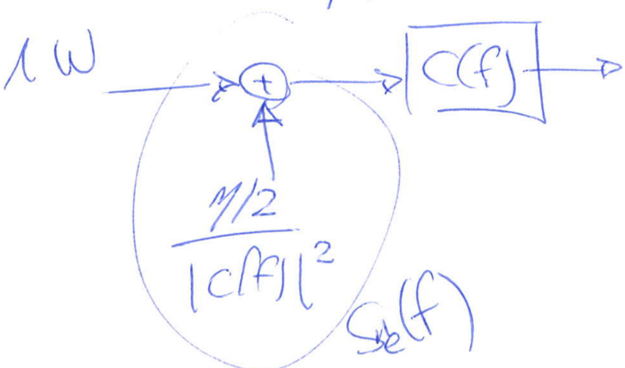


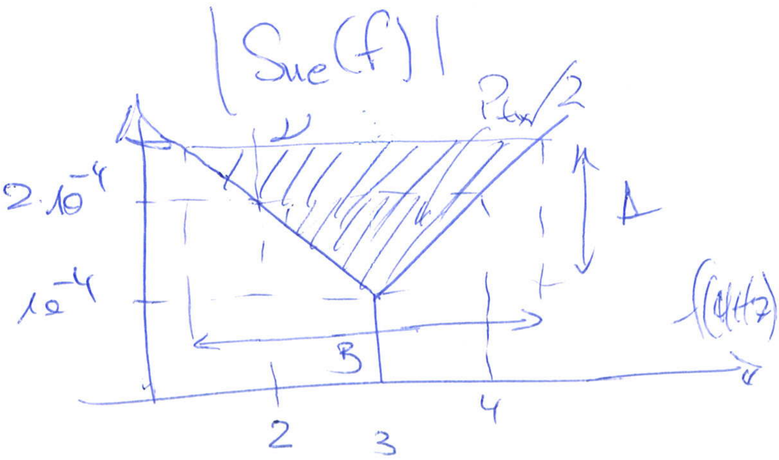
$$C = \int_0^W \log\left(1 + \frac{S_x(f)}{S_u(f)}\right) df \quad \text{Ley de Shannon-Hartley}$$

El ruido blanco es el peor de todos $\Rightarrow$ C_2 tiene mayor capacidad

$\boxed{I.16}$ entrada $\rightarrow$ AWGN, $\eta/2 = 10^{-12}$ W/Hz
$P_{tx} = 1$ W

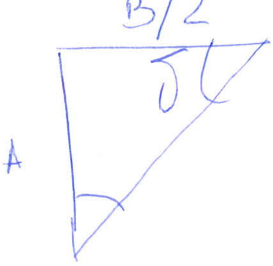
a)





Vertido de agua: $S_x(f) = [\nu - S_{ne}(f)]^+$

$P_{tx} = 1/2\, W = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB =$



$\operatorname{tg}\delta = \frac{A}{B/2} = 10^{-10}$

$\cancel{\delta = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg}\delta = 10^{-10}$

$A = 10^{-10} B/2$

$2 \to B^2 = 2\cdot 10^{10}$

relación $10^{-4} - 10^{6}$

$\boxed{B = 0,14 \text{ MHz}}$

pendiente

$\nu = 10^{-4} + \frac{B}{2}\cdot 10^{-10} = 1,071\cdot 10^{-4}$

$$\Rightarrow \boxed{S_x(f) = \left[1,071\cdot 10^{-4} - \frac{10^{-12}}{|C(f)|^2}\right]^+}$$

$$\boxed{2,93 \le |f| \le 3,071 \text{ MHz}}$$

b) $$\boxed{C = 2\int_{2,93}^{3} \log\left(1 + \frac{1,071\cdot 10^{-4} - \frac{10^{-12}}{|C(f)|^2}}{\frac{10^{-12}}{|C(f)|^2}}\right) df} =$$

$$= 2\int_{2,93}^{3} \log \frac{1,071\cdot 10^{-4}}{\frac{10^{-12}}{|C(f)|^2}}\, df = \boxed{2\int_{2,93}^{3} \log\frac{1,071}{f-2}\, df \quad (\text{MHz})}$$

$\boxed{\text{I.17}}$

$S_1 = 1/2$

$S_2 = 1/3$

$S_3 = 1/6$

a)

	S_i	P_i		
0	S_1	1/2		0
01	S_2	1/3	1/2	1
11	S_3	1/6		

$S_1 \longrightarrow 0$

$S_2 \longrightarrow 01$

$S_3 \longrightarrow 11$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = 1{,}5 \text{ bits}$$

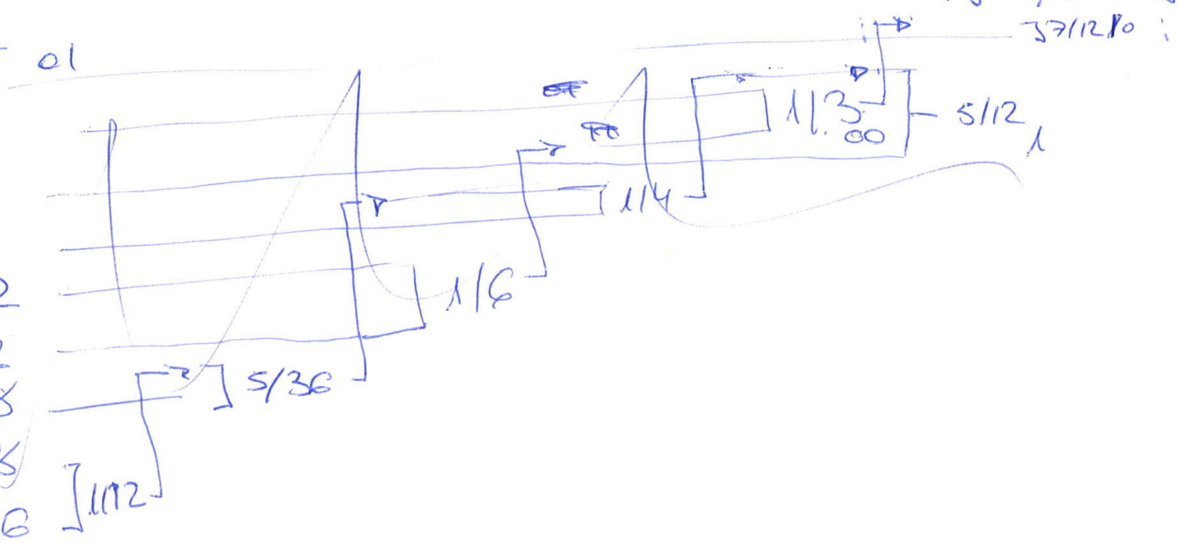
$$H(S) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{6}\log 6 = 1{,}46 \text{ bits}$$

$$\boxed{\eta = \frac{H(S)}{L} = 97{,}3\ \%}$$

b) $S^2 \rightarrow \{S_1S_1,\ S_1S_2,\ S_1S_3,\ S_2S_1,\ S_2S_2,\ S_2S_3,\ S_3S_1,\ S_3S_2,\ S_3S_3\}$

$\frac{1}{4}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{36}$

S_iS_i	P_i
S_1S_1	1/4
S_1S_2	1/6
S_2S_1	1/6
S_2S_2	1/9
S_1S_3	1/12
S_3S_1	1/12
S_2S_3	1/18
S_3S_2	1/18
S_3S_3	1/36



S_1S_1	1/4 01	1/4 01	1/4 01	1/4 01	1/4 01	1/3 00	5/12	1
S_1S_2	1/6 11	1/6 11	1/6 11	1/6 11	1/4 10	1/4 01	1/3 00	7/12 0
S_2S_1	1/6 000	1/6 000	1/6 000	1/6 000	1/6 11	1/4 10	1/4 01	
S_2S_2	1/9 101	1/9 101	5/36 100	1/6 001	1/6 000	1/6 11		
S_1S_3	1/12 0010	1/12 0010	1/9 101	5/36 100	1/6 001			
S_3S_1	1/12 0011	1/12 0011	1/12 0010	1/9 101				
S_2S_3	1/18 1001	1/12 1000	1/12 0011					
S_3S_2	1/18 10000	1/18 1001						
S_3S_3	1/36 10001							

$H(S) = 2,91829$

$L = 2,9722$

$\boxed{\eta = 98,2\ \%}$

c) Al extender la fuente la codificación es mejor, $\eta \to 1$

S^n 20 $\lim_{n\to} \frac{H(S^n)}{L_n} = 1$

d) Códigos compactos, es decir, únicos y de mínima longitud

$\boxed{I.18}$ $\quad \Pi = \begin{bmatrix} p & \bar{p} \\ \bar{p} & p \end{bmatrix} \qquad p(a_i=0)=q$

a) Reglas de decisión:

regla	b_j	$d(b_j)$
A	0	0
	1	1
B	0	0
	1	0
C	0	1
	1	1
D	0	1
	1	0

b) óptima $\longrightarrow p(b_j/a_i^*)\,p(a_i^*) \geq p(b_j/a_i)\,p(a_i^*) \quad \forall i$

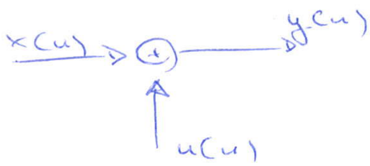
$$\boxed{p \cdot q \underset{d(0)=1}{\overset{d(0)=0}{\gtrless}} \bar{p} \cdot \bar{q}}$$

c) Redondo

$\boxed{\text{I. 22}}$

$\sigma_u^2 = 1$ $\quad$ $\sigma_x^2 = 1$

$f_m = 1$ kHz



1.- Capacidad, $f_x(x)$

Para máxima capacidad, y(n) debe ser gaussiana:

$$\max\{h(Y)\} = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\left(P_x + P_u\right)\right)$$

Entonces, dado que u(n) es gaussiana, x(n) tiene que ser también gaussiana, por tanto:

$$C_{max} = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_u^2}\right) = 1/2$$

En bps:

$$\boxed{C_{max}(bps)} = W\log_2\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_u^2}\right) = \boxed{500 \text{ bps}}$$

$W = \frac{f_m}{2} = 500$ kHz (teorema del muestreo)

2.- x(n) binaria blanco $\rightarrow \pm 1$

$$z(n) = \begin{cases} 1 & y(n) \geq 0 \\ -1 & y(n) < 0 \end{cases}$$

$$C = 1 + p_e\log_2 p_e + (1-p_e)\log_2(1-p_e)$$

$$p_e = 1 - Q(1) = 0{,}841 \Rightarrow C = 0{,}368$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 368 \text{ bps}}$$

3.- $z(u) = 1 \quad y(u) \geq 0{,}5$

$z(u) = -1 \quad y(u) < 0{,}5$

$$P_e = \frac{1}{2}\,\text{Prob}\{y < 0{,}5 \mid z = 1\} + \frac{1}{2}\,\text{Prob}\{y > 0{,}5 \mid z = -1\}$$

¿Error?:

$z = -1,\ x > 0{,}5 \Rightarrow u < -0{,}5$

$z = 1,\ x < 0{,}5 \Rightarrow u > 1{,}5$

$x < 0{,}5,\ y \geq 0{,}5 \Rightarrow$ ruido? $> 1{,}5$?

¿Se supone que signo(x) = signo(z)?

$\Rightarrow x < 0,\ y \geq 0{,}5 \Rightarrow$ ruido $\geq 1{,}5$

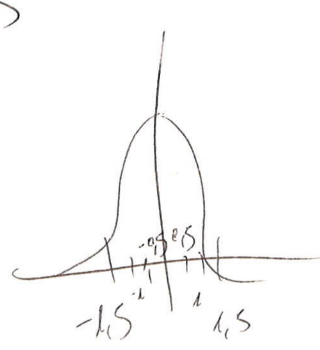
$x > 0;\ y < 0{,}5 \Rightarrow$ ruido $< -0{,}5$

$x > 0{,}5 \Rightarrow Q(x) = 0{,}309$

$x < 0{,}5 \Rightarrow Q(x) = 1 - 0{,}309 = 0{,}691$

$u < -0{,}5 \Rightarrow Q(u) = 0{,}309$

$u > 1{,}5 \Rightarrow Q(u) = 0{,}067$



$x = 1\ ,\ z = -1 \Rightarrow u < -0{,}5$

$x = -1\ ,\ z = +1 \Rightarrow u > 1{,}5$

$\Rightarrow p_e = 0{,}188$

$\Rightarrow c = 302{,}7$ bps

$I(A;B) = H(B) - H(B/A)$

Al variar el umbral, varía $H(B)$

$p(b_i = +1) = p(a_i = +1) \cdot p(u > -0{,}5) + p(a_i = -1) \cdot p(u > 1{,}5)$

$p(b_i = -1) = p(a_i = +1)\, p(u < -0{,}5) + p(a_i = -1)\, p(u < 1{,}5)$

$\Rightarrow \quad p(b_i = +1) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}309) + \frac{1}{2}(0{,}067) = 0{,}379$

$p(b_i = -1) = \frac{1}{2}\, 0{,}309 + \frac{1}{2}(1 - 0{,}067) = 0{,}621$

$H(B) = 0{,}9573$

$\boxed{C = 33[illegible] \text{ bps}}$

$H(B/A) = 0{,}6233$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p(b_0/a_0) & p(b_1/a_0) \\ p(b_0/a_1) & p(b_1/a_1) \end{bmatrix}$$

$0{,}35463 > 0{,}6233$

$0{,}892$

$\cancel{0{,}99676}$

$\cancel{0{,}6209879}$

$p(b_0/a_0) = \cancel{0{,}4665}\ 0{,}933$

$p(b_1/a_0) = \cancel{0{,}5335}\ 0{,}067$

$p(b_0/a_1) = \cancel{0{,}1545}\ 0{,}309$

$p(b_1/a_1) = \cancel{0{,}8455}\ 0{,}691$

$$H(B/A) = \sum_{i=1}^{2} p(a_i) \sum_{i=1}^{2} p(b_i/a_i) \log \frac{1}{p(b_i/a_i)}$$

$$= 0{,}6233$$

$$H(B) = 0{,}95733$$

$$p(a_0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} p(b_i/a_0) \log \frac{1}{p(b_i/a_0)} = 0{,}3546$$

$$p(a_1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} p(b_i/a_1) \log \frac{1}{p(b_i/a_1)} = 0{,}8920$$

$$\frac{1}{2}\, 0{,}3546 + \frac{1}{2}\, 0{,}8920 = 0{,}6233$$

$$\boxed{C = 0{,}95733 - 0{,}6233 = 334 \text{ bps}}$$

(27) 3º TEC. SUP. 0'06 €

I.1 **b)** $\lambda_0 = \dfrac{1}{2^{H_2-H_1}+1}$, $H[S(\lambda_0)] = H_1 + \log(2^{H_2-H_1}+1) = H_2 + \log(2^{H_1-H_2}+1)$

I.2 **a)** $3H(p)$ **b)** $3H(p) - 3p\overline{p}\log 3$ **c)** $3p\overline{p}\log 3$

I.3 **a)** $H(X) = \dfrac{H(p)}{p}$ **b)** $H(X/_{X>K}) = \dfrac{H(p)}{p}$

I.7 **a)** 2.28 bits y 1.44 u. 3 arias **c)** 2.4 bits y 1.44 u.3 arias

I.8 **a) A,B y C**
b) L_A = 3. Si se hace buscando L mínima, entonces **L_B = 1.875** y **L_C = 2.25** y **c)** el **B**

I.9 **a)** $I(A,B) = Q_1 I(A_1,B_1) + Q_2 I(A_2,B_2) + H(Q_1)$, $Q_1 = \dfrac{1}{1+2^{C_2-C_1}}$, $Q_2 = \dfrac{1}{1+2^{C_1-C_2}}$

b) $C = C_2 + \log(\dfrac{1}{Q_2}) = C_1 + \log(\dfrac{1}{Q_1})$

c) $Q_k = \dfrac{1}{1+\sum_{i=1,i\neq k}^{n} 2^{C_i-C_k}}$, $C = C_k + \log(\dfrac{1}{Q_k})$

d) $C_1 = 2 - H(p)$, $C_2 = \log(1+2^{1-H(p)})$

I.10 99.48E-3

I.11 **a)** 0.02 **b)** 0 **c)** $p < 0.048$ ó $p > 0.952$

I.12 **C = 0.32,** **P_1 = 3/5,** **P_2 + P_3 = 2/5**

I.13 **Óptima:** $d(\alpha) = b$ $d(\beta) = b$ $d(\gamma) = c$ $P_E = 0.31$
Máx.Semejanza: $d(\alpha) = a$ $d(\beta) = b$ $d(\gamma) = c$ $P_E = 0.37$

I.15 **El canal C_2 tendrá más capacidad.**

I.16 **a)** $S_x(f) = 1.0710^{-4} - \dfrac{10^{-12}}{|C(f)|^2}$ $2.9 \leq |f| \leq 3.1$ (Mhz)

b) $C = 2\int_{2.93}^{3} \log(\dfrac{1.07}{f-2})df\ Mbps = 20.9kbps$

I.17 **a) 97%** **b) 98%** **d) Compactos**

I.19 **b)** $P_{SError} = p^3 + 3p^2 p$ **c)** $C = \overline{P}_{SError}\log\dfrac{4}{P_{SError}} + p^3\log p^3 + 3\overline{p}^2 p\log\overline{p}^2 p$

I.21 $H(X) = H(Y) = \log 3 - \dfrac{2}{3}; H(Y/X) = H(X/Y) = \dfrac{2}{3}; I(X;Y) = \log 3 - \dfrac{4}{3}; C = \log 5 - 2$

I.22 **a)** 500 bps **b)** 368 bps **c)** 335 bps

II.1 $x_1(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$

$x_2(t) = x(t)[1 + \cos(4\pi f_0 t)] + \hat{x}(t)\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t)$

$x_3(t) = x(t)$

II.2 **a)** 0 **b)** $R_c(t, t-\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$ X(t) es estacionario

c) $S_x(f) = \dfrac{\sigma^2}{2}\delta(f - f_0) + \dfrac{\sigma^2}{2}\delta(f + f_0)$

d) 0, $R_c(t, t-\tau) = \dfrac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\cos(2\pi f_0 \tau) + \dfrac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\cos(2\pi f_0 (2t - \tau))$

X(t) es cicloestacionario, $\overline{R}_c(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$

$$S_x(f) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{4}\delta(f + f_0)$$

II.4 **a)** $R_y(\tau) = BN_0 sinc(2B\tau)$

b) $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi N_0 B} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2N_0 B}}$ Son estadísticamente independientes.

II.5 No, no siempre es invertible.

II.7 **a)** $S_{n_F}(f) = S_{n_C}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| \le 4Khz \\ 0 & resto \end{cases}$ $R_{n_F n_C}(\tau) = 0$

b) $S_{n_F}(f) = S_{n_C}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| \le 3Khz \\ \dfrac{N_0}{2} & 3Khz < |f| \le 5Khz \\ 0 & resto \end{cases}$

$$R_{n_F n_C}(\tau) = \frac{N_0}{2\pi\tau}\left[\cos(2\pi 5\ 10^3 \tau) - \cos(2\pi 3\ 10^3 \tau)\right]$$

II.8 $X_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_F(t - nT)$ $X_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_C(t - nT)$