

# TEMA 2: CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE LA SEÑAL

## 1.- SEÑALES Y SISTEMAS COMPLEJOS

### 1.1.- INTRODUCCIÓN

- Señal compleja:  $x(t) \in \mathbb{C}$

$$x(t) = x_R(t) + j x_I(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} \quad \left| \begin{array}{l} x_R(t), x_I(t) \in \mathbb{R} \\ A(t), \varphi(t) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_R(t) = \operatorname{Re} \{ x(t) \} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \\ x_I(t) = \operatorname{Im} \{ x(t) \} = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j} \end{array} \right.$$

Potencia instantánea:

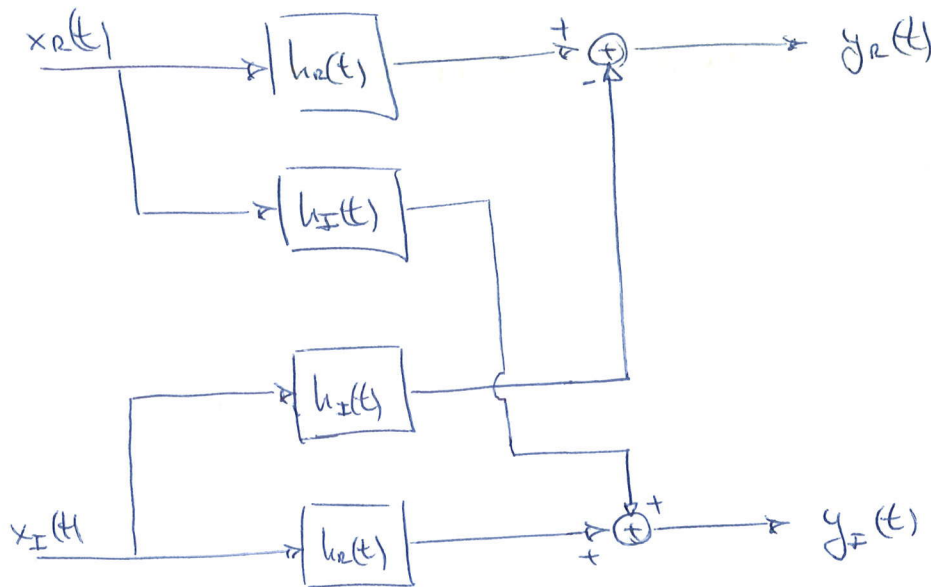
$$P_{\text{inst}}(t) = |x(t)|^2 = x(t) x^*(t) = x_R^2(t) + x_I^2(t) \in \mathbb{R}$$

- Sistemas complejos: (LTI)  $h(t) \in \mathbb{C}$



$$y(t) = x(t) * h(t) = (x_R(t) + j x_I(t)) * (h_R(t) + j h_I(t)) =$$

$$= x_R(t) * h_R(t) - x_I(t) * h_I(t) + j (x_R(t) * h_I(t) + x_I(t) * h_R(t))$$



las señales complejas nos permiten un trabajo más cómodo y cómodo más sencillo

## 1.2.- TRANSFORMADA DE FOURIER. PROPIEDADES DE SOMETRIA

$$x(t) \in \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \in \mathbb{C}$$

Simetrias:

$$\begin{aligned} & \bullet x(t) \in \mathbb{R} \\ & x(t) = x_e(t) + x_o(t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = x_e(-t) \text{ simetría par} \\ x_o(t) = -x_o(-t) \text{ simetría impar} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \text{parte par} \\ x_o = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \text{parte impar} \end{array} \right.$$

•  $x(t) \in \mathbb{C}$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = x_e^*(-t) \quad \text{simetría hermitica} \\ x_o(t) = -x_o^*(-t) \quad \text{antisimetría hermitica} \end{array} \right.$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2}$$

Cualquier señal compleja se puede descomponer en suma de una señal con simetría hermitica y otra con antisimetría hermitica.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = \text{Sim} \{ x(t) \} \\ x_o(t) = \text{Ausim} \{ x(t) \} \end{array} \right.$$

Si  $x(t)$  tiene simetría hermitica:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \{ x(t) \} \text{ es par} \\ \text{Im} \{ x(t) \} \text{ es impar} \end{array} \right.$

Si  $x(t)$  tiene antisimetría hermitica:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \{ x(t) \} \text{ es impar} \\ \text{Im} \{ x(t) \} \text{ es par} \end{array} \right.$

Propiedades de simetría de la Transformada de Fourier:

| tiempo    | frecuencia |
|-----------|------------|
| $x(t)$    | $X(f)$     |
| $x(-t)$   | $X(-f)$    |
| $x^*(t)$  | $X^*(-f)$  |
| $x^*(-t)$ | $X^*(f)$   |
| $x_e(t)$  | $X_e(f)$   |
| $jx_i(t)$ | $X_o(f)$   |
| $x_e(t)$  | $X_o(f)$   |
| $x_o(t)$  | $jX_i(f)$  |

$$x(t) = x_e(t) + jx_i(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$X(f) = X_e(f) + jX_i(f); X_i(f) = X_e(f) + X_o(f)$$

$$\operatorname{Re}\{g(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} (G(f) + G^*(-f))$$

$$\operatorname{Im}\{g(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{1}{2} (G(f) - G^*(-f))$$

## 2.- AUTOCORRELACIÓN Y DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA DE SEÑALES Y PROCESOS COMPLEJOS

$$x(t) \in \mathbb{C}$$

### 2.1.- SEÑALES DETERMINISTAS

- De energía:  $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt$

$$0 \leq E_x < \infty$$

- De potencia:  $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt$

$$0 \leq P_x < \infty \quad (e.g.: \text{señales periódicas})$$

Las señales de energía tienen Transformada de Fourier, mientras que las de potencia no, salvo las periódicas.

- Correlación cruzada:

$$x(t), y(t) \in \mathbb{C}$$

Señales de energía:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Señales de potencia:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

- Autocorrelación:

Es la correlación cruzada de una señal consigo misma.

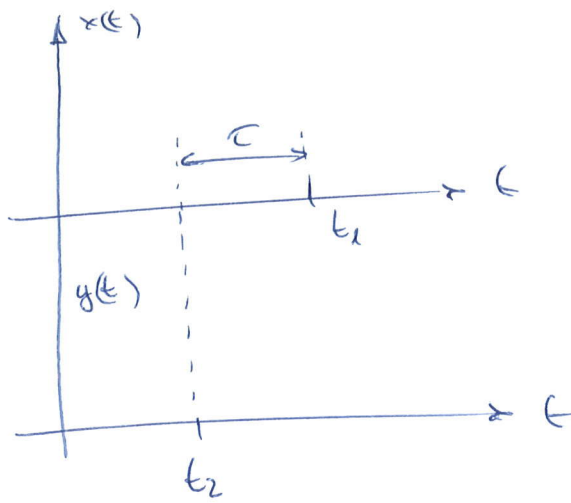
## 2.2.- SEÑALES ALEATORIAS

$$x(t), y(t) \in \mathbb{C} \text{ aleatorias}$$

- media:  $m_x(t) = E[x(t)]$

- correlación cruzada:  $R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1) y^*(t_2)]$

$$\tau = t_1 - t_2 \Rightarrow R_{xy}(t, t-\tau) = E[x(t) y^*(t-\tau)]$$



- autocorrelación:  $R_x(t, t-\tau) = R_{xx}(t, t-\tau)$

$$E[xy^*] = \iiint_{-\infty}^{\infty} (x_R + jx_I)(y_R + jy_I) f(x_R, x_I, y_R, y_I) dx_R dx_I dy_R dy_I$$

(esto lo usaremos)

potencia instantánea:  $R_x(t, 0) = E[|x(t)|^2]$

### 2.2.1.- SEÑALES ESTACIONARIAS

$x(t) \in \mathcal{C}$  es estacionaria en sentido amplio si verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_x(t) = \mu_x \quad \forall t \quad \rightarrow \text{la media no varía con el tiempo} \\ R_x(t, t-\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = R_x(\tau) \quad \rightarrow \text{la autocorrelación sólo depende del desfase} \end{array} \right.$$

Esto es para señales reales, para señales complejas debe cumplir, además:

$$R_{xx}(t, t-\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

Das señales de variables complejas,  $x(t)$  e  $y(t)$ , son conjuntamente cíclicamente estacionarias en sentido amplio si:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t), y(t) \text{ son estacionarias} \\ R_{xx}(t, t-\tau) = R_{xx}(\tau) \\ R_{xy}(t, t-\tau) = R_{xy}(\tau) \end{array} \right.$$

"sentido amplio"  $\Rightarrow$  estadísticas de 2º orden insensibles a desplazamientos temporales

"sentido estrecho"  $\Rightarrow$  todos los estadísticas insensibles a desplazamientos temporales

### 2.2.2. - SEÑALES CÍCLICAMENTE ESTACIONARIAS

$x(t) \in \mathbb{C}$  es cíclicamente estacionaria si:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x(t, t-\tau) = R_x(t+kT, t+kT-\tau) \\ R_{xx}(t, t-\tau) = R_{xx}(t+kT, t+kT-\tau) \\ w_x(t) = w_x(t+kT) \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$x(t), y(t) \in \mathbb{C}$  son conjuntamente cicloestacionarias si:

$$\begin{matrix} R_{xx}(t, t-\tau) \\ R_{yy}(t, t-\tau) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{periódicas en } t \text{ con período } T \end{array} \right.$$

### 2.2.3.- CORRELACION MEDIA

$$\bar{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T R_x(t, t-\tau) dt$$

$$\bar{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T R_{xy}(t, t-\tau) dt$$

#### - PROPIEDADES DE LA CORRELACION

1.-  $R_x(0)$  es la potencia o energía de la señal

2.-  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau)$

3.-  $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$

La condición de simetría hermitica: la autocorrelación de una señal compleja tiene simetría hermitica

## 2.2.4.- DENSIDADES ESPECTRALES

• densidad espectral cruzada:  $S_{xy}(f) = \mathcal{F} \{ R_{xy}(\tau) \}$

• densidad espectral de potencia (energía):

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{ R_x(\tau) \} \quad (\text{potencia})$$

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{ R_x(\tau) \} \quad (\text{energía})$$

$$= X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

• Propiedades:

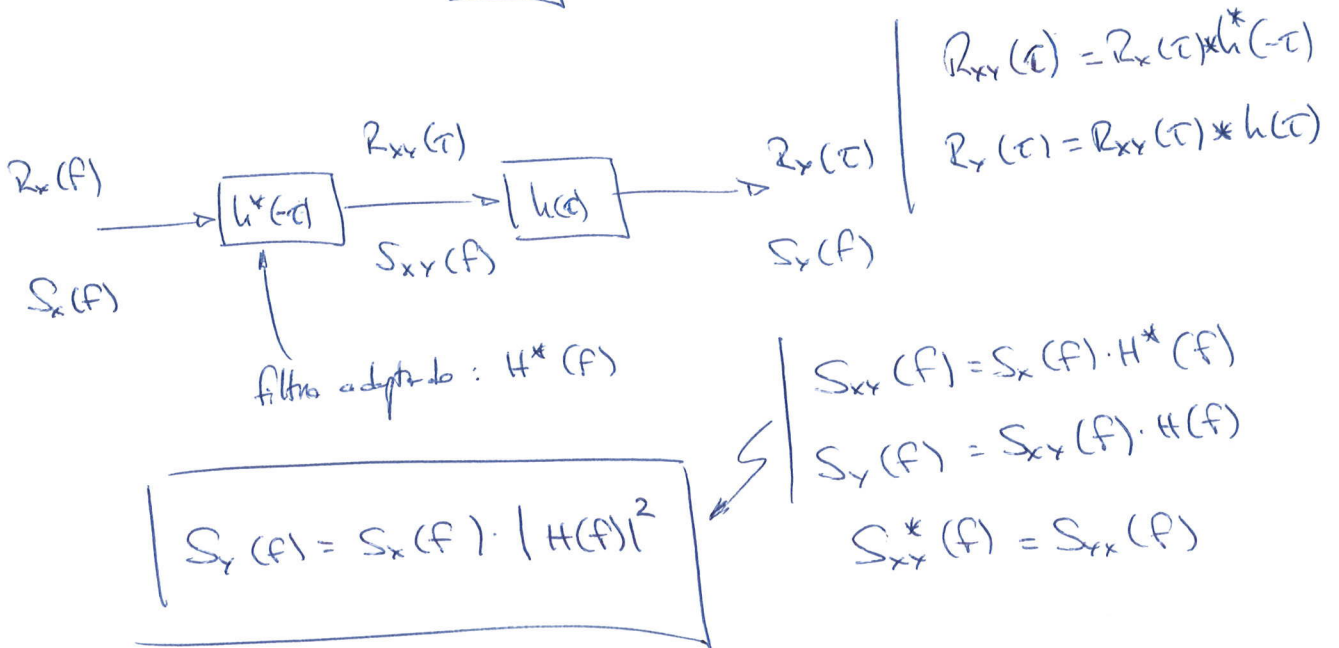
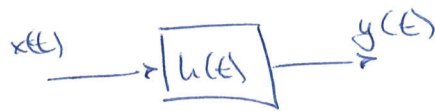
1.-  $\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$  es la potencia o energía

2.-  $S_x(f) \in \mathbb{R}^+$

3.-  $S_{xy}(f) = S_{yx}^*(f)$

## 2.2.5. - PROPIEDAD DE FILTRADO

$$S_x(f) \geq 0$$



Tenemos una señal compleja  $x(t) = x_R(t) + jx_I(t)$

Variable aleatoria  $\Rightarrow$  señal aleatoria: una V.A. para cada instante de tiempo

Señal compleja  $\equiv$  2 señales

Son suficientes las estadísticas de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> orden

$$u_x(t) = E[x(t)] = E[x_R(t)] + jE[x_I(t)] = u_{xR}(t) + ju_{xI}(t)$$

↑  
linealidad del operador esperanza

No hay problemas con la media, pero sí con la autocorrelación:

$$\begin{cases} R_x(\tau) = R_{xR}(\tau) + R_{xI}(\tau) - j 2 \text{Im} \{ R_{xRxI}(\tau) \} \\ S_x(f) = S_{xR}(f) + S_{xI}(f) + 2 \text{Im} \{ S_{xRxI}(f) \} \end{cases}$$

$$\text{Re} \{ R_x(\tau) \} = R_{xR}(\tau) + R_{xI}(\tau)$$

$$\begin{cases} R_{xx^*}(\tau) = R_{xR}(\tau) - R_{xI}(\tau) + j 2 \text{Re} \{ R_{xRxI}(\tau) \} \\ S_{xx^*}(f) = S_{xR}(f) - S_{xI}(f) + j 2 \text{Re} \{ S_{xRxI}(f) \} \end{cases}$$

Con  $R_x(\tau)$  y  $R_{xx^*}(\tau)$  se pueden obtener:

$$\begin{cases} R_{xR}(\tau) = \text{Re} \left\{ \frac{R_x(\tau) + R_{xx^*}(\tau)}{2} \right\} \\ R_{xI}(\tau) = \text{Re} \left\{ \frac{R_x(\tau) - R_{xx^*}(\tau)}{2} \right\} \\ R_{xRxI}(\tau) = \text{Im} \left\{ \frac{R_{xx^*}(\tau) - R_x(\tau)}{2} \right\} \end{cases}$$

## 2.3.- SEÑALES ALEATORIAS SIMÉTRICAS

Hay señales complejas en las que no es necesario el conocimiento de la autocorrelación o su TF

→ señales de potencia simétricas

Cumple la siguiente propiedad:

$$\boxed{R_{xx^*}(\tau) = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Q lo que a lo mismo:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_{xx}(\tau) = R_{x^*x^*}(\tau) \\ R_{xx^*}(\tau) \text{ es impar} \end{array}$$

Este tipo de señales aparece de forma importante en comunicaciones

Es suficiente el conocimiento de la autocorrelación o la DEP para las demás estadísticas.

## 2.4. - Ruido BLANCO GAUSSIANO COMPLEJO

(WGN complejo)

$$u(t) = u_R(t) + j u_I(t)$$

$u_R(t)$  y  $u_I(t)$  son ruidos blancos gaussianos independientes

$$\Rightarrow R_{u_R u_I}(\tau) = 0$$

$$S_{u_R}(f) = S_{u_I}(f) = \frac{\eta}{2}$$

$$S_u(f) = S_{u_R}(f) + S_{u_I}(f) = \eta$$

ya que  
 $S_{u_R u_I}(f) = 0$

Ejemplo: señal estacionaria

$$y(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

$x(t)$  señal estacionaria, real

$$\begin{cases} m_x = \text{media} \\ R_x(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m_y(t) &= E[x(t) \cos 2\pi f_0 t] = \cos 2\pi f_0 t \cdot E[x(t)] = \\ &= m_x \cos 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_y \text{ periódica de periodo } T_0 = 1/f_0$$

$$R_x(t, t-\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] =$$

$$= E[x(t)x(t-\tau)] \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 (t-\tau)$$

$$= R_x(\tau) \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\pi f_0 \tau + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau))$$

$\Rightarrow R_x$  periódica de período  $T_0' = 1/2f_0$

$\bar{u}_y, R_x$  periódicos de período  $1/f_0$

Para garantizar una correcta demodulación, las  
características de modulación y demodulación deben estar  
en fase, y para ello es útil la sincronización.

Promedios en un período:

$$\bar{u}_y = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_y(t) dt = 0 \quad (\text{función seno})$$

$$\bar{R}_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_x(t, t-\tau) dt = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau$$

\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_

Ejemplo:  $z_1(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \delta)$

$\delta$  uniforme en  $[0, 2\pi]$

Pregunta: comprobar que  $z_1(t)$  es estacionaria y que

$$u_{z_1} = \bar{u}_x$$

$$R_{z_1}(\tau) = \bar{R}_x(\tau)$$

$z_2(t) = y(t+t')$   $t'$  uniforme en  $[0, 1/f_0]$

Comprobar que es estacionaria y que

$$R_{z_2}(\tau) = \bar{R}_y(\tau)$$

$z_2(t) \Rightarrow y(t)$  con retardos aleatorios

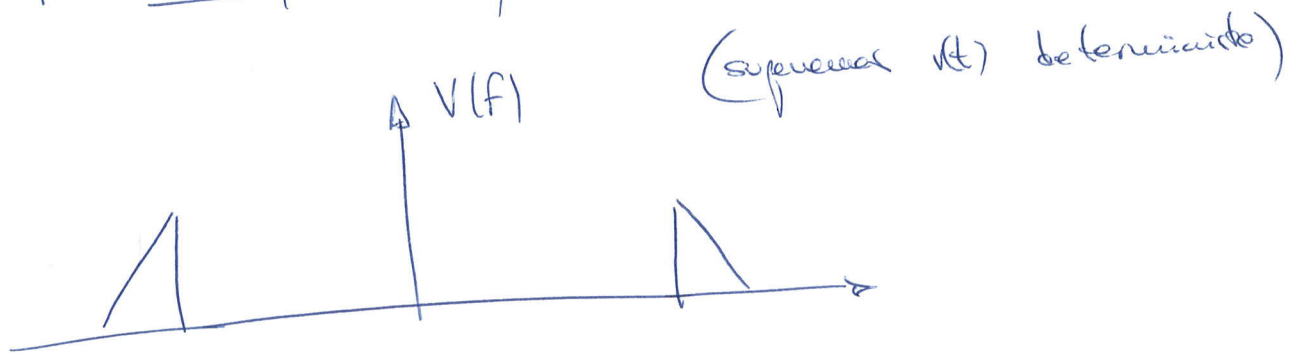
Los retardos no verifican la DEP, por ello se  
calcula la DEP como  $\overline{f \{ R_x(\tau) \}}$

---

### 3.- SEÑALES DETERMINISTAS PASO BANDA

Vamos a ver la representación de señales reales paso banda, que se puede usar para cualquier tipo de señales reales, aunque tiene más sentido en señales paso banda

- señal paso banda:  $v(t) \in \mathbb{R}$
- señal analítica:  $v_a(t) \in \mathbb{C}$
- señal equivalente paso banda:  $v_{eq}(t) \in \mathbb{C}$



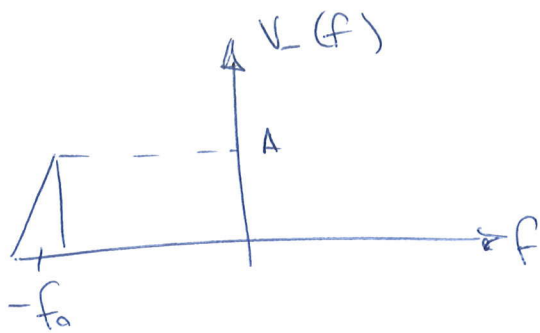
$$v(t) \in \mathbb{R} \longrightarrow V(f) \text{ hermitica}$$

Hoy una redundancia: conociendo lo que pasa en frecuencias positivas ya sabemos lo que pasa en frecuencias negativas:

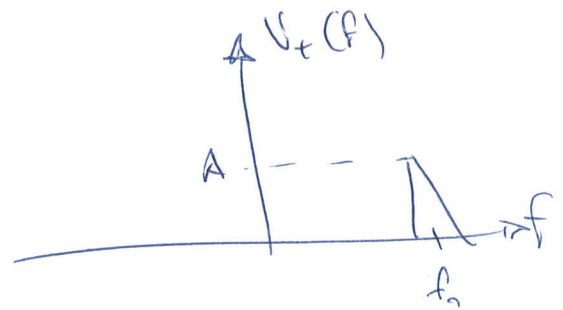
$$V(-f) = V^*(f)$$

Se descompone la TF en 2 funciones:

$$V(f) = V_+(f) + V_-(f)$$



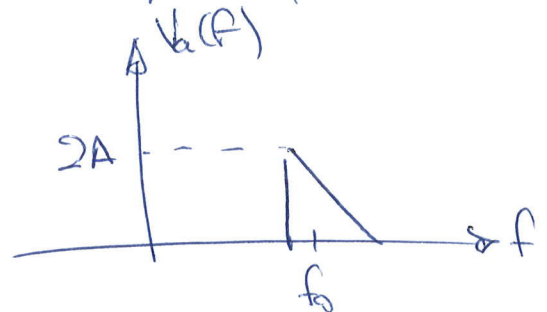
(+)



$f_0$  es un valor genérico pero próximo a la banda de la señal

Se define la señal analítica de  $v(t)$  como la señal que tiene el espectro en frecuencias positivas como  $v(t)$  y nulo en las negativas, multiplicando el espectro por 2:

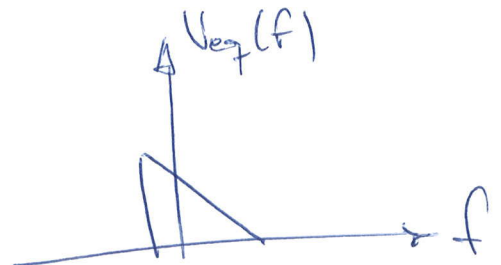
$$\boxed{V_a(f) = 2V_+(f)}$$



El equivalente para bajar es la señal analítica desplazada

al origen:

$$\boxed{V_{eq}(f) = V_a(f + f_0)}$$



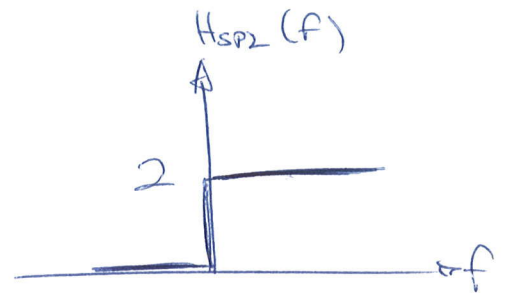
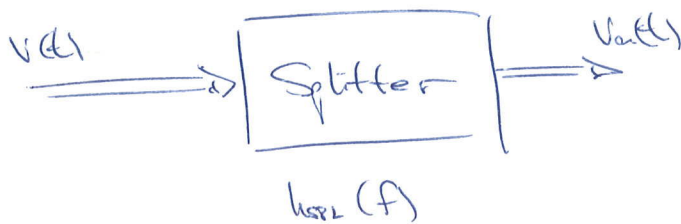
se elimina la redundancia

$$V_a(f) = V_{eq}(f - f_0)$$

$$V(f) = \frac{1}{2} (V_a(f) + V_a^*(-f)) = \text{SIM} \{ V_a(f) \}$$

$V_a(t)$  y  $V_g(t)$  serán, en general, complejas.

$$\begin{aligned} V_g(t) &= V_a(t) e^{-j2\pi f_c t} \\ V_a(t) &= V_g(t) e^{j2\pi f_c t} \end{aligned}$$



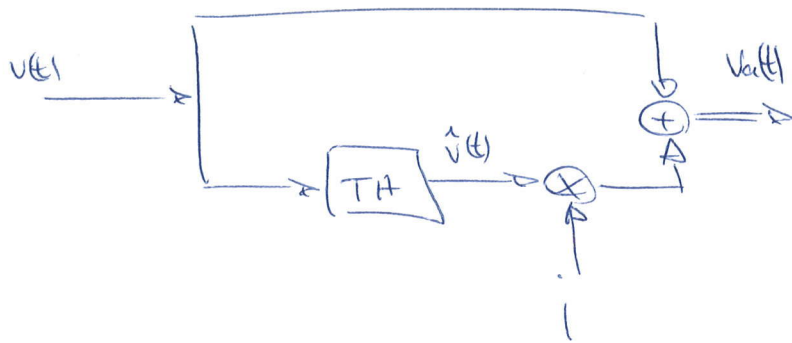
$$V_a(t) = V(t) * h_{spz}(t)$$

$$\begin{aligned} H_{spz}(f) &= 2u(f) \\ &\text{(no normalization)} \end{aligned}$$

$$h_{spz}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ H_{spz}(f) \} = \delta(t) + j \frac{1}{\pi t}$$

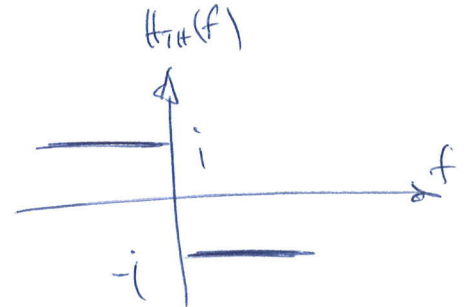
$$V_a(t) = V(t) + j \underbrace{\left( V(t) * \frac{1}{\pi t} \right)}_{\text{transformada de Hilbert}}$$

La transformada de Hilbert no supone un cambio de dominio (seguimos en el tiempo), sino que es el resultado de pasar la señal por un filtro LTI



$$H_{SP2}(f) = 1 + j H_{TH}(f)$$

$$H_{TH}(f) = -j (H_{SP2}(f) - 1)$$



Respuesta impulsiva real  $\Rightarrow$  respuesta en frecuencia hermitica

$$H_{TH}(f) = -j \operatorname{sign}(f) \quad (*)$$

- Rellenar real e imaginaria del equivalente por bloques:

$$v_{eq}(t) = x(t) + j y(t)$$

$x(t)$  : componente en fase  
 $y(t)$  : componente en cuadratura

{ del equivalente por bloques  
 y de la señal original

Al equivalente pasa bajo también se le llama envelope compleja, y el módulo:

$$|V_{eq}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

envelope de la señal original

$$\begin{cases} v(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t - y(t) \sin 2\pi f_0 t \\ \hat{v}(t) = x(t) \sin 2\pi f_0 t + y(t) \cos 2\pi f_0 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{v}(t) \sin 2\pi f_0 t \\ y(t) = \hat{v}(t) \cos 2\pi f_0 t - v(t) \sin 2\pi f_0 t \end{cases}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ V_{eq}(t) \} = \frac{V_{eq}(t) + V_{eq}^*(t)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{V_{eq}(f) + V_{eq}^*(-f)}{2}$$

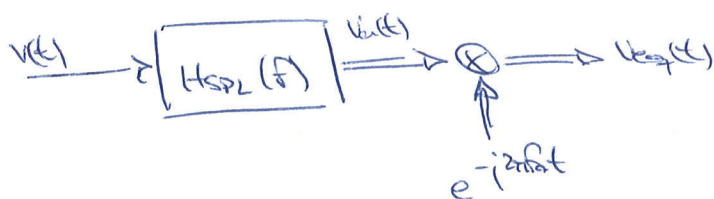
$$y(t) = \operatorname{Im} \{ V_{eq}(t) \} = \frac{V_{eq}(t) - V_{eq}^*(t)}{j2} \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = \frac{V_{eq}(f) - V_{eq}^*(-f)}{j2}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{eq}(f) = 0 \text{ para } |f| > B \\ \text{y} \\ V_{eq}(f) \neq 0 \text{ para } |f| \leq B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(señal de banda limitada)} \\ \left. \begin{array}{l} X(f) = Y(f) = 0 \text{ si } |f| > B \\ X(f) \neq 0 \\ Y(f) \neq 0 \end{array} \right\} |f| \leq B \end{array}$$

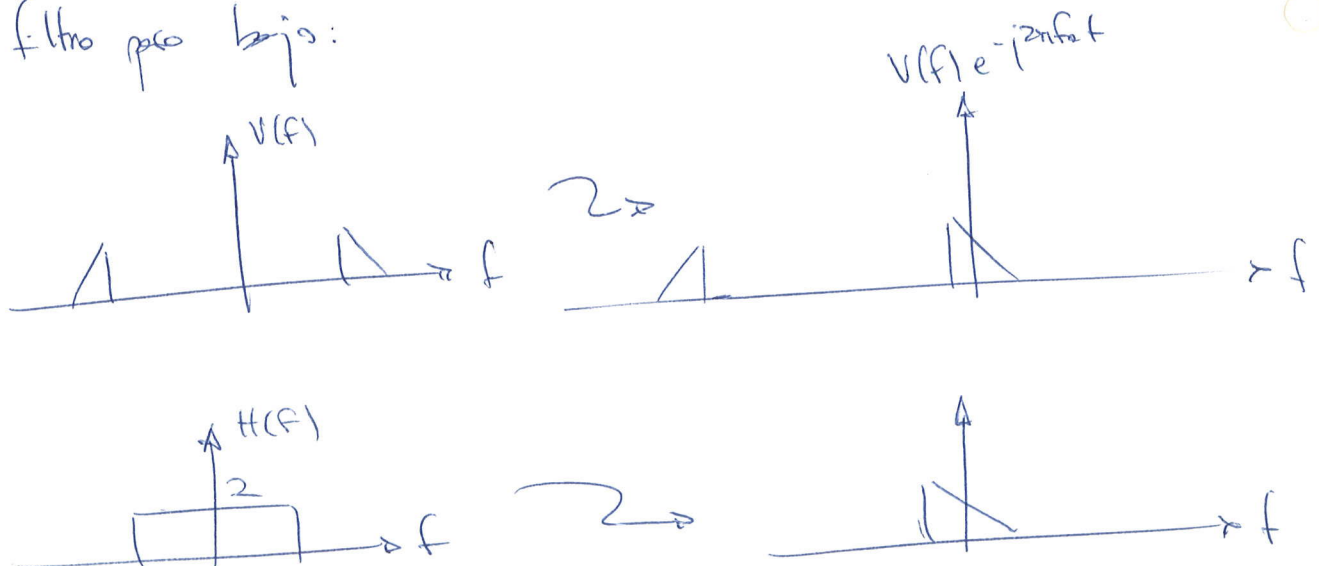
$$\Rightarrow \begin{cases} V_a(f) \neq 0 & f_0 - B < f < f_0 + B \\ V_a(f) = 0 & \text{resto} \end{cases}$$

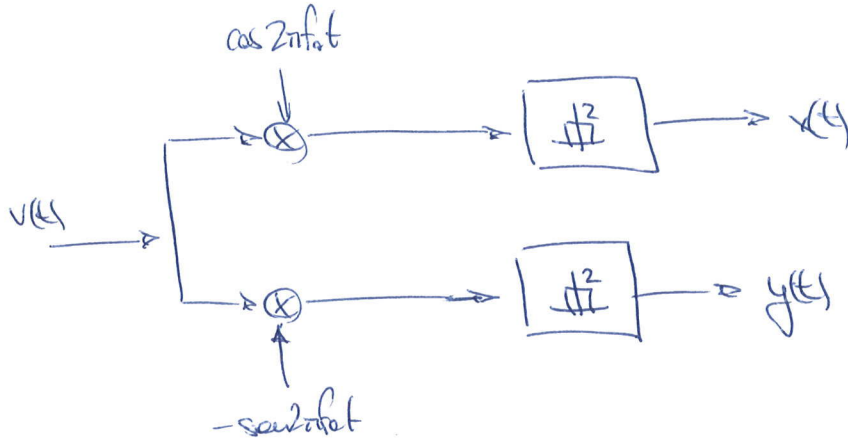
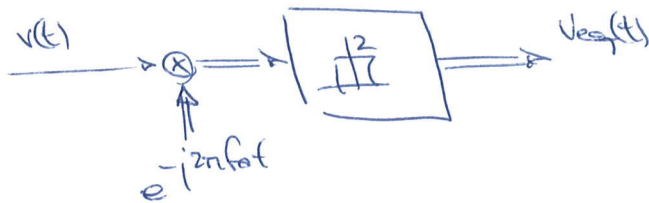
$$\Rightarrow \begin{cases} V(f) \neq 0 & f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ V(f) = 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Alternativa para obtener el equivalente para bajo:



Si partimos de una señal pasabanda, podemos multiplicar primero por la exponencial y luego pasar por un filtro pasabajas:

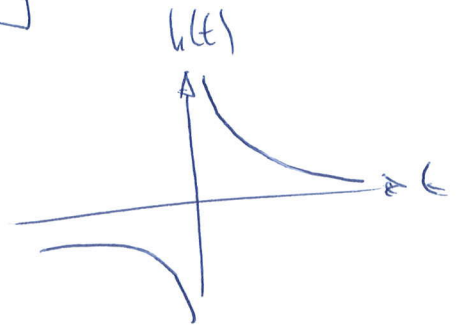
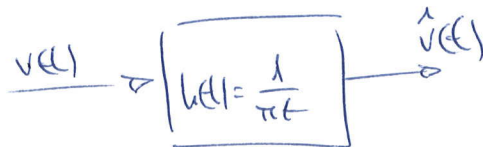




DE MODULADOR  
EN CUADRATURA

### 3.1.- TRANSFORMADA DE HILBERT

Sistema LTI real, con  $|h(t)| = \frac{1}{\pi t}$  \*



$$H(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\} = -j \operatorname{sgn}(f) \quad *$$

En el splitter:  $h_s(t) = \delta(t) + j \frac{1}{\pi t}$

$$H_s(f) = 1 + j \quad H(f) = 1 + j(-j \operatorname{sign}(f))$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

### Propiedades de la Transformada de Hilbert:

1.- Si  $x(t) \in \mathbb{R}$  tiene simetría par,  $\hat{x}(t)$  es impar

Si  $x(t) \in \mathbb{R}$  es impar,  $\hat{x}(t)$  es par

demostración:

$$x(t) \text{ par} \Rightarrow X(f) \text{ real}$$

$$\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = -j \operatorname{sign}(f) \cdot X(f) \Rightarrow \text{imaginaria pura}$$

$$\hat{X}(f) \text{ imaginaria} \Rightarrow \hat{x}(t) \text{ impar}$$

2.-  $\hat{\hat{v}} = -v(t)$

demostración:

$$\hat{\hat{v}}(f) = v(f) (-j \operatorname{sign}(f))^2 = -v(f)$$

3.-  $\hat{x}(t)$  es ortogonal a  $x(t)$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0$

demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left( TF \{ \hat{x}(t) \} \right)^* df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left( -j f \hat{X}(f) \right)^* df =$$

Parseval  $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df + j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

2.  $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f)$  hermítica, entonces ambas integrales son iguales:

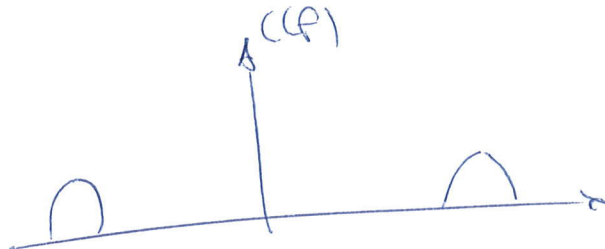
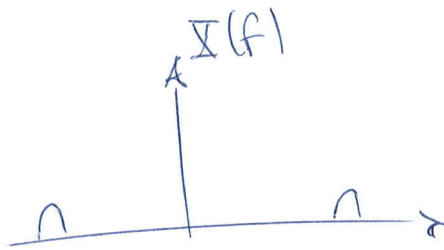
$$-j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df + j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 0$$

4.- Si:  $w(t)$  es paso bajo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{y no log slope de espectro} \\ x(t) \text{ es paso banda} \end{array} \right.$

$$\left( \hat{c}(t) = TH \{ w(t) \cdot x(t) \} = w(t) \cdot \hat{x}(t) \right)$$

la TH sob afeche a la señal paso banda

demonstrieren:



$$\begin{cases} C_+(f) = h(f) * x^+(f) \\ C_-(f) = h(f) * x^-(f) \end{cases}$$

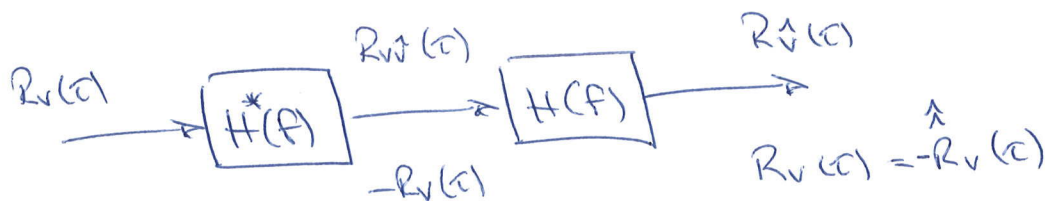
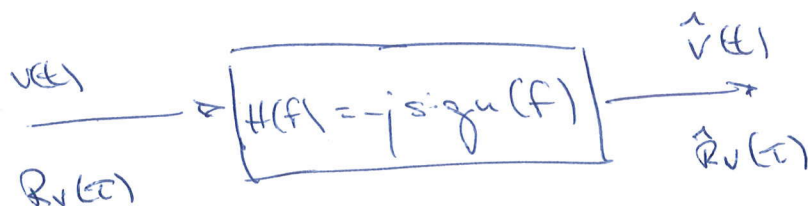
$$\begin{aligned} \text{TF } \{ \hat{x}(t) \} &= -j \operatorname{sign}(f) C(f) = -j C_+(f) + j C_-(f) = \\ &= h(f) * (-j x^+(f)) + h(f) * (j x^-(f)) = \\ &= h(f) * (-j \operatorname{sign}(f) x(f)) = \\ &= h(f) * \text{TF } \{ \hat{x}(t) \} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{TF } \{ c(t) \} = \hat{x}(t) = u(t) \hat{x}(t)$$

S.- a)  $R_{v\uparrow}(t) = -\hat{R}_v(t)$

b)  $R_{v\uparrow}(t) = R_v(t) \iff S_v(f) = S_{v\uparrow}(f)$

demonstración: es inmediata a partir de la relación entre entrada y salida de un filtro



$\cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{TH} \sec 2\pi f_0 t$

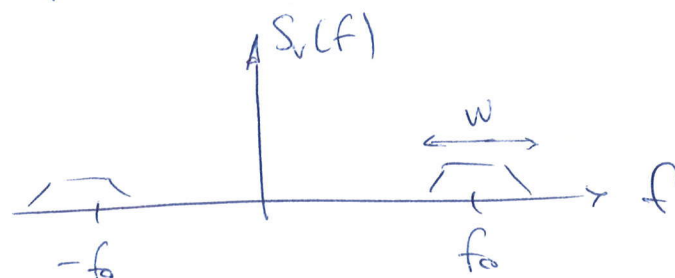


$\sec 2\pi f_0 t \xrightarrow{TH} -\cos 2\pi f_0 t$



#### 4.- SEÑALES ALEATORIAS PASO BANDA

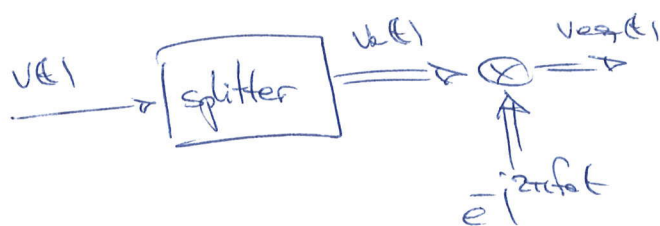
$v(t) \in \mathbb{R}$ , proceso estacionario



$f_0$  puede estar o no en el centro de la banda

Señal paso banda  $\Leftrightarrow W < f_0$

Lx de banda estrecha  $\Rightarrow W \ll f_0$



Queremos conectar los receptores entre las estadísticas (DEP y correlación) de  $v(t)$ ,  $v_a(t)$  y  $v_{eq}(t)$

$v(t)$  es estacionario:

$$v_a(t) = v(t) + j\hat{v}(t)$$

$$v(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow R_v(\tau) \text{ par} \Rightarrow \hat{R}_v(\omega) \text{ impar}$$

$$\text{Impar } \hat{R}_v(\omega) \Rightarrow -\hat{R}_v(\omega) = -\hat{R}_v(\omega)$$

2º  $v_a(t)$  estacionaria

Después de todo, sólo se le pasó la señal  
por un filtro LTI

$$v_{eq}(t) = v_a(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

modulación = operación lineal variante

$$\left\{ \begin{aligned} R_{v_{eq}}(\tau) &= R_{v_a}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} \\ R_{v_{eq} v_{eq}^*}(t, t-\tau) &= \underbrace{R_{v_a v_a^*}(\tau)}_{=0} \underbrace{e^{-j2\pi f_0 (2t-\tau)}}_{\text{em princípio é depende de } t} = 0 \end{aligned} \right.$$

2º  $v_{eq}(t)$  estacionaria

$$S_{v_{eq}}(f) = 4 S_v^+(f+f_0) = S_{v_a}(f+f_0)$$

Descomponiendo  $v_{eq}(t)$  en partes real e imaginaria:

$$v_{eq}(t) = x(t) + jy(t)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ R_{v_{eq}}(\tau) + R_{v_{eq} v_{eq}^*}(\tau) \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ R_{v_{eq}}(\tau) \right\}$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) = R_v(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_v(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau$$

$$R_{xy}(\tau) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ R_{\text{avg}}(\tau) \}$$

$$= R_v(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau - \hat{R}_v(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau$$

(función impar)

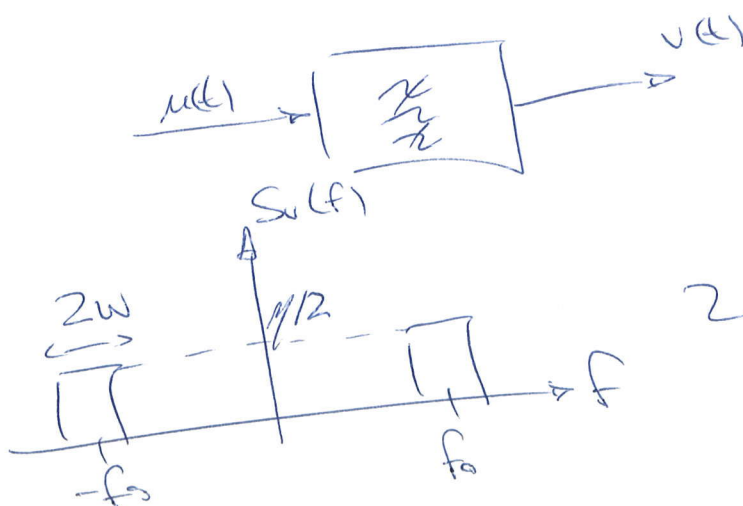
$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau) \Rightarrow R_{xy}(0) = 0$$

$$S_x(f) = S_y(f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ S_{\text{avg}}(f) \}$$

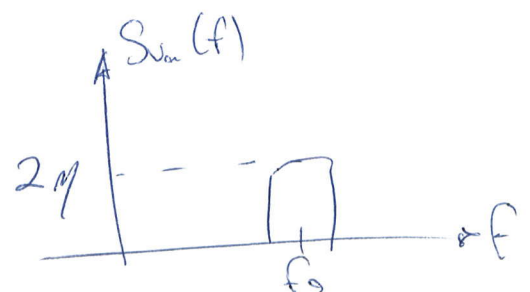
$$= S_v^+(f + f_0) + S_v^-(f - f_0)$$

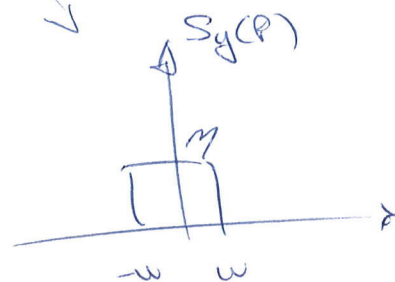
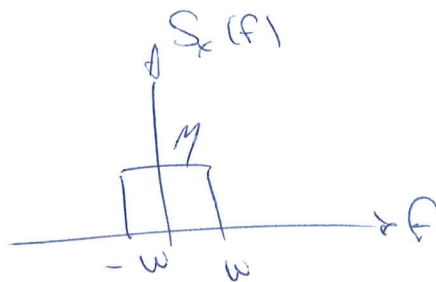
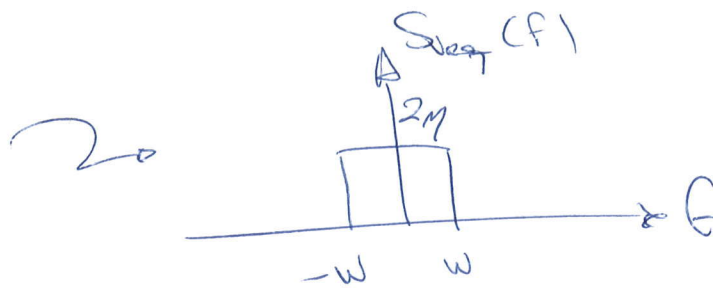
2º desplazar la parte positiva a la izquierda  
y la negativa a la derecha

## 4.1- Ruido BLANCO GAUSSIANO



proceso p-ss blanco  
estacionario





$$S_x(f) = S_y(f) = S_v^+(f+f_0) + S_v^-(f-f_0)$$

$$S_{xx}(f) = j (S_v^+(f+f_0) - S_v^-(f-f_0))$$

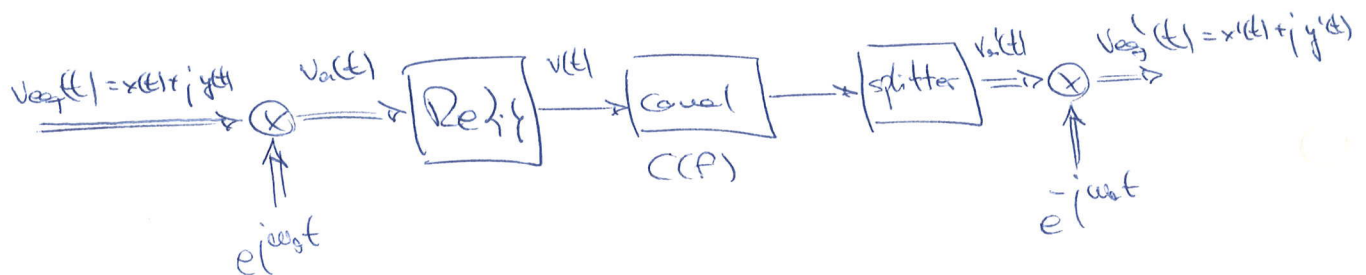
$S_v$ ;  $S_v^+(f)$  is symmetric respect to  $f_0$ :

$$R_{xx}(\tau) = S_{xx}(f) = 0$$

red noise gaussian filtered  $\Rightarrow$  process pass band estimation

## 4.2. - MODULACIÓN / DEMODULACIÓN

$$\begin{matrix} x(t); S_x(f) \\ y(t); S_y(f) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntamente estacionarias} \end{array} \right.$$



Si  $x(t)$ ,  $y(t)$  son conjuntamente estacionarias,  $v(t)$  es cíclicamente estacionaria  $\Rightarrow$  podemos recuperar la información de frecuencia y fase

$$v(t) \text{ es estacionaria si } \begin{cases} R_x(\tau) = R_y(\tau) \\ R_{xy}(\tau) \text{ es impar} \end{cases}$$

# - TEMA 2

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = x_e^*(-t) \Rightarrow \text{simetria hermitica} \\ x_o(t) = -x_o^*(-t) \Rightarrow \text{antisimetria hermitica} \end{array} \right.$$

• simetria Transformada de Fourier:

| t | $x(t)$ | $x(-t)$ | $x^*(t)$  | $x^*(-t)$ | $x_R(t)$ | $jx_I(t)$ | $x_e(t)$ | $x_o(t)$  |
|---|--------|---------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| f | $X(f)$ | $X(-f)$ | $X^*(-f)$ | $X^*(f)$  | $X_e(f)$ | $X_o(f)$  | $X_R(f)$ | $jX_I(f)$ |

• señales deterministas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de energia: } E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ \text{de potencia: } P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt \end{array} \right.$$

→ correlación cruzada:

- señales de energia:  $\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt = x(t) * y^*(-\tau)$

- señales de potencia:  $\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt$

