Señales complejas

Señales deterministas

- Señales de energía.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$ (energía)

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$ (autocorrelación)

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$ (correlación cruzada)

- Señales de potencia

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$ (potencia)

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$ (autocorrelación)

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$$ (correlación cruzada)

Procesos estocásticos

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\}$$

$$R_x(t, t-\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\}$$ (autocorrelación)

$$R_{xy}(t, t-\tau) = E\{x(t)y^*(t-\tau)\}$$ (correlación cruzada)

- Señales aleatorias estacionarias

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\}$$

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t)y^*(t-\tau)\}$$ ← x(t), y(t) conjuntamente estacionarias

- Señales aleatorias cicloestacionarias

$$\overline{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T E\{x(t)x^*(t-\tau)\}dt$$

$$\overline{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T E\{x(t)y^*(t-\tau)\}dt$$

Propiedades de la autocorrelación

1. $|\Phi_x(\tau)| \le \Phi_x(\tau=0)$ $\quad E_x$ o P_x (deterministas)

$|R_x(\tau)| \le R_x(\tau=0)$ $\quad P_x$

$|\overline{R}_x(\tau)| \le \overline{R}_x(\tau=0)$ $\quad P_x$ (aleatorias)

2. *Simetría hermítica*

$$\Phi_x(-\tau) = \Phi_x^*(\tau) \qquad \Phi_{yx}(-\tau) = \Phi_{xy}^*(\tau)$$

$$R_x(-\tau) = R_x^*(\tau) \qquad R_{yx}(-\tau) = R_{xy}^*(\tau)$$

$$\overline{R}_x(-\tau) = \overline{R}_x^*(\tau) \qquad \overline{R}_{yx}(-\tau) = \overline{R}_{xy}^*(\tau)$$

Descomposición de la autocorrelación y la D.E.

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \mathbf{R}_{x_R}(\tau) + \mathbf{R}_{x_I}(\tau) - 2j.\mathrm{Impar}\left[\mathbf{R}_{x_R x_I}(\tau)\right]$$

$$\mathbf{S}_x(f) = \mathbf{S}_{x_R}(f) + \mathbf{S}_{x_I}(f) + 2.\mathrm{Im}\left[\mathbf{S}_{x_R x_I}(f)\right]$$

propiedades de simetría

$$\mathbf{R}_{xx^*}(\tau) = \mathbf{R}_{x_R}(\tau) - \mathbf{R}_{x_I}(\tau) + 2.j.\mathrm{Par}\left[\mathbf{R}_{x_R x_I}(\tau)\right]$$

$$\mathbf{S}_{xx^*}(f) = \mathbf{S}_{x_R}(f) - \mathbf{S}_{x_I}(f) + 2.j.\mathrm{Re}\left[\mathbf{S}_{x_R x_I}(f)\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{R}_x(\tau)\right] = \mathbf{R}_{x_R}(\tau) + \mathbf{R}_{x_I}(\tau) \xleftrightarrow{TF} \mathrm{Par}\left[\mathbf{S}_x(f)\right] = \mathbf{S}_{x_R}(f) + \mathbf{S}_{x_I}(f)$$

$$\mathbf{R}_{x_R}(\tau) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{R}_x(\tau) + \mathbf{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right] \qquad \mathbf{S}_{x_R}(f) = \mathrm{Sim}\left[\frac{\mathbf{S}_x(f) + \mathbf{S}_{xx^*}(f)}{2}\right]$$

$$\mathbf{R}_{x_I}(\tau) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{R}_x(\tau) - \mathbf{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right] \qquad \mathbf{S}_{x_I}(f) = \mathrm{Sim}\left[\frac{\mathbf{S}_x(f) - \mathbf{S}_{xx^*}(f)}{2}\right]$$

$$\mathbf{R}_{x_R x_I}(\tau) = \mathrm{Im}\left[\frac{\mathbf{R}_{xx^*}(\tau) - \mathbf{R}_x(\tau)}{2}\right] \qquad \mathbf{S}_{x_R x_I}(f) = -j.\mathrm{AnSim}\left[\frac{\mathbf{S}_{xx^*}(f) - \mathbf{S}_x(f)}{2}\right]$$

Señal compleja estacionaria $\Rightarrow \begin{cases} R_x(\tau), \text{ independiente de } t \\ R_{xx^*} \text{ también} \end{cases}$

Autocorrelación y D.E. de suma de señales

$$z(t) = x(t) + y(t) \qquad z, x, y \in C$$

$$\mathbf{R}_z(\tau) = \mathbf{R}_x(\tau) + \mathbf{R}_y(\tau) + 2\,\mathrm{Sim}\left[\mathbf{R}_{xy}(\tau)\right]$$

$$\mathbf{S}_z(f) = \mathbf{S}_x(f) + \mathbf{S}_y(f) + 2\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{S}_{xy}(f)\right]$$

Incorrelación: $\mathbf{R}_{xy}(\tau) = m_x m_y$

$$Si \quad m_x = 0 \quad ó \quad m_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{R}_z(\tau) = \mathbf{R}_x(\tau) + \mathbf{R}_y(\tau) \\ \mathbf{S}_z(f) = \mathbf{S}_x(f) + \mathbf{S}_y(f) \end{array}$$

Procesos paso banda

Si x(t) es un proceso paso banda estacionario:

$$\mathbf{R}_{\hat{x}}(\tau)=\mathbf{R}_x(\tau) \;\; y \;\; \mathbf{R}_{x\hat{x}}(\tau)=-\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)$$

$$\mathbf{R}_{x_a}(\tau)=\mathbf{R}_x(\tau)+\mathbf{R}_{\hat{x}}(\tau)-2j\,\mathrm{Impar}\left[\mathbf{R}_{x\hat{x}}(\tau)\right]=$$

$$=2\mathbf{R}_x(\tau)-2j\,\mathrm{Impar}\left[-\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)\right]=$$

$$=2\left[\mathbf{R}_x(\tau)+j\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)\right]$$ ← sólo depende de τ

$$\mathbf{R}_{x_a x_a^*}(\tau)=\mathbf{R}_x(\tau)-\mathbf{R}_{\hat{x}}(\tau)+2j\,\mathrm{Par}\left[\mathbf{R}_{x\hat{x}}(\tau)\right]=$$

$$=2j\,\mathrm{Par}\left[-\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)\right]=0$$

$$\mathbf{S}_{x_a}(f)=TF\left[\mathbf{R}_{x_a}(\tau)\right]=2\left[\mathbf{S}_x(f)+j(-j\,sig(f))\;\mathbf{S}_x(f)\right]=$$

$$=2\left[\mathbf{S}_x(f)+sig(f)\;\mathbf{S}_x(f)\right]=4\mathbf{S}^+{}_x(f)$$

⇒ $x_a(t)$ también es estacionario

$$\mathbf{R}_{x_{eq}}(t,t-\tau)=\mathbf{R}_{x_a}(\tau)\;\; e^{-j2\pi f_0\tau}=\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)$$

$$\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(t,t-\tau)=\mathbf{R}_{x_a x_a^*}(\tau)\;\; e^{-j2\pi f_0(2t-\tau)}=0$$

$$\mathbf{S}_{x_{eq}}(f)=4\mathbf{S}^+{}_x(f+f_0)$$

⇒ $x_{eq}(t)$ también es estacionario

$$\mathbf{R}_{x_F}(\tau)=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)+\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)\right]=$$

$$=\mathbf{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)\mathrm{sen}(2\pi f_0\tau)=\mathbf{R}_{x_C}(\tau)$$

$$\mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)=\mathrm{Im}\left[\frac{\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)-\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)}{2}\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)\right]=$$

$$=\mathbf{R}_x(\tau)\mathrm{sen}(2\pi f_0\tau)-\hat{\mathbf{R}}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\ \text{(Impar)}$$

(par) (impar) (impar) (par)

$$\mathbf{R}_{x_F x_C}(-\tau)=-\mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)\Rightarrow \mathbf{R}_{x_F x_C}(0)=0$$

$$\mathbf{S}_{x_F}(f)=\mathbf{S}_{x_C}(f)=\frac{1}{2}\mathrm{Par}\left[\mathbf{S}_{x_{eq}}(f)\right]=\frac{1}{4}\left[\mathbf{S}_{x_{eq}}(f)+\mathbf{S}_{x_{eq}}(-f)\right]=$$

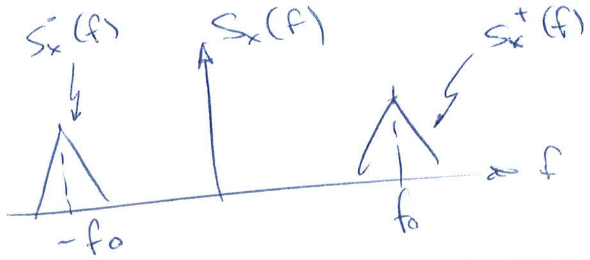
$$=\frac{1}{4}\left[\mathbf{S}_{x_a}(f+f_0)+\mathbf{S}_{x_a}(-f+f_0)\right]=\mathbf{S}_x^+(f+f_0)+\mathbf{S}_x^-(f-f_0)$$

$$\mathbf{S}_{x_F x_C}(f)=\frac{j}{2}\mathrm{Impar}\left[\mathbf{S}_{x_{eq}}(f)\right]=j\left[\mathbf{S}_x^+(f+f_0)-\mathbf{S}_x^-(f-f_0)\right]$$

Si $\mathbf{S}_x^+(f)$ *es simétrica respecto a portadora*: $\mathbf{S}_x^+(f+f_0)=\mathbf{S}_x^-(f-f_0)$

$\Rightarrow \mathbf{S}_{x_F x_C}(f)=0\Rightarrow \mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)=0\Rightarrow$ *incorreladas*

Si $x(t)$ *es Gaussiana* $\Rightarrow x_F(t), x_C$ *conjuntamente Gaussianas e independientes*



Modulación

Si $x_F(t)$, $x_C(t)$ son procesos conjuntamente estacionarios:

$$\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)=\mathbf{R}_{x_F}(\tau)+\mathbf{R}_{x_C}(\tau)-2j\,\mathrm{Impar}\left[\mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)\right]$$
$$\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)=\mathbf{R}_{x_F}(\tau)-\mathbf{R}_{x_C}(\tau)+2j\,\mathrm{Par}\left[\mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)\right]$$
$$\Rightarrow x_{eq}(t)\ \ estacionaria$$

$$\mathbf{R}_{x_a}(t,t-\tau)=\mathbf{R}_{x_a}(\tau)=\mathbf{R}_{x_{eq}}(\tau)\ e^{jw_0\tau}$$
$$\mathbf{R}_{x_a x_a^*}(t,t-\tau)=\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)\ e^{j(2w_0 t-w_0\tau)}$$
$$\Rightarrow x_a(t)\ \ no\ \ es\ \ estacionaria\ \ (sí\ \ cicloestacinaria)$$

$$\mathbf{R}_x(t,t-\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{R}_{x_a}(\tau)+\mathbf{R}_{x_a x_a^*}(t,t-\tau)\right]$$
$$\overline{\mathbf{R}}_x(\tau)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{R}_{x_F}(\tau)+\mathbf{R}_{x_C}(\tau)\right]\ \cos w_0\tau+$$
$$+\mathrm{Impar}\left[\mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)\right]\ \mathrm{sen}\, w_0\tau=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{R}_{x_a}(\tau)\right]$$
$$\Rightarrow x(t)\ \ no\ \ es\ \ estacionaria\ \ (sí\ \ cicloestacinaria)$$

$x(t)$ *es estacionaria si*

$$\mathbf{R}_{x_a x_a^*}(t,t-\tau)=0\Rightarrow\mathbf{R}_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)=0\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{R}_{x_F}(\tau)=\mathbf{R}_{x_C}(\tau)\\ \mathbf{R}_{x_F x_C}(\tau)\ \ es\ \ impar\end{cases}$$

$$S_{x_{eq}}(f)=S_{x_F}(f)+S_{x_C}(f)+2\,\mathrm{Im}\left[S_{x_F x_C}(f)\right]$$
$$S_{x_a}(f)=S_{x_{eq}}(f-f_0)$$
$$S_x(f)=\frac{1}{2}Par\left[S_{x_a}(f)\right]=\frac{1}{4}\left[S_{x_{eq}}(f-f_0)+S_{x_{eq}}(-f-f_0)\right]$$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

Tema 2
Conceptos básicos de Teoría de Señal

Comunicaciones Analógicas
3º Ingenieria de Telecomunicación

1. Introducción

En el estudio de las señales reales paso banda se usa intensivamente una forma de representación de las mismas denominada equivalente paso bajo o envolvente compleja, que es efectivamente una señal compleja. Esta representación es especialmente indicada, cuando el ancho de banda de la señal es muy inferior a su frecuencia central, que es una característica usual de las señales manejadas en comunicaciones (p.e. los sistemas de transmisión vía radio).

La envolvente compleja de las señales paso banda puede verse como una generalización de la representación fasorial, tan ampliamente usada en algunas disciplinas (p.e. análisis de circuitos). La generalización consiste en que el fasor (magnitud compleja) presenta variación temporal.

Las señales complejas aparecen también de forma natural como una consecuencia de la representación en el domínio transformado de Fourier. Las ventajas del uso de los números complejos para esta representación, resulta a estas alturas absolutamente natural y conveniente. Pero vistas desde la perspectiva del dominio de la frecuencia, las señales reales son una singularidad: la transformada inversa de funciones hermíticas. Incluso cuando se parte de señales reales, cualquier manipulación simple de su espectro (como un desplazamiento), hace que la señal se torne compleja.

En estas notas se pretende que el alumno, ya ampliamente familiarizado con el manejo de señales reales, se acostumbre a manejar señales complejas, para lo cual se generalizan los conceptos previamente aplicados a señales reales, especialmente los de autocorrelación y densidad espectral de potencia o energía. Dichos conceptos se aplican tanto a señales deterministas como a señales aleatorias. En el caso de estas últimas se extienden dichos conceptos para señales no estacionarias, y se define una importante clase de señales denominadas cicloestacionarias.

Especial énfasis se realiza en el estudio de las propiedades de simetría de la Transformada de Fourier. La razón para ello es práctica: familiarizandonos con esas propiedades conseguiremos tener una imagen visual de los problemas, que facilitará en gran medida su resolución.

Para concluir estas notas se aborda una importante cuestión: el efecto que produce en las señales aleatorias estacionarias, la modulación y la demodulación.

2. Señales y Sistemas Complejos

Una señal compleja es una función -de variable independiente t, real y de variable dependiente x compleja:

$$\boxed{x(t) \in \mathbb{C}\,,\ t \in \mathbb{R}}$$

La caracterización de una señal compleja se realiza de forma análoga a como se caracterizan los números complejos:

Representación cartesiana:

$$x(t) = x_R(t) + j\,x_I(t)\ ,\ x_R(t),\ x_I(t) \in \mathbb{C}$$

$x_R(t)$ y $x_I(t)$ son señales reales que constituyen respectivamente la parte real e imaginaria de la señal compleja x(t):

$$x_R(t) = \mathrm{Re}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{2}\,, \quad x_I(t) = \mathrm{Im}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

ic Departamento de Ingeniería de Comunicaciones

Representación polar:

$$x(t) = A(t)\, e^{j\varphi(t)},\ A(t),\ \varphi(t) \in \mathbb{R},\ A(t) \geq 0$$

A(t) y φ(t) son señales reales que constituyen el módulo y fase de la señal compleja x(t):

$$A(t) = |x(t)| = \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}\,, \quad \varphi(t) = \arg[x(t)] = \operatorname{atg}\left[\frac{x_I(t)}{x_R(t)}\right]$$

El uso de señales complejas se completa con los sistemas lineales e invariantes caracterizados por respuestas impulsivas h(t) complejas:

$$h(t) \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$$

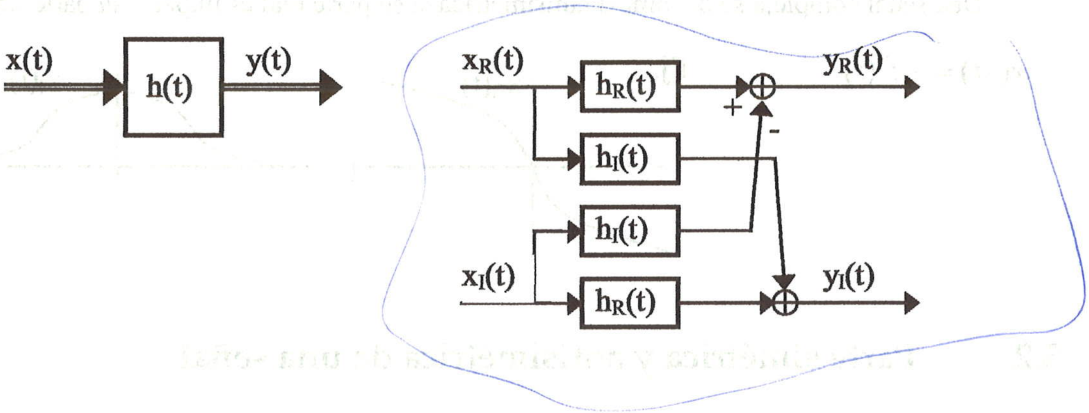
La salida de un sistema lineal e invariante se obtiene realizando la convolución de la respuesta impulsiva con la señal de entrada:

$$y(t) = x(t) * h(t) = [x_R(t) + j.x_I(t)] * [h_R(t) + j.h_I(t)]$$

aplicando la propiedad distributiva de la convolución respecto a la suma, se obtiene la expresión de la parte real e imaginaria de la salida:

$$y_R(t) = x_R(t) * h_R(t) - x_I(t) * h_I(t)$$
$$y_I(t) = x_R(t) * h_I(t) + x_I(t) * h_R(t)$$

Por tanto, el filtrado de señales complejas implica un cuadruple filtrado de las señales reales involucradas.



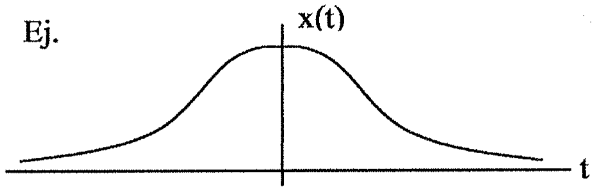
3. Propiedades de simetría de la Transformada de Fourier

3.1. Simetrías

Una señal real se denomina par si la imagen especular respecto al origen de tiempos coincide con la original:

$x(-t) = x(t)$

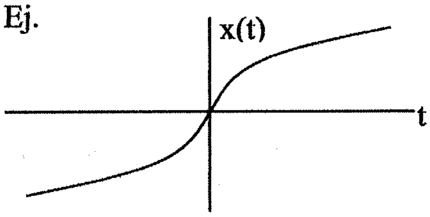
Ej.



Una señal real se denomina impar si la imagen especular respecto al origen de tiempos invierte el signo de la original:

$x(-t) = -x(t)$

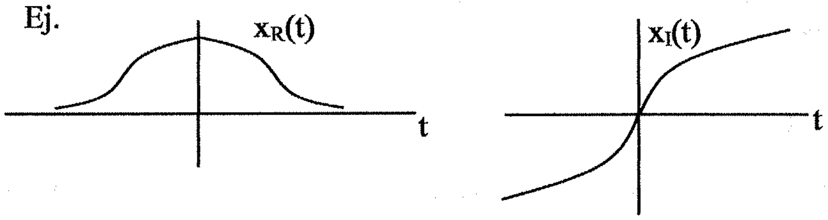
Ej.



Una señal compleja se denomina simétrica si su parte real es par y su parte imaginaria impar:

$x(-t) = x^*(t)$

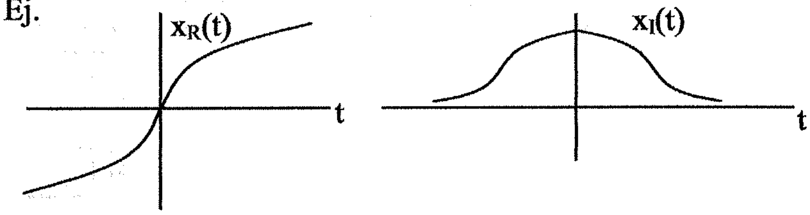
Ej.



Una señal compleja se denomina antisimétrica si su parte real es impar y su parte imaginaria par:

$x(-t) = -x^*(t)$

Ej.



3.2. Parte simétrica y antisimétrica de una señal

Es fácil verificar que una señal real se puede expresar como la suma de una señal par y otra impar:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Dicha descomposición es única y se obtiene mediante las expresiones:

$$x_e(t) = \mathrm{Par}[x(t)] = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \mathrm{Impar}[x(t)] = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

De igual modo, una señal compleja se puede expresar como la suma de una señal simétrica y otra antisimétrica:

$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

Dicha descomposición es única y se obtiene mediante las expresiones:

$$x_e(t) = \mathrm{Sim}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \mathrm{Asim}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2}$$

Resulta evidente que la simetría de señales reales es un caso particular de la definición más general de simetría en señales complejas. La simetría en señales complejas recibe el nombre de simetría hermítica.

3.3. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal compleja se define de la misma forma que la de una señal real:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \quad e^{-j2\pi tf} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t) \quad e^{-j2\pi tf} dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x_I(t) \quad e^{-j2\pi tf} dt$$

La transformada de Fourier de una señal real o compleja es en general una función compleja de variable real. Al considerar señales complejas, estamos considerando pares transformados x(t), X(f) que tienen la misma naturaleza matemática:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$
$$x(t), X(f) \in C$$
$$t, f \in R$$

Las siguientes relaciones se deducen inmediatamente de la definición de la transformada de Fourier:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$
$$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$$
$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

3.4. Propiedades de simetría

Consideremos una señal compleja x(t) y su transformada de Fourier X(f)

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \qquad x(t), X(f) \in C$$

Ambas funciones se pueden descomponer en su parte real e imaginaria, o bien en su parte simétrica y antisimétrica:

$$x(t) = x_R(t) + j\, x_I(t) = x_e(t) + x_o(t)$$
$$X(f) = X_R(f) + j.X_I(f) = X_e(f) + X_o(f)$$

Entonces se verifica que las siguientes funciones son pares transformados:

$$x_R(t) \leftrightarrow X_e(f) \quad x_e(t) \leftrightarrow X_R(f)$$
$$j\, x_I(t) \leftrightarrow X_o(f) \quad x_o(t) \leftrightarrow j\, X_I(f)$$

Es decir, parte real y parte simétrica son pares transformados, como tambien lo son parte antisimétrica y la parte imaginaria multiplicado por el número j.

Estas propiedades son de gran importancia para el análisis de señales moduladas.

4. Correlación.

4.1. Señales Deterministas de Energía o potencia.

Sea x(t) una señal compleja. Se definen la energía E_x y potencia P_x de dicha señal mediante las expresiones:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

Si desarrollamos las anteriores expresiones obtenemos que la energía/potencia de una señal compleja es la suma de las correspondientes a su parte real e imaginaria:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_R^2(t) + x_I^2(t) \right) dt = E_{x_R} + E_{x_I}$$

Cuando la energía de la señal es finita, se dice que se trata de una señal de energía. Cuando la energía de la señal no es finita, pero sí su potencia, hablamos de señal de potencia.Con las definiciones dadas, no existen señales que pertenezcan a ambas categorías.

Sea x(t) una señal determinista compleja de energía. Se define su autocorrelación como:

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t-\tau)\, dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

Sea x(t) una señal determinista compleja de potencia. Se define su autocorrelación como:

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t-\tau)\, dt = \left\langle x(t) x^*(t-\tau) \right\rangle$$

donde se usa el operador $< >$ para expresar el promedio temporal:

$$\left\langle x(t) \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

Evidentemente, la autocorrelación en el origen es la energía/potencia de la señal:

$$\Phi_x(0) = E_x,\ P_x$$

4.2. Señales aleatorias: Estacionariedad y cicloestacionariedad

Una señal aleatoria compleja x(t) se caracteriza completamente mediante el conocimiento de la función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta del vector de variables aleatorias $\mathbf{x}(t_1,..t_N)=[x(t_1)...x(t_N)]$, para cualquier valor de los t_i y N:

$$f_{\mathbf{x}(t_1,\dots,t_N)}(\mathbf{x})$$

Dicha fdp conjunta de N variables complejas debe interpretarse como la fdp de 2N variables reales: la parte real e imaginaria de cada una de ellas.

$$f_{\mathbf{x}(t_1,...t_N)}(\mathbf{x}) = f_{x_R(t_1),x_I(t_1),...,x_R(t_N),x_I(t_N)}(x_{R_1}, x_{I_1}, ..., x_{R_N}, x_{I_N})$$

Una señal aleatoria x(t) es estacionaria en sentido estricto, si su caracterización estadística completa es insensible a desplazamientos temporales de la misma. Expresado formalmente, se debe verificar para cualquier valor de los t_i y N, y para cualquier desplazamiento τ, la fdp verifica:

$$f_{\mathbf{x}(t_1,...t_N)}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}(t_1+\tau,...t_N+\tau)}(\mathbf{x})$$

Una señal aleatoria x(t) es cicloestacionaria en sentido estricto, si su caracterización estadística completa es insensible a desplazamientos temporales múltiplos de cierta cantidad T. Expresado formalmente, se debe verificar para cualquier valor de los t_i y N, y para cualquier valor entero k, la fdp verifica:

$$f_{\mathbf{x}(t_1,...t_N)}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}(t_1+k.T,...t_N+k.T)}(\mathbf{x})$$

Esta caracterización completa de una señal aleatoria rara vez se dá. En su lugar es usual conformarse con el conocimiento de los estadísticos de primer y segundo orden (media y autocorrelación), mucho más fáciles de calcular.

4.3. Señales aleatorias: Potencia y correlación

La media de la señal aleatoria es en general una función del tiempo, que es la esperanza de la señal en cada instante:

$$m_x(t) = E\{x(t)\}$$

La autocorrelación es en general una función de dos variables, definida por la expresión:

$$R_x(t,\tau) = E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\}$$

Cuando la señal es estacionaria dichos estadísticos son invariantes a desplazamientos de la señal, por tanto la media es constante y la autocorrelación solo depende de τ.

$$m_x(t) = m_x(t+t_0) = m_x$$
$$R_x(t,\tau) = R_x(t+t_0,\tau) = R_x(\tau)$$

Cuando la señal es cicloestacionaria dichos estadísticos son invariantes a desplazamientos temporales múltiplos de cierta cantidad T, por tanto para cualquier valor entero de k, se debe verificar:

$$m_x(t) = m_x(t+kT)$$
$$R_x(t,\tau) = R_x(t+kT,\tau)$$

En el caso de señales cicloestacionarias o no estacionarias son útiles, cuando existen, los promedios temporales de la media y autocorrelación, que son respectivamente constante y función de una sola variable τ:

$$\overline{m}_x = \langle m_x(t) \rangle$$
$$\overline{R}_x(\tau) = \langle R_x(t,\tau) \rangle$$

En el caso de señales cicloestacionarias dicho promedio temporal se realiza a lo largo de un periodo:

$$\overline{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T m_x(t)\,dt \; ; \qquad \overline{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_x(t,\tau)\,dt$$

cicloestacionarias

Se define la potencia de una señal aleatoria compleja x(t) como la esperanza de su módulo al cuadrado:

$$P_x(t) = E\left\{|x(t)|^2\right\} = E\left\{x(t)\,x^*(t)\right\} = R_x(t,0)$$

expresión que depende del instante de tiempo y que coincide con el valor de la autocorrelación para τ=0. Se define la potencia media como la media temporal de la potencia:

$$P_x = \langle P_x(t)\rangle = \langle R_x(t,0)\rangle = \overline{R}_x(0)$$

constante que coincide con el valor de la autocorrelación media en el origen. En el caso de señales aleatorias estacionarias, la potencia es constante:

$$P_x(t) = R_x(t,0) = P_x$$

Es interesante destacar la relación que tienen estas definiciones con los conceptos análogos definidos para señales deterministas de potencia. Para ello observese que los promedios temporales de la media y autocorrelación de las señales aleatorias se corresponden con la esperanza del valor medio y autocorrelación de cada una de sus realizaciones, que son señales deterministas:

$$\overline{m}_x = \langle E\{x(t)\}\rangle = E\{\langle x(t)\rangle\}$$

$$\overline{R}_x(\tau) = \langle E\{x(t)\,x^*(t-\tau)\}\rangle = E\{\langle x(t)\,x^*(t-\tau)\rangle\} = E\{\Phi_x(\tau)\}$$

y por tanto la potencia media coincide con la esperanza de las potencias de sus realizaciones:

$$P_x = \left\langle E\left\{|x(t)|^2\right\}\right\rangle = E\left\{\left\langle |x(t)|^2\right\rangle\right\}$$

4.4. Correlación Cruzada.

El concepto de autocorrelación se generaliza con el de correlación cruzada, que involucra a dos señales.

Sean x(t) e y(t) dos señales deterministas complejas y de energía. Se define su correlación cruzada como:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\;\;dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Sean x(t) e y(t) dos señales deterministas complejas y de potencia. Se define su correlación cruzada como:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \langle x(t)\,y^*(t-\tau)\rangle$$

Sean x(t) e y(t) dos señales aleatorias. Se definen respectivamente su correlación cruzada y su promedio temporal como:

$$R_{xy}(t,\tau) = E\{x(t)y^*(t-\tau)\}$$
$$\overline{R}_{xy}(\tau) = \langle R_{xy}(t,\tau)\rangle$$

4.5. Propiedades y Relaciones de filtrado.

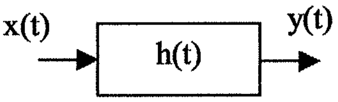
Mostraremos en este apartado un conjunto de propiedades de la correlación, que son válidas para todos los tipos de señales vistos: deterministas de energía o potencia y aleatorias. Utilizaremos la notación correspondiente a esta última. Las tres primeras son consecuencias inmediatas de las definiciones:

$$\overline{R}_x(0) = P_x$$
$$\overline{R}_x(\tau) = \overline{R}_x^*(-\tau)$$
$$\overline{R}_{yx}(\tau) = \overline{R}_{xy}^*(-\tau)$$

Por tanto, la autocorrelación presenta simetría hermítica y su valor en el origen es igual a la energía/potencia.

Especial importancia tienen las relaciones que existen entre las autocorrelaciones de la entrada x(t) y salida y(t) de un sistema lineal e invariante con respuesta impulsiva h(t).

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



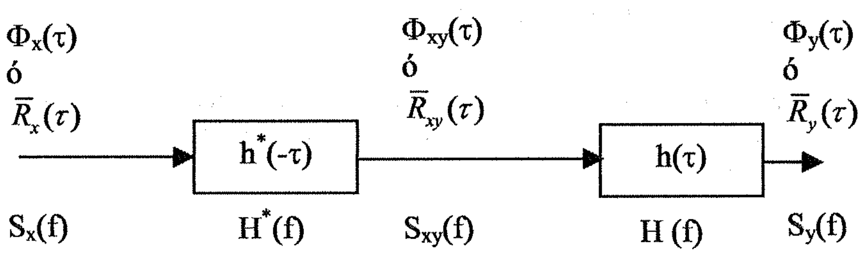
Dichas relaciones son tambien convoluciones operadas sobre las autocorrelación de la entrada:

$$\overline{R}_y(\tau) = \overline{R}_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \qquad \Phi_y(\tau) = \Phi_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

La correlación cruzada entre la entrada y la salida resulta ser:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_x(\tau) * h^*(-\tau) \qquad \overline{R}_{xy}(\tau) = \overline{R}_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

En el diagrama adjunto se muestran esquemáticamente dichas relaciones, donde también aparecen sus transformadas de Fourier.



A continuación se justifican dichas relaciones, para los distintos tipos de señal.

4.5.1 Señales deterministas de energía

En este caso la relación se deriva inmediatamente de la definición:

$$\Phi_y(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau) = x(\tau) * h(\tau) * x^*(-\tau) * h^*(-\tau) = \Phi_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

4.5.2 Señales deterministas de potencia

En este caso la relación se deriva tambien de la de la definición:

$$\Phi_y(\tau) = \left\langle y(t)\, y^*(t-\tau) \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(s) x(t-s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} h^*(v) x^*(t-\tau-v)\, dv \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s) h^*(v) \left\langle x(t-s) x^*(t-\tau-v)\right\rangle ds\, dv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s) h^*(v) \Phi_x(\tau+v-s)\, ds\, dv =$$

$$= \Phi_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

4.5.3 Señales aleatorias

En este caso la derivación es prácticamente idéntica a la correspondiente a señales deterministas de potencia:

$$\overline{R}_y(\tau) = \left\langle E\left\{ y(t)\, y^*(t-\tau) \right\}\right\rangle = \left\langle E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(s) x(t-s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} h^*(v) x^*(t-\tau-v)\, dv \right\}\right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s) h^*(v) \left\langle E\left\{ x(t-s) x^*(t-\tau-v)\right\}\right\rangle ds\, dv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s) h^*(v) \overline{R}_x(\tau+v-s)\, ds\, dv =$$

$$= \overline{R}_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

5. Densidad espectral de energía y potencia.

Sea x(t) una señal compleja. Se define la densidad espectral de energía/potencia como la transformada de Fourier de su autocorrelación:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Dicha función es real, puesto que la autocorrelación tiene simetría hermítica. También es positiva, como se justificará posteriormente.

Sean x(t) e y(t) dos señales complejas. Se define la densidad espectral cruzada como la Transformada de Fourier de la correlación cruzada:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\tau)\, d\tau \ ; \ S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_{xy}(\tau).d\tau$$

La densidad espectral cruzada no es propiamente una densidad. Su valor puede ser complejo. Su utilidad aparece cuando se desea conocer la DE de la suma de señales, a partir de las DE de cada una de ellas, como se verá en el punto 6.

5.1. Propiedades.

Como directa consecuencia de las propiedades de la autocorrelación tenemos:

$$P_x\,,E_x=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f).df$$
$$S_x(f)\geq 0$$
$$S_{yx}(f)=S_{xy}^*(f)$$

La primera se obtiene particularizando la expresión de la transformada inversa para t=0; La segunda es consecuencia (en parte) de la hermiticidad de la autocorrelación; La tercera aparece aplicando las propiedades de la transformada de Fourier.

Las relaciones de filtrado aparecen naturalmente tomando transformadas de Fourier de las correspondientes a la autocorrelación:

$$S_y(f)=S_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

que es la relación que existe entre las densidad espectral de energía/potencia de la entrada y salida de un sistema lineal e invariante en todos los casos contemplados, que son todos los de interés práctico.

y la densidad espectral cruzada es:

$$S_{xy}(f)=S_x(f)H^*(f)$$

5.1.1 Densidad espectral de energía.

En el caso de las señales de energía, las densidad espectral se puede poner en función de la transformada de Fourier de la señal. La autocorrelación para señales de energía se definió como:

$$\Phi_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t-\tau)\,dt=x(\tau)*x^*(-\tau)$$

Por tanto la densidad espectral de energía de una señal resulta ser el módulo al cuadrado de su transformada de Fourier:

$$S_x(f)=TF\left[x(\tau)*x^*(-\tau)\right]=X(f)X^*(f)=\left|X(f)\right|^2$$

5.2. Justificación del concepto de densidad espectral.

El hecho de que la potencia/energia de una señal se pueda obtener mediante integración de la densidad espectral $S_x(f)$, junto a la relación entre las correspondientes a la salida y entrada de un filtro son la causa de que a la transformada de Fourier de la autocorrelación se la denomine densidad espectral de energía/potencia:

$$P_x=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\,df$$
$$S_y(f)=S_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

Para que dicho concepto tenga sentido son necesarias dos condiciones:

1. La señal se puede descomponer espectralmente.
2. La energía/potencia de la señal es la suma de las energías/potencias de sus componentes espectrales:

Veremos a continuación que ambas afirmaciones son ciertas, así como que la transformada de Fourier de la autocorrelación es la densidad espectral.

1. La señal se puede descomponer espectralmente.

Las señales de energía tienen Transformada de Fourier. Haciendo uso de la formula de la Transformada inversa la señal puede ser descompuesta espectralmente en varias, de la siguiente forma:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\,e^{j2\pi ft}df=\sum_{i=1}^{N}\int_{f_{i-1}}^{f_i}X(f)\,e^{j2\pi ft}df=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\ ,\ -\infty=f_0<f_1<...<f_N=\infty$$

donde la señal $x_i(t)$ tiene la misma TF que la señal x(t) en la banda $[f_{i-1},f_i]$, y es nula para el resto de frecuencias:

$$\begin{array}{ll} X_i(f)=X(f), & f\in[f_{i-1},f_i] \\ X_i(f)=0, & f\notin[f_{i-1},f_i] \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} S_{x_i}(f)=S_x(f), & f\in[f_{i-1},f_i] \\ S_{x_i}(f)=0, & f\notin[f_{i-1},f_i] \end{array}$$

Las señales de potencia y las aleatorias no tienen transformada de Fourier[1], y por tanto no pueden ser descompuestas de la forma anterior. En estos casos la descomposición se realiza mediante el uso de un banco de filtros ideales, de respuesta impulsiva $h_i(n)$ que cubren conjuntamente toda la banda. La señal x(n) se filtra con cada uno de estos filtros, y el conjunto de las salidas $x_i(n)$ constituyen su descomposición espectral.

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t), \qquad x_i(t)=x(t)*h_i(t)$$

$$\begin{array}{ll} H_i(f)=1, & f\in[f_{i-1},f_i] \\ H_i(f)=0, & f\notin[f_{i-1},f_i] \end{array};\quad -\infty=f_0<f_1<...<f_N=\infty$$

obsérvese que este proceder, aplicado a señales de energía, da lugar a la misma descomposición que la definida en términos de la Transformada de Fourier.

2. La energía/potencia de la señal es la suma de las de sus componentes espectrales:

La expresión de la DE de la señal $x_i(n)$ vine dada por:

$$S_{x_i}(f)=S_x(f)\left|H_i(f)\right|^2$$

por tanto las DEP de las señales $x_i(n)$ son:

$$\begin{array}{ll} S_{x_i}(f)=S_x(f), & f\in[f_{i-1},f_i] \\ S_{x_i}(f)=0, & f\notin[f_{i-1},f_i] \end{array}$$

la energía/potencia de la señal xi viene dada por la expresión:

$$E_{x_i}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_i}(f).df=\int_{f_{i-1}}^{f_i}S_x(f)df$$

y la suma de las energías:

$$\sum_{i=1}^{N}E_{x_i}=\sum_{i=1}^{N}\int_{f_{i-1}}^{f_i}S_x(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df=E_x$$

En estas condiciones podemos decir con propiedad que E_{xi} /P_{xi} es la energía/potencia de la señal x(t) en la banda $[f_{i-1},f_i]$. Por tanto queda claro que $S_x(f)$ es efectivamente la densidad espectral de energía/potencia:

---

[1] Las señales de potencia, en sentido estricto, no tienen transformada de Fourier. En el caso de las señales periódicas, que son un caso particular de señales de potencia, se suele recurrir a las funciones delta para estudiar su comportamiento en frecuencia, pero no por ello podemos considerar que su transformada de Fourier exista, pues en realidad diverge, ya que la función delta tiene amplitud infinita.

$$\lim_{f_{i-1}\to f_i} \frac{E_{x_i}}{f_i - f_{i-1}} = \lim_{f_{i-1}\to f_i} \frac{\int_{f_{i-1}}^{f_i} S_x(f)\,df}{f_i - f_{i-1}} = S_x(f_i)$$

6. Suma de dos señales: Correlación y Densidad Espectral Cruzada

Calcularemos en este punto la autocorrelación y densidad espectral de la suma de dos señales. Las relaciones son idénticas en todos los casos que estamos contemplando: señales deterministas de energía y potencia, y señales aleatorias en las que exista promedio temporal de su autocorrelación, aunque en los desarrollos usaremos la notación correspondiente a esta última.

Sea la señal z(t) suma de otras dos señales aleatorias, x(t) e y(t):

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$\overline{R}_z(\tau) = \left\langle E\left\{z(t)\,z^*(t-\tau)\right\}\right\rangle = \left\langle E\left\{x(t)\,x^*(t-\tau)\right\}\right\rangle + \left\langle E\left\{y(t)\,y^*(t-\tau)\right\}\right\rangle + \left\langle E\left\{x(t)\,y^*(t-\tau)\right\}\right\rangle + \left\langle E\left\{y(t)\,x^*(t-\tau)\right\}\right\rangle = \overline{R}_x(\tau) + \overline{R}_y(\tau) + \overline{R}_{xy}(\tau) + \overline{R}_{yx}(\tau)$$

y teniendo en cuenta las propiedades de la correlación cruzada:

$$\overline{R}_{xy}(\tau) + \overline{R}_{yx}(\tau) = \overline{R}_{xy}(\tau) + \overline{R}_{xy}^*(-\tau) = 2\,\mathrm{Sim}\left[\overline{R}_{xy}(\tau)\right]$$

Llegamos a la expresión de la autocorrelación de la suma de dos señales, que como se ve depende de la parte simétrica de la correlación cruzada:

$$\overline{R}_z(\tau) = \overline{R}_x(\tau) + \overline{R}_y(\tau) + 2\,\mathrm{Sim}\left[\overline{R}_{xy}(\tau)\right]$$

Tomando TF obtenemos la relación entre las densidades espectrales:

$$S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2\,\mathrm{Re}\left[S_{xy}(f)\right]$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de simetría y linealidad de la TF. En esta última expresión se observa la utilidad de la parte real de la densidad espectral cruzada de dos señales, para el cálculo de la densidad espectral de su suma.

7. Correlación y Densidad Espectral de las partes real e imaginaria

Las expresiones obtenidas en el apartado anterior se pueden utilizar para derivar la relación entre la autocorrelación de una señal compleja, y las correspondientes a su parte real e imaginaria. Sea x(t) una señal compleja, y $x_R(t)$ y $x_I(t)$ sus partes real e imaginaria:

$$x(t) = x_R(t) + j\,x_I(t)\ ,\ \ x_R(t),\ x_I(t) \in R$$

x(t) es por tanto la suma de dos señales, real una e imaginaria pura la otra. Aplicando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\overline{R}_x(\tau)=\overline{R}_{x_R}(\tau)+\overline{R}_{x_I}(\tau)-2\,j\,\text{Impar}\left[\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)\right] \tag{1}$$

donde se ha hecho uso de las igualdades:

$$\overline{R}_{j.x_I}(\tau)=\overline{R}_{x_I}(\tau)$$

$$2\,\text{Sim}\left[\overline{R}_{x_Rj.x_I}(\tau)\right]=2\,\text{Sim}\left[-j\,\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)\right]=\left(-j\,\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)+j\,\overline{R}_{x_Rx_I}(-\tau)\right)=-2\,j\,\text{Impar}\left[\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)\right]$$

Tomando TF obtenemos la relación entre las densidades espectrales:

$$S_x(f)=S_{x_R}(f)+S_{x_I}(f)+2\,\text{Im}\left[S_{x_Rx_I}(f)\right]$$

expresión valida también para señales deterministas de energía y potencia. Obsérvese que la densidad espectral de $x_R(t)$ e $x_I(t)$ debe ser par, mientras que la cruzada debe ser hermítica, por tanto:

$$S_{x_R}(f)+S_{x_I}(f)=\text{Par}[S_x(f)]$$

$$2\,\text{Im}\left[S_{x_Rx_I}(f)\right]=\text{Impar}[S_x(f)]$$

De dichas expresiones se concluye que del conocimiento de las correlaciones de las partes reales e imaginarias se puede obtener la correlación de señales complejas. Sin embargo, el conocimiento de la correlación compleja no nos permite conocer la correlación de sus partes real e imaginaria. En general, la correlación compleja no caracteriza completamente la correlación de sus componentes.

Si calculamos la correlación de x(t) con x*(t) obtenemos:

$$\overline{R}_{xx^*}(\tau)=\overline{R}_{x_R}(\tau)-\overline{R}_{x_I}(\tau)+2\,j\,Par\left[\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)\right] \tag{2}$$

y tomando TF:

$$S_{xx^*}(f)=S_{x_R}(f)-S_{x_I}(f)+2\,j\,\text{Re}\left[S_{x_Rx_I}(f)\right]$$

obsérvese que tanto la correlación como la densidad espectral son funciones complejas con parte real e imaginaria par.

Usando ambos resultados obtenemos:

$$\overline{R}_{x_R}(\tau)=\text{Re}\left[\frac{\overline{R}_x(\tau)+\overline{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right],\qquad \overline{R}_{x_I}(\tau)=\text{Re}\left[\frac{\overline{R}_x(\tau)-\overline{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right]$$

$$\overline{R}_{x_Rx_I}(\tau)=\text{Im}\left[\frac{\overline{R}_{xx^*}(\tau)-\overline{R}_x(\tau)}{2}\right] \tag{3}$$

y tomando TF y aplicando las propiedades de simetría:

$$S_{x_R}(f)=\text{Sim}\left[\frac{S_x(f)+S_{xx^*}(f)}{2}\right],\qquad \overline{R}_{x_I}(f)=\text{Sim}\left[\frac{S_x(f)-S_{xx^*}(f)}{2}\right]$$

$$S_{x_Rx_I}(f)=\text{AnSim}\left[\frac{S_{xx^*}(f)-S_x(f)}{2}\right]$$

Estas expresiones nos indican que en general, para tener una caracterización completa de las partes reales e imaginarias de una señal compleja, no es suficiente la autocorrelación o su densidad espectral, sino que debemos conocer también la correlación cruzada de la señal con su conjugada.

Existe una clase importante de señales que verifican las denominadas condiciones de simetría. Estas condiciones son:

$$\overline{R}_{x_R}(\tau) = \overline{R}_{x_I}(\tau)$$
$$\overline{R}_{x_R x_I}(\tau) = -\overline{R}_{x_I x_R}(\tau)$$

Es decir, las autocorrelaciones de la parte real e imaginaria son iguales y la correlación cruzada es impar. Un enunciado equivalente de estas propiedades es:

$$\overline{R}_{xx^*}(\tau) = \overline{R}_{x_R}(\tau) - \overline{R}_{x_I}(\tau) + 2\,j\,Par\left[\overline{R}_{x_R x_I}(\tau)\right] = 0$$

Resulta claro que para este tipo de señales el conocimiento de la autocorrelación de la señal compleja es suficiente para caracterizar a su parte real e imaginaria:

$$\overline{R}_{x_R}(\tau) = \overline{R}_{x_I}(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{R}_x(\tau)\right]$$
$$\overline{R}_{x_R x_I}(\tau) = -\overline{R}_{x_I x_R}(\tau) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{R}_x(\tau)\right]$$

8. Estacionariedad y Cicloestacionariedad en sentido amplio

Las definiciones de estacionariedad y cicloestacionariedad dadas previamente (sentido estricto) son díficiles de verificar en la práctica. Por ello se dan otras definiciones menos restrictivas y más fáciles de comprobar:

8.1. Señales Reales

Se dice que una señal real es estacionaria en sentido amplio cuando su media y autocorrelación son invariantes a desplazamientos de la señal, por tanto la media es constante y la autocorrelación solo depende de τ.

$$m_x(t) = m_x(t+t_0) = m_x$$
$$R_x(t,\tau) = R_x(t+t_0,\tau) = R_x(\tau)$$

Se dice que dos señales reales x(t) e y(t) son conjuntamente estacionarias en sentido amplio cuando ambas lo son y su correlación cruzada es invariante a desplazamientos de la señal, y por tanto solo depende de τ.

$$R_{xy}(t,\tau) = R_{xy}(\tau)$$

Se dice que una señal real es cicloestacionaria en sentido amplio cuando su media y autocorrelación son invariantes a desplazamientos temporales múltiplos de cierta cantidad T, por tanto para cualquier valor entero de k, se debe verificar:

$$m_x(t) = m_x(t+kT)$$
$$R_x(t,\tau) = R_x(t+kT,\tau)$$

Se dice que dos señales reales x(t) e y(t) son conjuntamente cicloestacionarias en sentido amplio cuando ambas lo son con el mismo periodo T, y su correlación cruzada es invariante a desplazamientos temporales múltiplos de T, por tanto para cualquier valor entero de k, se debe verificar:

$$R_{xy}(t,\tau) = R_{xy}(t+kT,\tau)$$

8.2. Señales Complejas

Se dice que una señal compleja es estacionaria en sentido amplio cuando su media, su autocorrelación y correlación cruzada con su conjugado son invariantes a desplazamientos de la señal:

$$m_x(t) = m_x(t+t_0) = m_x$$

$$R_x(t,\tau) = R_x(t+t_0,\tau) = R_x(\tau)$$

$$R_{xx^*}(t,\tau) = R_{xx^*}(t+t_0,\tau) = R_{xx^*}(\tau)$$

La anterior definición es equivalente a decir que su parte real e imaginaria son conjuntamente estacionarias.

Se dice que una señal compleja es cicloestacionaria en sentido amplio cuando su media, su autocorrelación y correlación cruzada con su conjugado son invariantes a desplazamientos temporales múltiplos de cierta cantidad T, por tanto para cualquier valor entero de k, se debe verificar:

$$m_x(t) = m_x(t+kT)$$

$$R_x(t,\tau) = R_x(t+kT,\tau)$$

$$R_{xx^*}(t,\tau) = R_{xx^*}(t+kT,\tau)$$

La anterior definición es equivalente a decir que su parte real e imaginaria son conjuntamente cicloestacionarias.

9. Transformada de Hilbert

Definiremos en este apartado lo que se entiende por Transformada de Hilbert de una señal. El término transformada en este caso no supone un cambio de dominio, como el caso de la Transformada de Fourier, en el que cambiamos tiempo por frecuencia. La transformada de Hilbert de una señal es simplemente el resultado de pasar la señal por un sistema lineal e invariante. Por tanto se trata tambien de una señal, función del tiempo.

La transformada de Hilbert se usa extensivamente en el manejo de señales moduladas.

9.1. Definición

Sea x(t) una señal real. Se denomina transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ de dicha señal, al resultado de filtrar con un sistema lineal e invariante, denominado Transformador de Hilbert, la señal original:

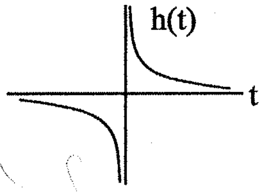
$$\hat{x}(t) = x(t) * h_{TH}(t)$$

La respuesta en frecuencia del Transformador de Hilbert tiene modulo unidad, y fase constante para frecuencias negativas de π/2 y de – π/2 para positivas:

$$H_{TH}(f) = -j \ \text{sig}(f)$$

La respuesta impulsiva del Transformador de Hilbert resulta ser:

$$h_{TH}(t) = \frac{1}{\pi t}$$



9.2. Propiedades

1. Si x(t) es par, $\hat{x}(t)$ es impar, y viceversa.
2. La TH de la TH es la señal original cambiada de signo: $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$
3. x(t) es ortogonal a $\hat{x}(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)\,dt = 0$
4. Sea m(t) señal paso bajo y x(t) señal paso banda sin solapes espectrales. Sea c(t) el producto de las dos anteriores. Entonces su Transformada de Hilbert verifica:

$\hat{c}(t) = m(t)\hat{x}(t)$

Aunque las propiedades anteriores son generales, por simplicidad, se demostrarán para señales de energía.

1. Si x(t) es par $\Rightarrow$ X(f) es real $\Rightarrow$ $\hat{X}(f)$ es imaginario puro $\Rightarrow$ $\hat{x}(t)$ es impar.
2. $H_{TH}(f)H_{TH}(f) = [-j\,\text{sig}(f)]^2 = -1$
3. Haciendo uso del teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\hat{X}^*(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)[-j\,\text{sig}(f)]^*\,df =$$
$$= j\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,\text{sig}(f)\,df = 0$$

4. Dado que los espectros de ambas señales no se solapan, la parte positiva y negativa del espectro de la señal c(t) vienen dados por:

$$C^+(f) = M(f) * X^+(f)$$
$$C^-(f) = M(f) * X^-(f)$$

por tanto la TF de $\hat{c}(t)$ es:

$$\hat{C}(f) = -jC^+(f) + jC^-(f) = M(f) * \left[-jX^+(f) + jX^-(f)\right] =$$
$$= M(f) * [-j\,\text{sig}(f)X(f)] = M(f) * \hat{X}(f) = TF[m(t)\hat{x}(t)]$$

9.3. Correlación y Densidad Espectral

Mostraremos en este punto las relaciones que existen entre las autocorrelaciones de una señal x(t) y de su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$. Dichas expresiones se derivan inmediatamente, puesto que una señal y su transformada de Hilbert están relacionadas mediante operaciones de filtrado:

$$\hat{x}(t) = x(t) * h_{TH}(t)$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia/energía es:

$$S_{\hat{x}}(f) = S_x(f)\left|H_{TH}(f)\right|^2$$
$$S_{x\hat{x}}(f) = S_x(f)H_{TH}^*(f)$$

Pero:

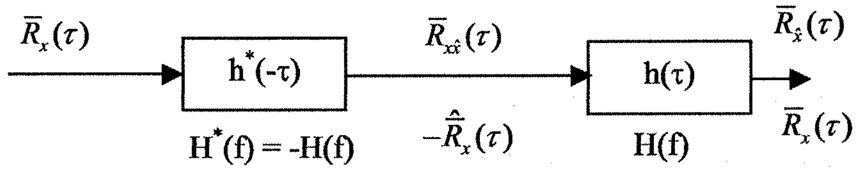
$$H_{TH}(f) = -j\,sig(f)$$

y por tanto:

$$S_{\hat{x}}(f) = S_x(f)$$
$$S_{x\hat{x}}(f) = -S_x(f)H_{TH}(f)$$

Tomando transformada inversa de dichas expresiones, se deduce:

$$\overline{R}_{\hat{x}}(\tau) = \overline{R}_x(\tau)$$
$$\overline{R}_{x\hat{x}}(\tau) = -\overline{R}_x(\tau) * h_{TH}(\tau) = -\hat{\overline{R}}_x(\tau)$$



Las autocorrelaciones de una señal y su Transformada de Hilbert son idénticas, y su correlación cruzada es la Transformada de Hilbert de la autocorrelación de la señal original cambiada de signo.

De lo anterior se deduce que la señal original y su Transformada de Hilbert tienen la misma potencia o energía.

10. Señales paso banda, analíticas y equivalentes paso bajo

La TF de señales reales presentan simetría hermítica. Esto significa que el conocimiento de su espectro para frecuencias positivas permite deducir su valor para frecuencias negativas. De este hecho surgen unas representaciones equivalente de señales reales que preservan la parte correspondiente a frecuencias positiva del espectro de la señal original y eliminan la parte correspondiente a frecuencias negativas. Dicha representación, aplicable a cualquier señal real, es fundamentalmente utilizada para las señales paso banda. Es por tanto la representación adecuada para describir las señales moduladas que se suelen usar en comunicaciones.

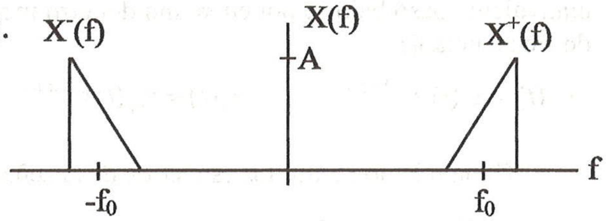
10.1. Relaciones espectrales

Aunque estas representaciones son aplicables para cualquier tipo de señales, para introducirlas vamos a basarnos en señales de energía, que tengan TF.

Sea x(t) una señal y X(f) su TF. Por comodidad vamos a descomponer dicho espectro en dos partes, el correspondiente a las frecuencias positivas $X^{+}(f)$ y el de las negativas $X^{-}(f)$:

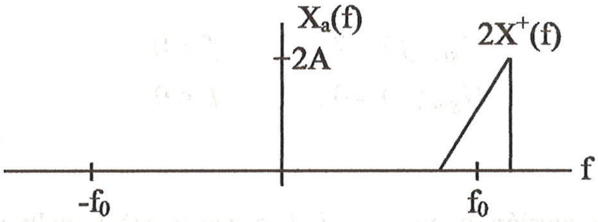
$$X(f)=X^{+}(f)+X^{-}(f)$$
$$X^{+}(f)=X(f)\,,\; X^{-}(f)=0\,,\; f>0$$
$$X^{+}(f)=0\,,\; X^{-}(f)=X(f)\,,\; f<0$$

Ej.



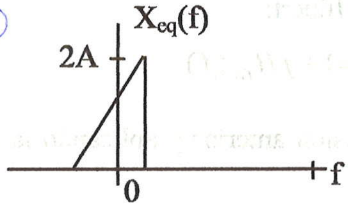
La señal analítica de x(t), $x_a(t)$ es una señal compleja cuyo espectro es:

$$X_a(f)=2X^{+}(f)$$



El equivalente paso bajo de x(t) respecto a f_0, $x_{eq}(t)$ es una señal compleja cuyo espectro es:

$$X_{eq}(f)=X_a(f+f_0)$$



es decir, el equivalente paso bajo se obtiene mediante desplazamiento hacia la izquierda de valor f_0 del espectro de la señal analítica. f_0 es una frecuencia en principio arbitraria, perteneciente a la banda de paso de la señal x(t), o próxima a ella. En el contexto de señales moduladas f_0 será habitualmente la frecuencia de portadora.

Resulta claro que de cualquiera de estas señales podemos obtener las demás:

$$\begin{aligned} X_a(f)&=X_{eq}(f-f_0)\\ X(f)&=\frac{X_a(f)+X_a^{*}(-f)}{2}=\mathrm{Sim}[X_a(f)] \end{aligned} \qquad (4)$$

La segunda expresión es consecuencia de la hermiticidad del espectro de x(t):

$$X^{-}(f)=X^{+^{*}}(-f)$$

10.2. Relaciones temporales

En el punto anterior hemos visto la relación entre los espectros de la señal real paso banda, la analítica y el equivalente paso bajo. Veamos ahora la relación existente en el dominio del tiempo. Cuando conozcamos dicha relación podremos aplicar estas definiciones a todo tipo de señales, incluso las que no tengan TF.

Teniendo en cuenta la propiedad de modulación de la TF resulta claro que la señal analítica y el equivalente paso bajo se obtienen uno del otro mediante la multiplicación por una exponencial compleja de frecuencia f_0:

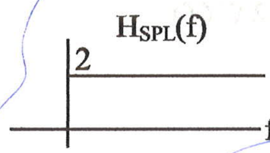
$$x_{eq}(t) = x_a(t)e^{-j2\pi f_0 t} \qquad x_a(t) = x_{eq}(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

De la relación entre los espectros de la señal paso banda y su analítica, también resulta claro que:

$$X_a(f) = X(f)H_{SPL}(f)$$

donde $H_{SPL}(f)$ viene dado por:

$$\begin{aligned} H_{SPL}(f) &= 2, \quad & f > 0 \\ H_{SPL}(f) &= 0, \quad & f < 0 \end{aligned}$$



La expresión anterior nos indica que la señal analítica se obtiene mediante filtrado de la señal original, con un filtro de respuesta en frecuencia $H_{SPL}(f)$. Dicho filtro se denomina splitter, y dada su asimetría, su respuesta impulsiva debe ser compleja. La respuesta en frecuencia del splitter se puede relacionar con la del Transformador de Hilbert:

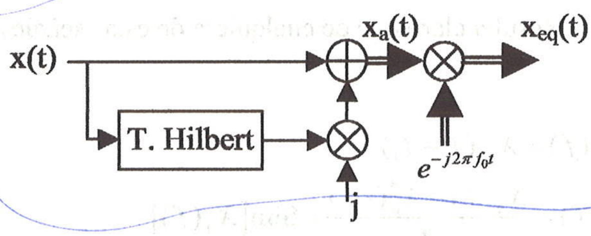
$$H_{SPL}(f) = 1 + \mathrm{sig}(f) = 1 + j(-j\,\mathrm{sig}(f)) = 1 + jH_{TH}(f)$$

Tomando TF inversa de la expresión anterior y aplicando la propiedad de linealidad de la TF, obtenemos:

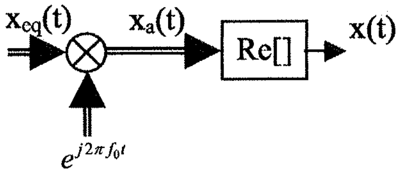
$$h_{SPL}(t) = \delta(t) + j\,h_{TH}(t) = \delta(t) + j\frac{1}{\pi t}$$

La relación temporal buscada es por tanto:

$$x_a(t) = x(t) * h_{SPL}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$



Es decir la parte real de la señal analítica es la señal original, y su parte imaginaria es su transformada de Hilbert. El que la señal original sea la parte real de la analítica se pudo deducir directamente de la expresión 4 y de las propiedades de simetría de la TF. En el siguiente diagrama se muestra el proceso de obtención de la señal original a partir de su equivalente paso bajo.



La parte real $x_F(t)$ e imaginaria $x_C(t)$ del equivalente paso bajo reciben la denominación de componente en fase y cuadratura de la señal original, respectivamente:

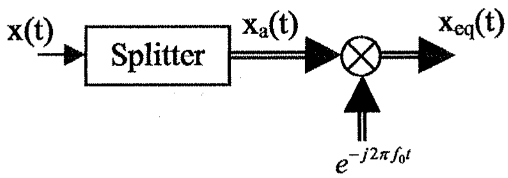
$$x_{eq}(t) = x_F(t) + j\,x_C(t)\ ; \qquad x_F(t),\ x_C(t) \in \mathbb{R}$$

11. Procesos paso banda

Calculamos en este apartado la autocorrelación y densidad espectral del equivalente paso bajo de una señal aleatoria estacionaria paso banda. Conclusiones importantes de este estudio es que tanto la señal analítica como el equivalente paso bajo son señales tambien estacionarias, que cumplen las condiciones de de simetría.

11.1. Diagrama

En la figura adjunta se muestra un diagrama con el proceso de obtención del equivalente paso bajo de la señal paso banda.



11.2. Señal analítica

Sea x(t) una señal real estacionaria paso banda. Ello implica que su espectro es nulo en torno al origen. La señal analítica correspondiente, se obtiene mediante filtrado con el splitter de la señal original:

$$x_a(t) = x(t) * h_{SPL}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

donde $h_{SPL}(t)$ es la respuesta impulsiva del splitter y $\hat{x}(t)$ es la Transformada de Hilbert de la señal original. Cuando la entrada de un sistema LTI es estacionaria, la salida tambien lo es. Por tanto la señal analítica es una señal compleja estacionaria. Para obtener su autocorrelación utilizaremos la expresión 1 obtenida en el apartado siete:

$$R_{x_a}(\tau) = R_x(\tau) + R_{\hat{x}}(\tau) - 2j\,\mathrm{Impar}\left[R_{x\hat{x}}(\tau)\right] = 2R_x(\tau) - 2j\,\mathrm{Impar}\left[-\hat{R}_x(\tau)\right]$$

Puesto que la autocorrelación de una señal real es función par, su Transformada de Hilbert es impar, y por tanto:

$$R_{x_a}(\tau) = 2\left[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)\right]$$

y por tanto la autocorrelación de la señal analítica resulta ser la señal analítica de la autocorrelación de la señal original, multiplicada por dos. La densidad espectral es por tanto:

$$S_{x_a}(f) = 4S_x^+(f)$$

Observese que la señal analítica cumple las condiciones de simetria, y por tanto:

$$R_{x_a x_a^*}(\tau) = 0$$

11.3. Equivalente paso bajo

El equivalente paso bajo se obtiene multiplicando por una exponencial compleja a la señal analítica:

$$x_{eq}(t) = x_a(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

Se trata de una operación lineal pero variante, y no hay garantia de que la salida sea tambien estacionaria. Para averiguarlo calculamos su autocorrelación mediante la formula general:

$$R_{x_{eq}}(t,\tau) = E\left\{x_{eq}(t)x_{eq}^*(t-\tau)\right\} = E\left\{x_a(t)e^{-j2\pi f_0 t}\,x_a^*(t-\tau)e^{j2\pi f_0(t-\tau)}\right\} =$$
$$= E\left\{x_a(t)x_a^*(t-\tau)\right\}e^{-j2\pi f_0\tau} = R_{x_a}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}$$

la autocorrelación no depende de la variable t, condición necesaria para que sea estacionario. La densidad espectral es por tanto la de la señal analítica desplazada f_0 hacia la izquierda.:

$$S_{x_{eq}}(f) = S_{x_a}(f+f_0) = 4S_x^+(f+f_0)$$

Veamos ahora la correlación cruzada con su conjugada:

$$R_{x_{eq}x_{eq}^*}(t,\tau) = E\left\{x_{eq}(t)x_{eq}(t-\tau)\right\} = E\left\{x_a(t)e^{-j2\pi f_0 t}\,x_a(t-\tau)e^{-j2\pi f_0(t-\tau)}\right\} =$$
$$= E\left\{x_a(t)x_a(t-\tau)\right\}e^{-j2\pi f_0(2t-\tau)} = R_{x_a x_a^*}(\tau)e^{-j2\pi f_0(2t-\tau)} = 0$$

que es nula. Por tanto podemos afirmar que el equivalente paso bajo de una señal estacionaria es tambien estacionaria y que cumple las condiciones de simetría.

11.4. Componentes en fase y cuadratura

Las componentes en fase $x_F(t)$ y cuadratura $x_C(t)$ de la señal x(t), son la parte real e imaginaria del equivalente paso bajo. Puesto que este último cumple las condiciones de simetria, se verifica:

$$R_{x_F}(\tau) = R_{x_C}(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{x_{eq}}(\tau)\right]$$

$$R_{x_F x_C}(\tau) = -R_{x_C x_F}(\tau) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[R_{x_{eq}}(\tau)\right]$$

fácilmente se desarrollan las expresiones anteriores para ponerlo en función de la señal original:

$$R_{x_F}(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{x_a}(\tau).e^{-j2\pi f_0 t}\right]=R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_x(\tau)\mathrm{sen}(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{x_F x_C}(\tau)=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[R_{x_a}(\tau).e^{-j2\pi f_0 t}\right]=R_x(\tau)\mathrm{sen}(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

Las Densidades espectrales correspondientes son:

$$S_{x_F}(f)=S_{x_C}(f)=\frac{1}{2}Par\left[S_{x_{eq}}(f)\right]$$

$$S_{x_F x_C}(f)=-S_{x_C x_F}(f)=\frac{j}{2}\mathrm{Impar}\left[S_{x_{eq}}(f)\right]$$

expresiones que se pueden poner en función de la señal original:

$$S_{x_F}(f)=S_{x_C}(f)=\frac{1}{4}\left[S_{x_a}(f+f_0)+S_{x_a}(-f+f_0)\right]=S_x^+(f+f_0)+S_x^-(f-f_0)$$

$$S_{x_F x_C}(f)=-S_{x_C x_F}(f)=j\left[S_x^+(f+f_0)-S_x^-(f-f_0)\right]$$

donde se ha hecho uso de la identidad:

$$S_{x_a}(f)=4S_x^+(f)=4S_x^-(-f)$$

La densidad espectral de las componente en fase y cuadratura se obtienen por tanto desplazando el espectro positivo f_0 a la izquierda y el negativo f_0 a la derecha y sumándolos, y la densidad espectral cruzada restándolos. Observese que cuando la señal x(t) tiene una densidad espectral simétrica respecto a la portadora, la densidad espectral cruzada se anulará, ya que ambos términos serán identicos:

$$S_x^+(f+f_0)=S_x^-(f-f_0)\Rightarrow S_{x_F x_C}(f)=0$$

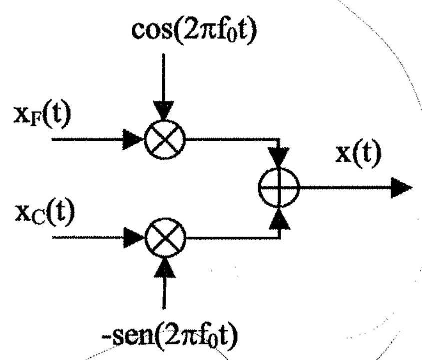
Esto implica que ambas componentes están incorreladas. Además, si x(t) presenta distribución gaussiana, también la presentarán la señal analítica y su equivalente paso bajo (las operaciones lineales sobre variables aleatorias gaussianas dan como resultado variables aleatorias gaussianas). En dicha situación, incorrelación implica independencia estadística. Por tanto, si x(t) es gaussiana y su densidad espectral es simétrica respecto a la portadora, las componentes en fase y cuadratura son señales gaussianas independientes.

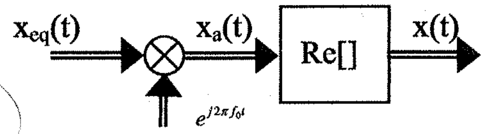
12. Modulación

Calculamos en este apartado la autocorrelación y densidad espectral de una señal modulada producida por la modulación en cuadratura de dos señales reales conjuntamente estacionarias. Conclusión importante del mísmo es que dicha señal es en general cicloestacionaria con un periodo igual al de la portadora usada. El proceso es inverso al seguido en el apartado anterior. Partimos de dos señales conjuntamente estacionaria, que son respectivamente la componente en fase y cuadratura de la señal modulada, respecto a la portadora.

12.1. Diagrama de modulación

En la figura adjunta se muestra un diagrama del proceso de modulación de dos señales en cuadratura, para obtener la señal modulada.





12.2. Señales moduladoras y equivalente paso bajo de la señal modulada

Las señales moduladoras $x_F(t)$ y $x_C(t)$ son dos señales reales conjuntamente estacionarias paso bajo. Dichas señales son también las componentes en fase y cuadratura de la señal modulada, cuando se calculan respecto a la portadora. El equivalente paso bajo de dicha señal modulada es por tanto:

$$x_{eq}(t) = x_F(t) + j\,x_C(t)$$

y es por tanto una señal compleja estacionaria. Su autocorrelación y su correlación cruzada con su conjugada vendrán dadas por las expresiones 1 y 2:

$$R_{x_{eq}}(\tau) = R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau) - 2j\,\mathrm{Impar}\left[R_{x_F x_C}(\tau)\right]$$

$$R_{x_{eq}x^*_{eq}}(\tau) = R_{x_F}(\tau) - R_{x_C}(\tau) + 2j\,Par\left[R_{x_F x_C}(\tau)\right]$$

y la densidad espectral:

$$S_{x_{eq}}(f) = S_{x_F}(f) + S_{x_C}(f) + 2\,\mathrm{Im}\left[S_{x_F x_C}(f)\right]$$

12.3. Señal analítica

La señal analítica se obtiene multiplicando por una exponencial compleja al equivalente paso bajo:

$$x_a(t) = x_{eq}(t)\,e^{j2\pi f_0 t}$$

Se trata de una operación lineal pero variante, y no hay garantia de que la salida sea tambien estacionaria. Para averiguarlo calculamos su autocorrelación mediante la formula general:

$$R_{x_a}(t,t-\tau)=E\left\{x_a(t)x_a^*(t-\tau)\right\}=E\left\{x_{eq}(t)e^{j2\pi f_0 t}\,x_{eq}^*(t-\tau)e^{-j2\pi f_0(t-\tau)}\right\}=$$
$$=E\left\{x_{eq}(t)x_{eq}^*(t-\tau)\right\}e^{j2\pi f_0.\tau}=R_{x_{eq}}(\tau)e^{j2\pi f_0 \tau}$$

la autocorrelación no depende de la variable t, condición necesaria para que sea estacionario. La densidad espectral es por tanto la de la señal analítica desplazada f_0 hacia la izquierda.:

$$S_{x_a}(f)=S_{x_{eq}}(f-f_0)$$

Veamos ahora su correlación cruzada con su conjugada:

$$R_{x_a x_a^*}(t,t-\tau)=E\left\{x_a(t)x_a(t-\tau)\right\}=E\left\{x_{eq}(t)e^{j2\pi f_0 t}\,x_{eq}(t-\tau)e^{j2\pi f_0(t-\tau)}\right\}=$$
$$=E\left\{x_{eq}(t)x_{eq}(t-\tau)\right\}e^{j2\pi f_0(2t-\tau)}=R_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\,e^{j4\pi f_0 t}$$

que es una función de dos variables pero periódica en t. Por tanto, la señal analítica es una señal cicloestacionaria.

12.4. Señal modulada

La señal modulada es la parte real de la señal analítica:

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[x_a(t)\right]$$

por tanto su autocorrelación viene dada por la expresión 3:

$$R_x(t,\tau)=\mathrm{Re}\left[\frac{R_{x_a}(\tau)+R_{x_a x_a^*}(t,\tau)}{2}\right]$$

La señal modulada, al igual que la señal analítica resulta ser cicloestacionaria. Su promedio temporal es:

$$\bar{R}_x(\tau)=\mathrm{Re}\left[\frac{R_{x_a}(\tau)+\bar{R}_{x_a x_a^*}(\tau)}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{x_a}(\tau)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[R_{x_F}(\tau)+R_{x_C}(\tau)\right]\cos(2\pi f_0\tau)+\mathrm{Impar}\left[R_{x_F x_C}(\tau)\right]\mathrm{sen}(2\pi f_0\tau)$$

Y la densidad espectral (TF de la parte real de la autocorrelación):

$$S_x(f)=\frac{1}{2}Par\left[S_{x_a}(f)\right]=\frac{S_{x_{eq}}(f-f_c)+S_{x_{eq}}(-f-f_c)}{4}$$

La expresión anterior nos dá la densidad espectral de una señal modulada en función de la correspondiente de su equivalente paso bajo. Observese que para obtener dicho espectro, se desplaza el del equivalente paso bajo f_0 a la izquierda, y se calcula su parte par.

Un aspecto a destacar son las condiciones que deben cumplir las señales moduladoras para que la señal modulada sea estacionaria. Resulta evidente que la condición es que la señal analítica sea estacionaria. Si observamos la expresión de la correlación cruzada de la señal analítica con su conjugada, resulta claro que esto solo ocurrirá si el equivalente paso bajo cumple las condiciones de simetría, pues en ese caso:

$$R_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)=0 \qquad \text{luego} \qquad R_{x_a x_a^*}(t,t-\tau)=R_{x_{eq}x_{eq}^*}(\tau)e^{j2\pi f_0(2t-\tau)}=0$$

Este resultado viene a ratificar el obtenido en el apartado anterior: el equivalente paso bajo de una señal estacionaria cumple las condiciones de simetría.

13. Resumen de autocorrelaciones y densidades espectrales

$x(t),\, y(t) \in \mathbf{C}$

Se define la correlación cruzada de x(t), e y(t) como:

$$\Phi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$ Señales determinista de energia finita

$$\Phi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$ Señales determinista de potencia finita

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau)=E\{x(t)y^*(t-\tau)\}$$ Señales aleatorias estacionarias

$$\overline{\mathbf{R}}_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T E\{x(t)y^*(t-\tau)\}dt$$ Señales aleatorias cicloestacionarias

En adelante usaremos la notación correspondiente a señales aleatorias estacionarias, pero las expresiones son validas también para el resto de los casos.

Se define la autocorrelación de la señal x(t) como:

$\mathbf{R}_x(\tau)=\mathbf{R}_{xx}(\tau)$;

Y la densidad espectral y densidad espectral cruzada de potencia (energia) como:

$\mathbf{S}_x(f)=TF[\mathbf{R}_x(\tau)]$; $\qquad \mathbf{S}_{xy}(f)=TF[\mathbf{R}_{xy}(\tau)]$

Relaciones entre las autocorrelaciones de una señal compleja y sus partes real e imaginaria:

$x(t)=x_R(t)+j\,x_I(t)$

$\mathbf{R}_x(\tau)=\mathbf{R}_{x_R}(\tau)+\mathbf{R}_{x_I}(\tau)-2j\,\mathrm{Impar}\left[\mathbf{R}_{x_R x_I}(\tau)\right]$	$\mathbf{S}_x(f)=\mathbf{S}_{x_R}(f)+\mathbf{S}_{x_I}(f)+2\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{S}_{x_R x_I}(f)\right]$
$\mathbf{R}_{xx^*}(\tau)=\mathbf{R}_{x_R}(\tau)-\mathbf{R}_{x_I}(\tau)+2j\,\mathrm{Par}\left[\mathbf{R}_{x_R x_I}(\tau)\right]$	$\mathbf{S}_{xx^*}(f)=\mathbf{S}_{x_R}(f)-\mathbf{S}_{x_I}(f)+2j\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{S}_{x_R x_I}(f)\right]$
$\mathrm{Re}[\mathbf{R}_x(\tau)]=\mathbf{R}_{x_R}(\tau)+\mathbf{R}_{x_I}(\tau)$	$\mathrm{Par}[\mathbf{S}_x(f)]=\mathbf{S}_{x_R}(f)+\mathbf{S}_{x_I}(f)$

$\mathbf{R}_{x_R}(\tau)=\mathrm{Re}\left[\dfrac{\mathbf{R}_x(\tau)+\mathbf{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right]$ $\mathbf{R}_{x_I}(\tau)=\mathrm{Re}\left[\dfrac{\mathbf{R}_x(\tau)-\mathbf{R}_{xx^*}(\tau)}{2}\right]$ $\mathbf{R}_{x_Rx_I}(\tau)=\mathrm{Im}\left[\dfrac{\mathbf{R}_{xx^*}(\tau)-\mathbf{R}_x(\tau)}{2}\right]$	$\mathbf{S}_{x_R}(f)=\mathrm{Sim}\left[\dfrac{\mathbf{S}_x(f)+\mathbf{S}_{xx^*}(f)}{2}\right]$ $\mathbf{S}_{x_I}(f)=\mathrm{Sim}\left[\dfrac{\mathbf{S}_x(f)-\mathbf{S}_{xx^*}(f)}{2}\right]$ $\mathbf{S}_{x_Rx_I}(f)=-j\,\mathrm{AnSim}\left[\dfrac{\mathbf{S}_{xx^*}(f)-\mathbf{S}_x(f)}{2}\right]$

14. Resumen de representación de señales paso banda

Sea x(t) una señal real paso banda:

$$x(t)\in\mathbf{R}\quad / \quad S_x^+(f)=0,\quad |f-f_0|\geq B,\quad f_0>B>0$$

Un Transformador de Hilbert es un sistema LTI, caracterizado por:

$$h(t)=\frac{1}{\pi\, t};\ H(f)=-j\,\mathrm{Sig}(f)$$

La transformada de Hilbert de x(t) es la salida del transformador de Hilbert, cuando su entrada es x(t):

$$\hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi . t}$$

Se definen la señal analítica $x_a(t)$, equivalente paso bajo $x_{eq}(t)$, componente en fase $x_F(t)$, y en cuadratura $x_C(t)$ de x(t):

$$x_a(t)\ ,\ x_{eq}(t)\in\mathbf{C}\ ;\ x_F(t)\ ,\ x_C(t)\in\mathbf{R}$$

$$x_a(t)=x(t)+j\hat{x}(t)\ ;\ x_{eq}(t)=x_a(t).e^{-j2\pi f_0 t}=x_F(t)+j\,x_C(t)$$

Las relaciones generales entre las autocorrelaciones y las densidades espectrales son:

$R_{x_a}(\tau)=2\left[R_x(\tau)+j\hat{R}_x(\tau)\right]$	$S_{x_a}(f)=4S_x^+(f)$
$R_{x_{eq}}(\tau)=R_{x_a}(\tau)e^{-j2\pi f_0 t}$	$S_{x_{eq}}(f)=S_{x_a}(f+f_0)$
$R_{x_F}(\tau)+R_{x_C}(\tau)=\mathrm{Re}\left[R_{x_{eq}}(\tau)\right]$	$S_{x_F}(f)+S_{x_C}(f)=\mathrm{Par}\left[S_{x_{eq}}(f)\right]$
$R_x(\tau)=\dfrac{\mathrm{Re}\left[R_{x_a}(\tau)\right]}{2}$	$S_x(f)=\dfrac{S_{x_{eq}}(f-f_0)+S_{x_{eq}}(-f-f_0)}{4}$

Si x(t) es una señal aleatoria estacionaria, $x_F(t)$ y $x_C(t)$ son conjuntamente estacionarias y:

$R_{x_F}(\tau) = R_{x_C}(\tau) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[R_{x_{eq}}(\tau)\right]$	$S_{x_F}(f) = S_{x_C}(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Par}\left[S_{x_{eq}}(f)\right] = S_x^+(f+f_0) + S_x^-(f-f_0)$
$R_{x_F x_C}(\tau) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[R_{x_{eq}}(\tau)\right]$	$S_{x_F x_C}(f) = \frac{j}{2}\,\mathrm{ImPar}\left[S_{x_{eq}}(f)\right] = j\left[S_x^+(f+f_0) - S_x^-(f-f_0)\right]$

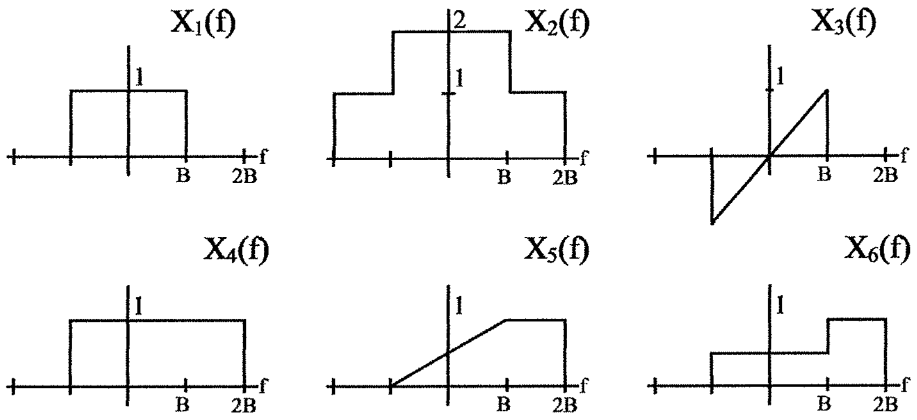
Si $x_F(t)$ y $x_C(t)$ son señales aleatorias conjuntamente estacionarias, x(t) es en general cicloestacionaria:

$R_x(t,\tau) = \mathrm{Re}\left[\dfrac{R_{x_a}(\tau) + R_{x_a x_a^*}(t,\tau)}{2}\right]$	$\overline{R}_x(\tau) = \frac{1}{2}\left[R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau)\right]\cos(2\pi f_0 \tau) +$ $+\,\mathrm{Impar}\left[R_{x_F x_C}(\tau)\right]\mathrm{sen}(2\pi f_0 \tau)$

Comunicaciones Analógicas 3º I.Telecomunicación.
Tema 2. Conceptos básicos de Tª de la señal

Ejercicios de simetrías de señales

a) Pinte la simetría par e impar de las siguientes señales.



b) Pinte la simetría hermítica y antihermítica de las señales $Z_1(f)$, $Z_2(f)$ y $Z_3(f)$ definidas como:

$$Z_1(f) = X_1(f) + j\,X_3(f)$$
$$Z_2(f) = X_4(f) + j\,X_5(f)$$
$$Z_3(f) = X_4(f) + j\,X_6(f)$$

c) Pinte los espectros asociados a la parte real e imaginaria de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ y $x_6(t)$

d) Obtenga una expresión de $x_4(t)$ y de $x_5(t)$ en función de $z_2(t)$

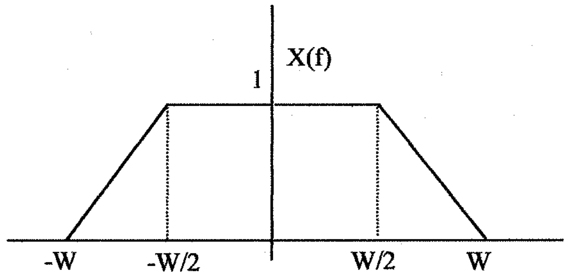
e) Obtenga una expresión de $Sim[Z_3(f)]$ y de $AnSim[Z_3(f)]$ en función de $X_4(f)$ y $X_6(f)$

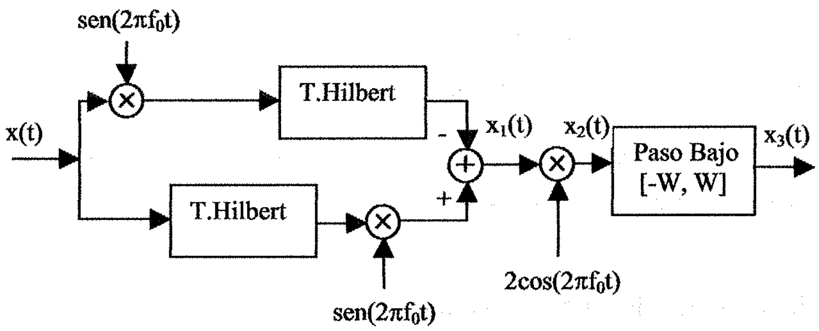
f) Obtenga una expresión de $Re[z_2(t)]$ y de $Im[z_2(t)]$ en función de $x_4(t)$ y $x_5(t)$

g) Especifique el tipo de simetría, si tienen alguna, y si son reales o complejas todas las señales definidas, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, así como de sus partes reales e imaginarias.

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE COMUNICACIONES ANALÓGICAS
TEMA II: CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE LA SEÑAL

II.1. Determine las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ y dibuje sus espectros, sabiendo que el espectro de $x(t)$ es el de la figura.





II.2. El proceso aleatorio $X(t)$ viene definido por:

$$X(t) = X\cos(2\pi f_0 t) + Y\sin(2\pi f_0 t)$$

donde X e Y son dos variables aleatorias gaussianas independientes con media 0 y varianza σ^2.

a) Obtenga $m_X(t)$

b) Obtenga $R_X(t,t-\tau)$. ¿Es $X(t)$ estacionario? ¿Es cicloestacionario?

c) Determine la densidad espectral de potencia de $X(t)$

d) Responder a las cuestiones anteriores si $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

II.3. Sea $X(t)$ un proceso cicloestacionario de periodo T y θ un variable aleatoria, independiente de $X(t)$ y uniformemente distribuida en $[0,T)$. Demuestre que $Y(t) = X(t+\theta)$ es estacionaria y que su autocorrelación viene definida por:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t,t-\tau)\,dt$$

II.4. Sea un ruido blanco gaussiano de media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$ que pasa por un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B.

a) Calcule la autocorrelación del proceso de salida Y(t).

b) Si $\tau=1/(2B)$, encuentre la función densidad de probabilidad conjunta de las variables Y(t) e Y(t+τ). ¿Son dichas variables independientes?

II.5. Cuando la entrada de un sistema LTI es un proceso estacionario la salida es también un proceso estacionario. ¿Es cierto lo contrario? Es decir, si sabemos que la salida de un sistema LTI es un proceso estacionario ¿podemos concluir que la entrada es necesariamente un proceso estacionario?

II.6. Sea X(t) un proceso cicloestacionario aplicado a un sistema LTI con respuesta al impulso h(t).

a) Demuestre que el proceso de salida es también cicloestacionario.

b) Demuestre que $\overline{R}_Y(\tau)=\overline{R}_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$

c) Concluya que la relación $S_Y(f)=S_X(f)*|H(f)|^2$ es válida para procesos estacionarios y cicloestacionarios.

II.7. Un ruido gaussiano blanco de media 0, $n_w(t)$, con densidad espectral de potencia $N_0/2$, pasa por un filtro paso banda ideal de 3-11 Khz. El proceso de salida se denota como n(t).

a) Si f_0=7 Khz, determine $S_{n_F}(f)$, $S_{n_C}(f)$, y $R_{n_F n_C}(\tau)$ donde $n_F(t)$ y $n_C(t)$ son las componentes en fase y cuadratura de n(t).

b) Repita el apartado anterior para f_0=6 Khz.

II.8. Sea p(t) una señal pasobanda con componentes en fase y cuadratura $p_F(t)$ y $p_C(t)$ y sea $X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n p(t-nT)$ donde los A_n son variables aleatorias independientes. Exprese $X_F(t)$ y $X_C(t)$ en función de $p_F(t)$ y $p_C(t)$.

OTROS PROBLEMAS PROPUESTOS

J.G. Proakis. "Communications System Engineering"
3.45 3.46 3.50 3.65 3.71 3.72 3.73