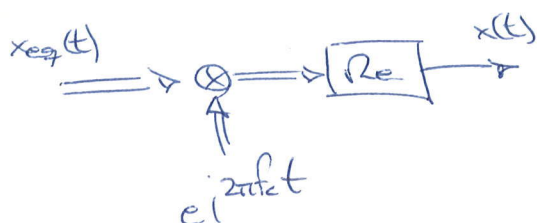


TEMA 3: MODULACIONES ANALÓGICAS

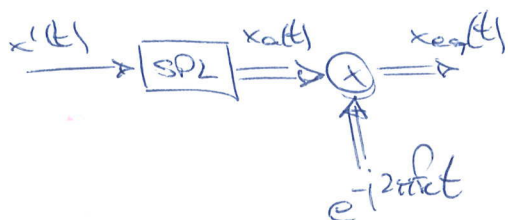
LINEALES Y ANGULARES

1. MODULACIONES LINEALES

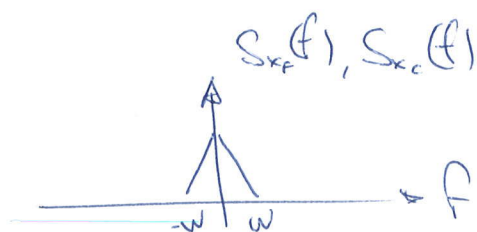


• modulación

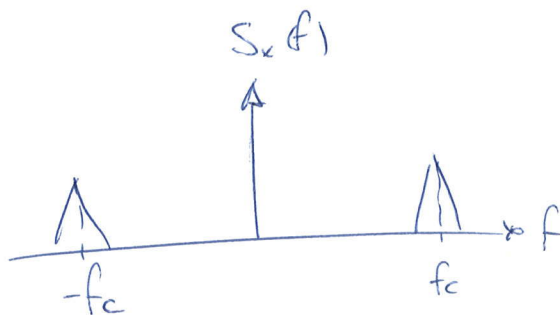
$$(x_{eq}(t) = x_p(t) + jx_c(t))$$



• demodulación



2o



Se denominan modulaciones lineales a aquellas en las que las señales a transmitir quedan unidas a un portador lineal con los componentes en fase y cuadratura de la señal modulada.

Señales de información: $\left. \begin{array}{l} z_1(t) \in \mathbb{R} \\ z_2(t) \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Componentes en fase y cuadratura:

$$\left. \begin{array}{l} x_p(t) = g_p(z_1(t), z_2(t)) \\ x_c(t) = g_c(z_1(t), z_2(t)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_p, g_c \text{ lineales} \Leftrightarrow \text{modulador} \\ \text{lineal} \end{array}$$

Consideremos señales de información normalizadas:

$$\boxed{\max(|z(t)|) = 1}$$

Además, dado que la media de estas señales se supondrá de media unit:

• señal determinista $\Rightarrow \overline{z(t)} = 0$

• señal aleatoria estacionaria $\Rightarrow \mu_z = 0$

Caracterizaremos las S.A.E. por su DCF, $S_z(f)$, y su autocorrelación, $R_z(\tau)$

Expresión de la señal modulada:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ x_{\text{eq}}(t) e^{j\omega_c t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ |x_{\text{eq}}(t)| e^{j \arg x_{\text{eq}}(t)} e^{j\omega_c t} \right\} =$$

$$= |x_{\text{eq}}(t)| \cos(\omega_c t + \arg x_{\text{eq}}(t))$$

"amplitud" de $x_{\text{eq}}(t)$ fase de $x_{\text{eq}}(t)$

1.1. TIPOS DE MODULACIONES LINEALES

1. Doble Banda Lateral (DBL = DSB)

$$\begin{cases} x_f(t) = z(t) \\ x_c(t) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = |x_f(t)| \cos \omega_c t$$

2. Modulación de Amplitud (AM)

$$\begin{cases} x_f(t) = 1 + m z(t) \\ x_c(t) = 0 \end{cases}$$

m = índice de modulación
 $0 \leq m \leq 1$

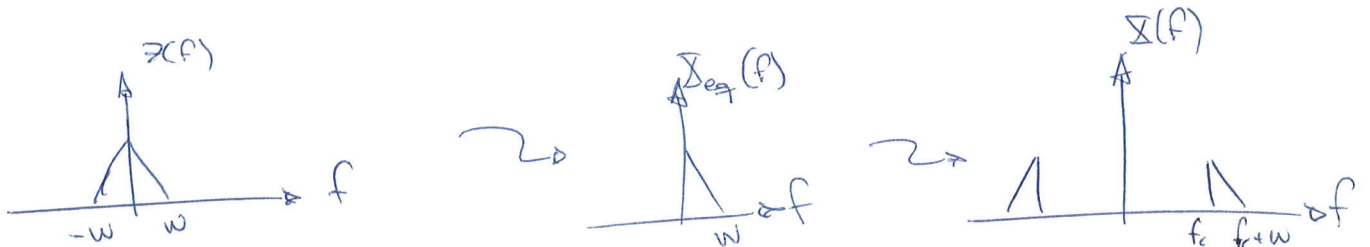
$$x(t) = (1 + m \cdot z(t)) \cos \omega_c t$$

3.- Banda lateral Única (BLU o SSB):

$$\begin{cases} x_r(t) = z(t) \\ x_c(t) = \hat{z}(t) \end{cases}$$

$$x_{eq}(t) = z(t) + j\hat{z}(t)$$

Se usa para conseguir una reducción del ancho de banda



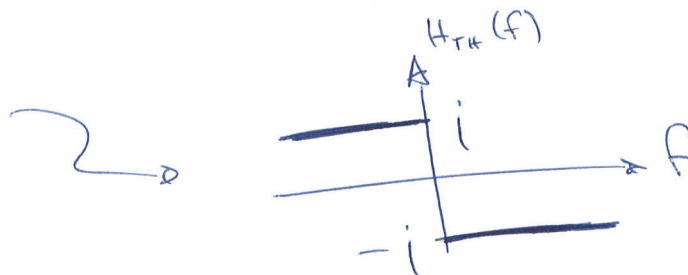
La realización es difícil para señales pasabajas, ya que la transformación de Hilbert debe aproximarse

en la práctica:



este filtro tampoco será ideal

$$\hat{z}(t) = TH(z(t))$$

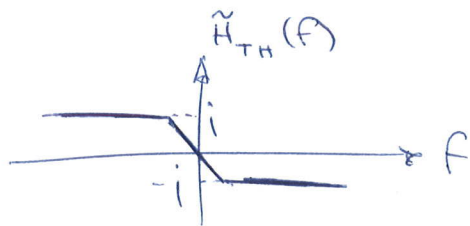


Es realizable para señales de voz, ya que tiene poca potencia a bajas y altas frecuencias.

4.- Banda Lateral Residual (BLR o BLV):

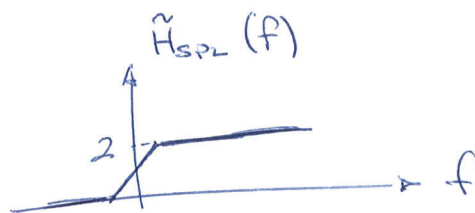
Buena eficiencia espectral para señales base banda, sin necesidad de usar filtros ideales

$$\begin{cases} x_p(t) = z(t) \\ x_c(t) = \tilde{z}(t) = PTH(z(t)) \end{cases}$$

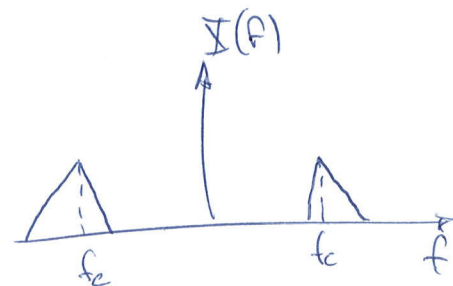
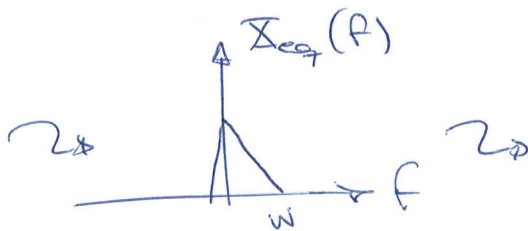
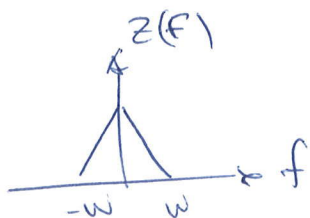
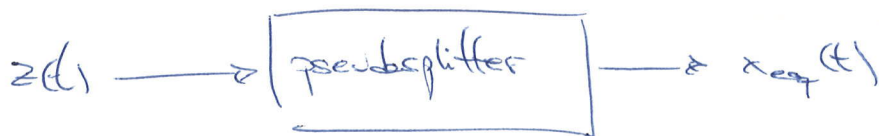


PTH = Pseudo Transformada de Hilbert

Pseudospplitter:



$$\tilde{H}_{SPL}(f) = 1 + j \tilde{H}_{TH}(f)$$



En la práctica, se usan un modulador DBL seguido de un filtro.

S. - Modulación en Cuadratura (MQ):

$$x_F(t) = z_1(t)$$

$$x_C(t) = z_2(t)$$

Se modulan las señales de información independientes:

$$R_{z_1, z_2}(t) = S_{z_1, z_2}(f) = 0$$

Se tiene una eficiencia espectral similar a BPSK, emitiendo 2 señales con frecuencias próximas.

No se usa mucho en comunicaciones analógicas (sí en digitales), porque en el receptor no es fácil separarlas.

1.2. - POTENCIAS

1.2.1. - DEFINICIONES

$$x_F \rightarrow P_{x_F}$$

$$x_C \rightarrow P_{x_C}$$

$$x_Q \rightarrow P_{x_Q}$$

$$x_{eq} \rightarrow P_{x_{eq}}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{P_{x_{eq}}} &= E \left[x_{eq}(t) x_{eq}^*(t) \right] = E \left[|x_{eq}(t)|^2 \right] = \\ &= E \left[x_F^2(t) \right] + E \left[x_C^2(t) \right] = \underline{P_{x_F} + P_{x_C}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \underline{P_{x_Q}} = P_{x_{eq}} \quad (x_Q(t) = x(t) + j\hat{x}(t))$$

$$c) P_{x_c} = P_x + P_x^* = 2P_x$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{P_{x_f} + P_{x_c}}{2} \quad (\times A^2)$$

d) PET (Peak Envelope Power): es la potencia de pico de envoltura, la potencia que tendría una señal si se modificara a una señal continua que tenga como valor el máximo del equivalente para la s :

$$P_{EP} = \frac{1}{2} \max \{ |x_{eq}(t)|^2 \} \quad (\times A^2)$$

La PET es la potencia que debería soportar un amplificador del sistema sin quemarse

$$P_{EP} = \frac{A^2}{2} \max \{ |x_{eq}(t)|^2 \} = \frac{A^2}{2} \max \{ x_f^2(t) + x_c^2(t) \}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ x_{eq}(t) e^{i2\pi f_c t} \} = a(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

$$a(t) = |x_{eq}(t)|$$

$$\varphi(t) = \arg(x_{eq}(t))$$

$$x(t) = \max(a(t)) \cos 2\pi f_c t \quad \rightarrow \quad \overline{P_{EP}} \\ \text{(máxima envolvente)}$$

e) Densidad Espectral de Potencia (DEP):

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} (S_{x_{eq}}(f-f_c) + S_{x_{eq}}(f+f_c))$$

$$S_{x_{eq}}(f) = S_{x_r}(f) + S_{x_c}(f) + 2 \operatorname{Im} \{ S_{x_r x_c}(f) \}$$

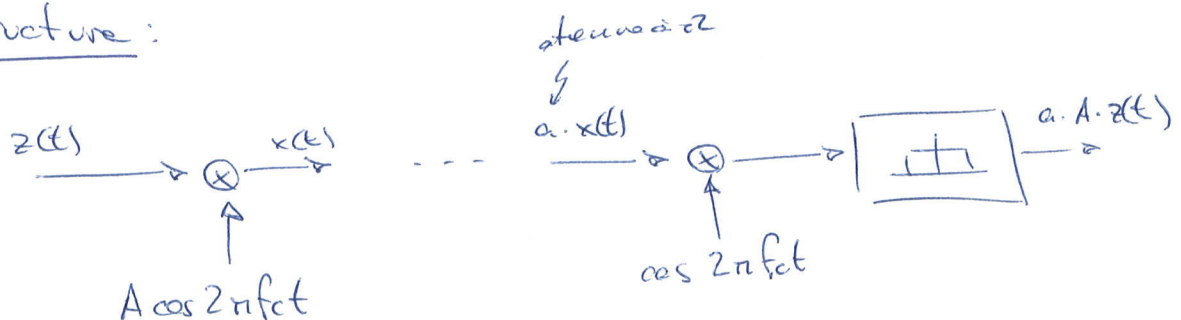
$$X(f) = \frac{A}{2} (X_{eq}(f-f_c) + X_{eq}^*(-f+f_c))$$

1.2.2.- MODULACIÓN DBL

$$x(t) = (x_r(t) \cos 2\pi f_c t - x_c(t) \sin 2\pi f_c t) A \\ \text{(señal modulada)}$$

$$\rightarrow x(t) = A \cdot z(t) \cos 2\pi f_c t$$

Estructura:



Si la señal $z(t)$ es determinista:

$$X(f) = \frac{A}{2} (z(f-f_c) + z^*(-f-f_c))$$

$$= \frac{A}{2} (z(f-f_c) + z(f+f_c))$$

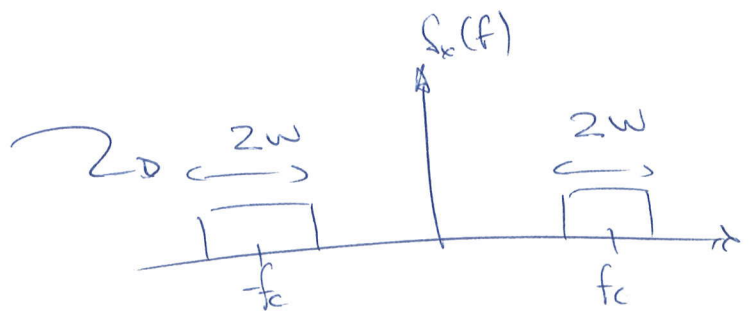
($Z(f)$
tiene simetría
hermítica)

Si es un proceso estacionario:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} (S_z(f-f_c) + S_z(f+f_c))$$

($S_z(f)$
tiene simetría
par)

$B = 2W$ utiliza el doble de ancho de banda para transmitir



Potencias:

$$P_x = A^2 \frac{P_z}{2}$$

$$P_{EP} = \frac{A^2}{2}$$

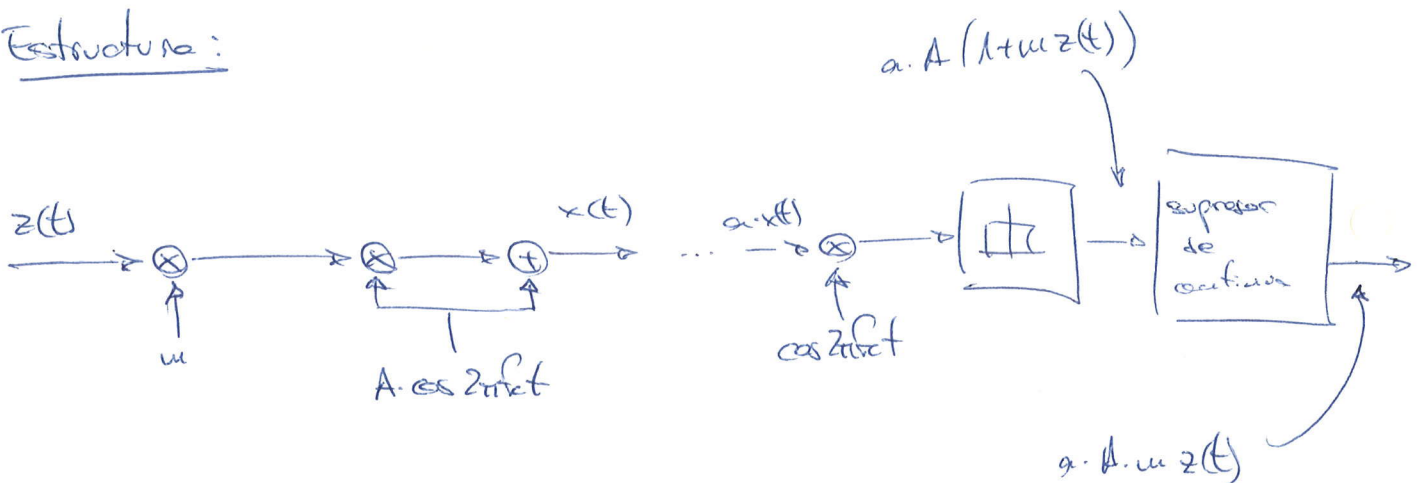
(con $z(t)$ normalizada)

1.2.3.- MODULACIÓN DE AMPLITUD

$$x_F(t) = 1 + u z(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = A(1 + u z(t)) \cos 2\pi f_c t$$

$0 < u \leq 1$ = índice de modulación

Estructura:



$$B = 2W$$

$$x_{eq}(t) = 1 + u z(t)$$

$$E[x_{eq}(t) \cdot x_{eq}(t-\tau)] = E[(1 + u z(t))(1 + u z(t-\tau))]$$

$$= 1 + u^2 E[z(t) z(t-\tau)] \quad (\text{supresores } z(t) \text{ estacionaria})$$

$$= \underline{1 + u^2 R_z(\tau)}$$

$$R_{x_{\text{reg}}}(\tau) = 1 + u^2 R_z(\tau)$$



$$P_{x_{\text{reg}}} = R_{x_{\text{reg}}}(0) = 1 + u^2 P_z$$

$$P_x = \frac{A^2}{2} (1 + u^2 P_z) \quad P_{\text{EP}} = \frac{A^2}{2} (1 + u^2)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} \left(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + u \left(z(f - f_c) + z(f + f_c) \right) \right)$$

$$S_{x_{\text{reg}}}(f) = S(f) + u^2 S_z(f)$$



$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \left(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + u^2 \left(S_z(f - f_c) + S_z(f + f_c) \right) \right)$$

Ejercicio: Calcular los espectros para DSB y AM de

$$z(t) = \cos 2\pi f_0 t \quad f_0 \ll f_c$$

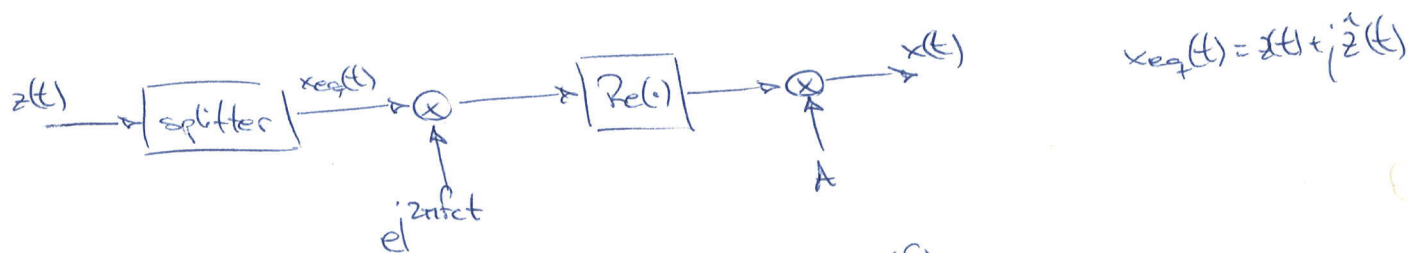
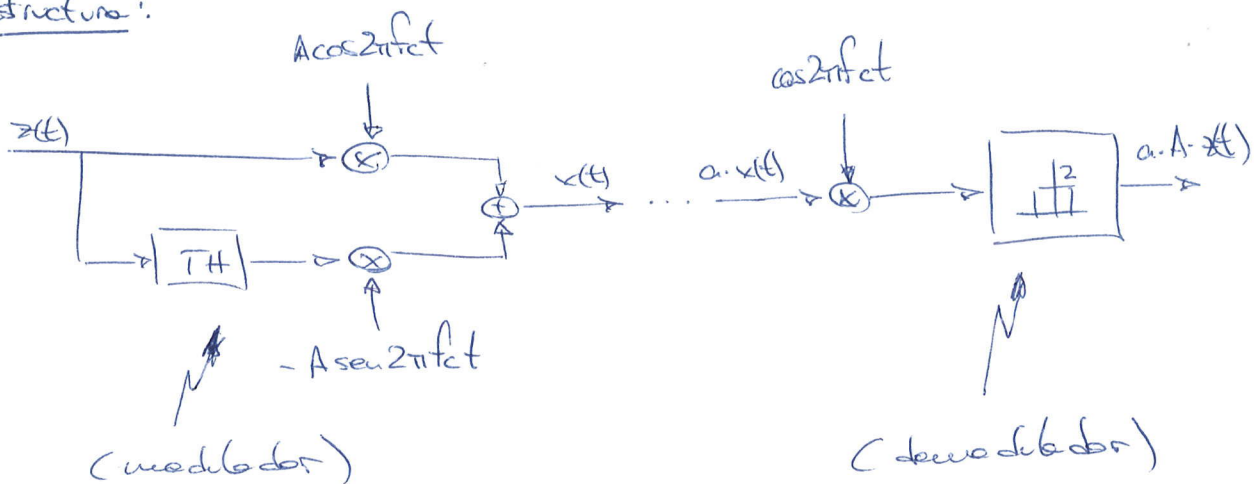


1.2.4. - MODULACION BLU

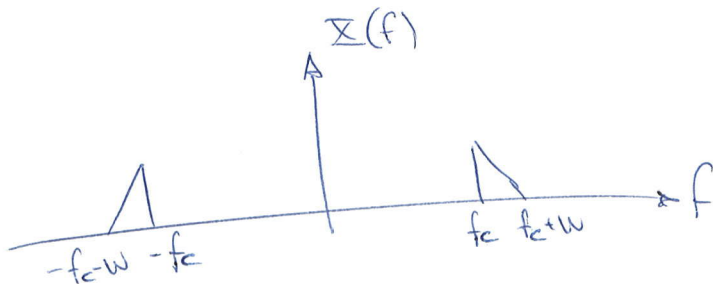
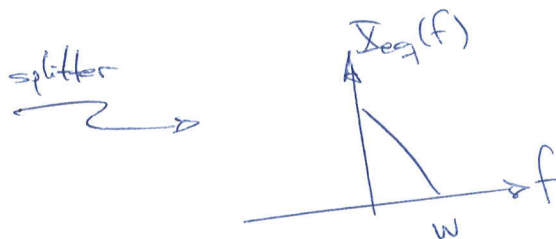
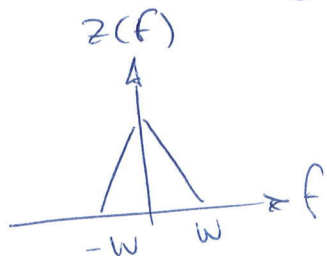
$$x_{\text{req}}(t) = z_c(t) = z(t) + j\hat{z}(t)$$

$$x(t) = A z(t) \cos 2\pi f_c t - A \hat{z}(t) \sin 2\pi f_c t$$

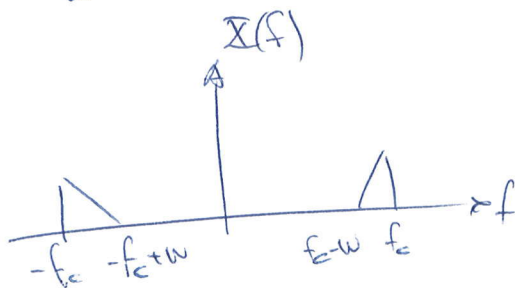
Estructura:



$$x_{\text{req}}(t) = z(t) + j\hat{z}(t)$$



BLU superior



BLU inferior

El audio de banda se mantiene al modelar: $B=W$

BLU inferior: $x(t) = A \cdot z(t) \cdot \cos 2\pi f_c t + A \hat{z}(t) \sin 2\pi f_c t$

BLU superior: $x(t) = A z(t) \cos 2\pi f_c t - A \hat{z}(t) \sin 2\pi f_c t$

Espectros:

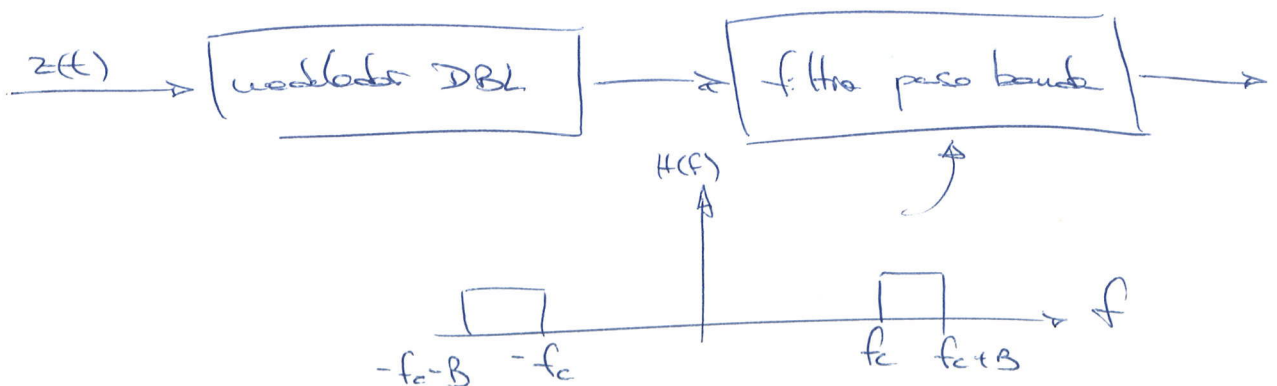
$$X(f) = A \left(z_+(f-f_0) + z_-(f+f_0) \right)$$

$$\Rightarrow z_+^*(-f) = z_-(f)$$

$$S_x(f) = A^2 \left(S_{z_+}(f-f_0) + S_{z_-}(f+f_0) \right)$$

Potencias: $P_x = \frac{A^2}{2} (P_{z_+} + P_{z_-}) = A^2 P_z$

$$P_{EP} = \frac{A^2}{2} \overline{w_x} \left\{ x_P^2(t) + x_C^2(t) \right\} = \frac{A^2}{2} \overline{w_x} \left\{ z^2(t) + \hat{z}^2(t) \right\}$$

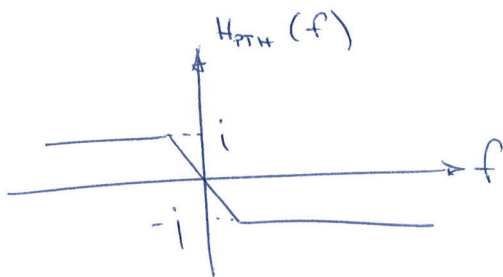


El filtro debe ser muy abrupto en $f_c \Rightarrow$ usar BLU
 para señales que va a impedir usar filtros de variación
 de fase, o para señales con poca información a baja
 frecuencia.

1.2.5. - MODULACIÓN BLR

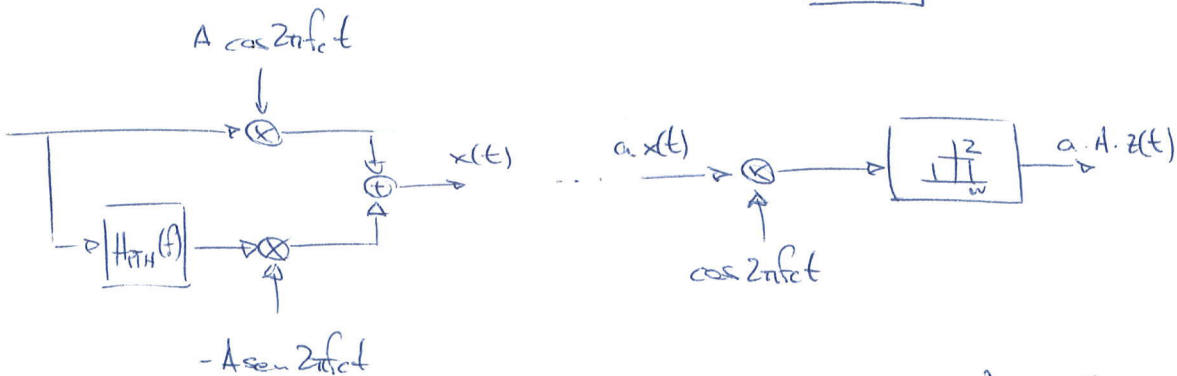
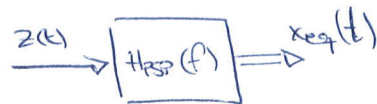
$$x(t) = A z(t) \cos 2\pi f_c t - A \tilde{z}(t) \sin 2\pi f_c t$$

$\tilde{z}(t) \equiv$ pseudotransformada de Hilbert

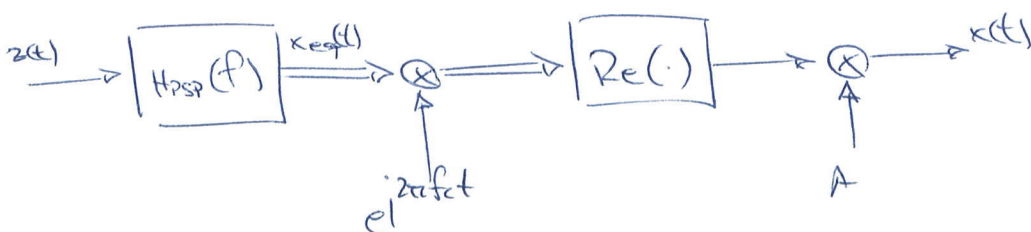


pseudo-splitter:

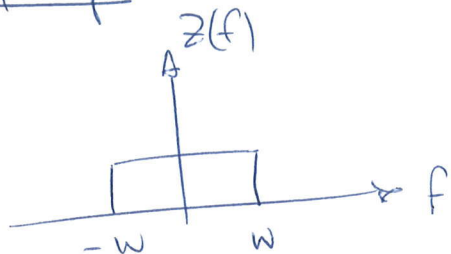
$$H_{HSP}(f) = 1 + j H_{HHT}(f)$$



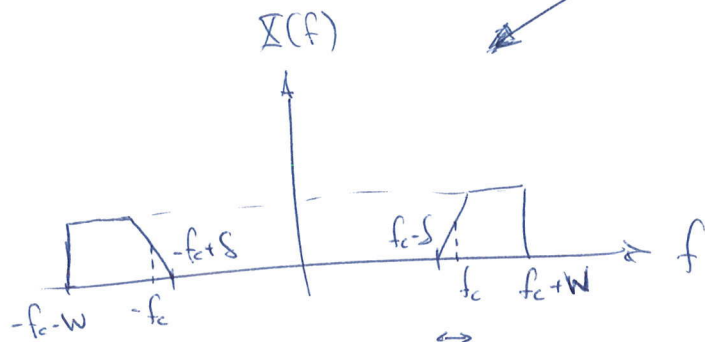
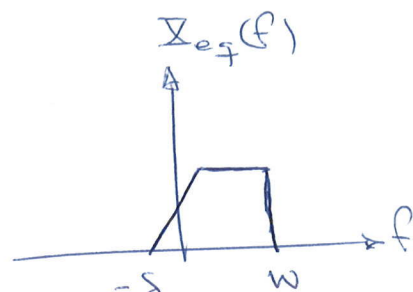
$$\left\{ \begin{array}{l} X_{eq}(f) = H_{HSP}(f) Z(f) \\ S_{X_{eq}}(f) = |H_{HSP}(f)|^2 S_z(f) \end{array} \right.$$



Ejemplo:



pseudo-splitter



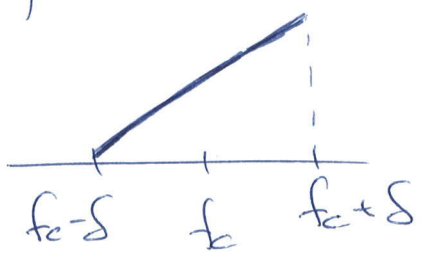
exceso de ancho de banda

$$S_{BLR}(f) = |H(f)|^2 S_{DBL}(f)$$

no hay expresiones cerradas para la potencia, hace falta conocer \$S_z(f)\$ para obtener \$P_x\$

Para frecuencias muy altas es difícil construir el filtro.

Además, para poder el redoblar en fase en el mensaje, tiene que haber simetría:



1.2.6. - MODULACIÓN MQ

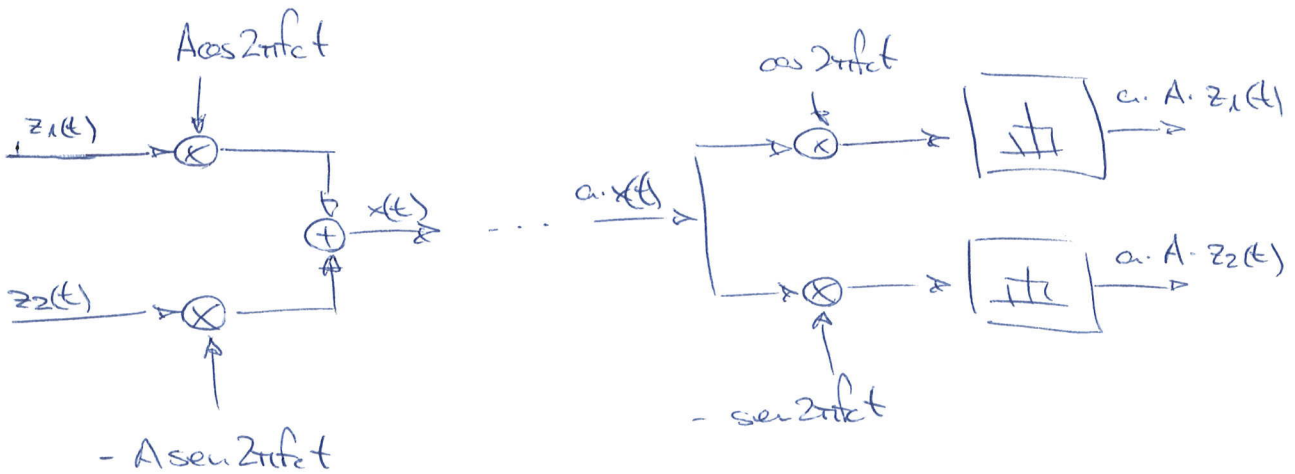
$$x(t) = Az_1(t) \cos 2\pi f_c t - Az_2(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$x_{eq}(t) = z_1(t) + jz_2(t) \quad \text{Suponemos } z_1(t) \text{ y } z_2(t) \text{ : } \underline{\text{incoherentes}}$$

$$z_1 \perp z_2, z_2 \perp z_1 \Rightarrow R_{z_1 z_2}(t) = 0$$

$$S_{x_{eq}}(f) = S_{z_1}(f) + S_{z_2}(f)$$

Se transmiten dos señales en DBL, pero con
fases de portadora distintas



$\boxed{B = 2W}$ \Rightarrow pero es eficiente, ya que se transmiten
2 señales.

$$\boxed{P_x = \frac{A^2}{2} (P_{z_1} + P_{z_2}) = A^2 \cdot P_z \quad \quad P_{ET} = \frac{A^2}{2} \cdot 2 = A^2}$$

$$(P_{z_1} = P_{z_2} = P_z)$$

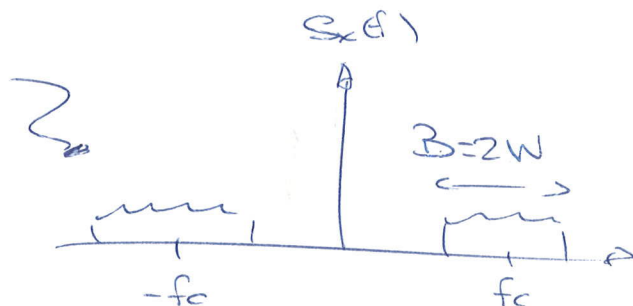
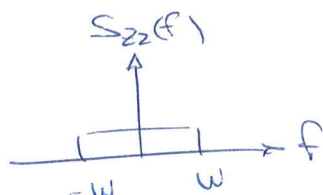
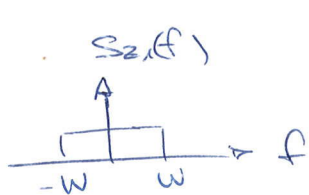
$$\text{m\u00e9x } \{ |x_{\text{req}}(t)|^2 \} \rightarrow z_1(t), z_2(t) \text{ w\u00e1nc:mos } \rightarrow$$

$$6 \text{ vez } \Rightarrow |x_{\text{req}}(t)|^2 = 2$$

Espectros: $\text{si } R_{z_1 z_2}(\tau) = 0 = S_{z_1 z_2}(f)$

$$X(f) = \frac{A}{2} (z_1(f-f_c) + z_1(f+f_c)) + j \frac{A}{2} (z_2(f-f_c) + z_2(f+f_c))$$

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} (S_{z_1}(f-f_c) + S_{z_1}(f+f_c) + S_{z_2}(f-f_c) + S_{z_2}(f+f_c))$$



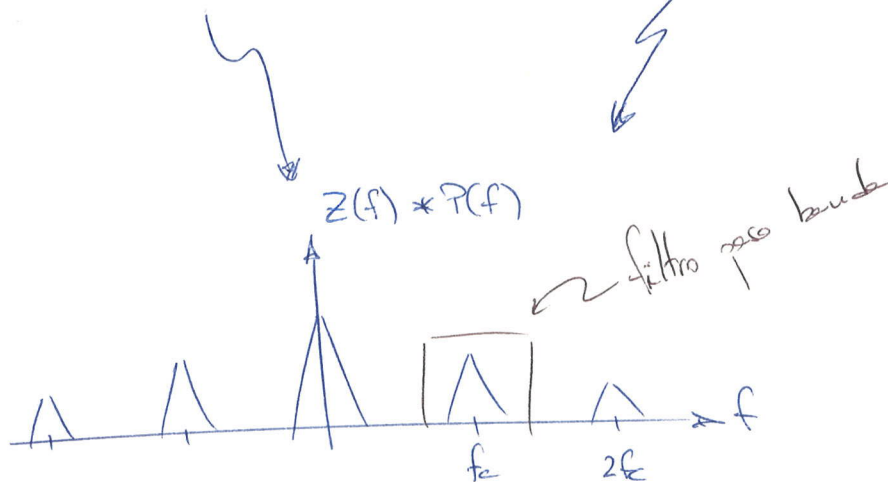
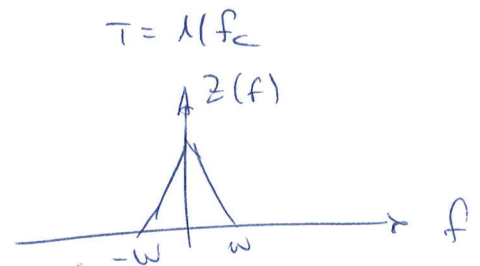
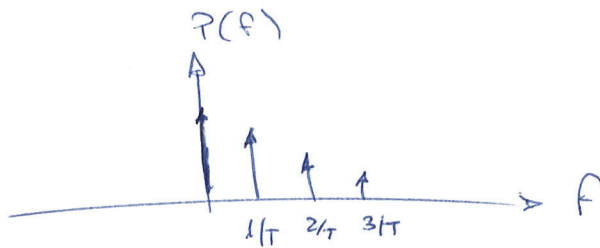
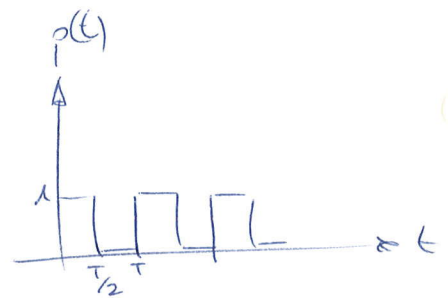
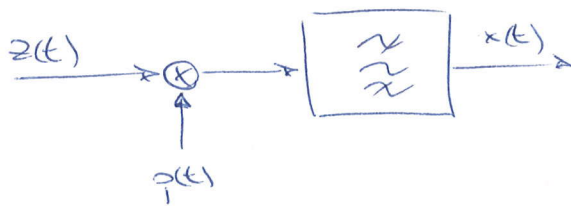
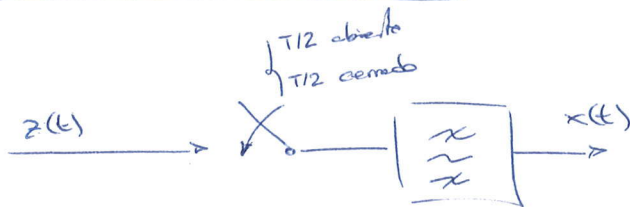
Ventaja: optimiza el ancho de banda

Desventaja: complejidad del receptor

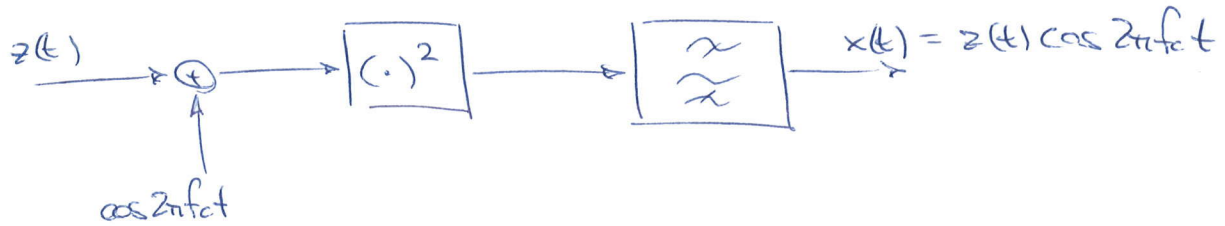
1.3.- MODULADORES Y DEMODULADORES

a) Moduladores:

- modulador coherente:



- modulador de ley cuadrática: (DBL)



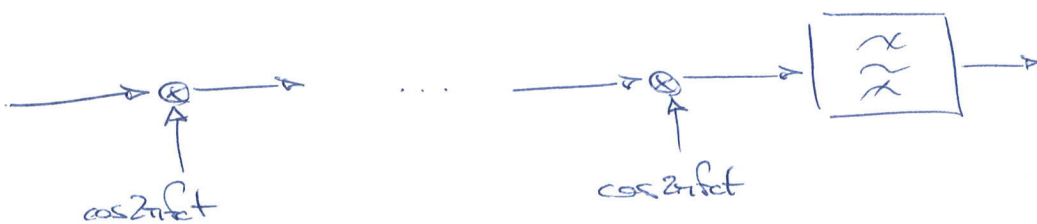
$$(z(t) + \cos 2\pi f_c t)^2 = z^2(t) + \cos^2 2\pi f_c t + \underbrace{2z(t) \cos 2\pi f_c t}_{\text{BW} = 2W \text{ centrado en } f = f_c}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{BW} = 2W \text{ centrado en } f = 0}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{S(f) + S(f - 2f_c)}$

Elevar al cuadrado puede conseguirse en ciertos diodos que aproximan bastante bien esa función.

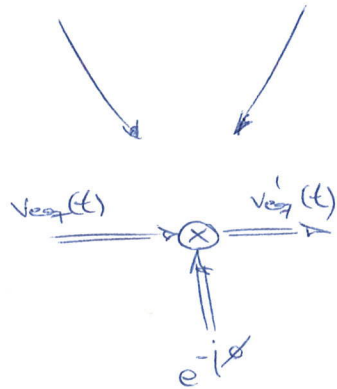
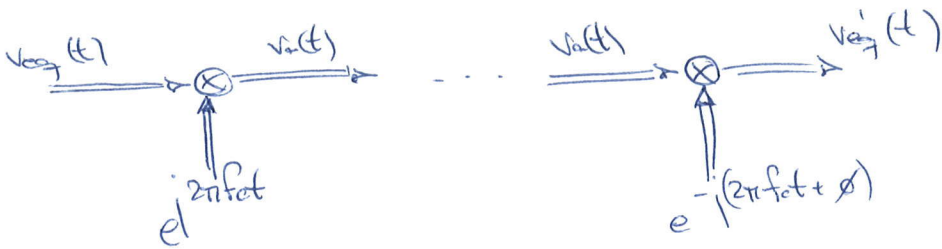
d) Demoduladores:

- demoduladores coherentes:



deben estar sincronizados en fase y frecuencia

Si transmisor y receptor no están sincronizados: derfase



$$\Rightarrow \boxed{v_{eq}'(t) = v_{eq}(t) e^{-j\phi}}$$

$$\begin{aligned} x_F'(t) &= x_F(t) \cos \phi + x_C(t) \sin \phi \\ x_C'(t) &= -x_F(t) \sin \phi + x_C(t) \cos \phi \end{aligned}$$

\Rightarrow se mezclan los componentes en fase y cuadratura

El error de fase mezcla las señales demoduladas en fase y cuadratura \Rightarrow INTERFERENCIA COCANAL

• para DBL o AM:

DBL $\rightarrow x_F'(t) = z(t) \cos \phi \Rightarrow$ la potencia disminuye en ϕ

Si $\phi = 90^\circ \Rightarrow x_F'(t) = 0$

AM $\rightarrow x_F'(t) = (1 + m z(t)) \cos \phi \Rightarrow$ igual

\Rightarrow potencia disminuye en factor $\cos^2 \phi$

• para BLU o BLR:

$$BLU \rightarrow x_c'(t) = z(t) \cos \phi + \hat{z}(t) \sin \phi$$

Lo la potencia transmitida y se añade
distorsión en $\hat{z}(t)$

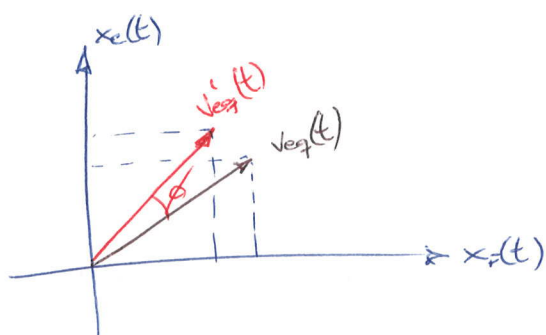
Relación señal a interferente: $S/I = \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi}$
 \downarrow
 distorsión

• para MQ:

$$\begin{aligned} x_c'(t) &= z_1(t) \cos \phi + z_2(t) \sin \phi \\ x_c'(t) &= z_2(t) \cos \phi - z_1(t) \sin \phi \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{interferencia co canal} \\ \text{interferencia co canal} \end{array} \right.$$

$$S/I = \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi}$$

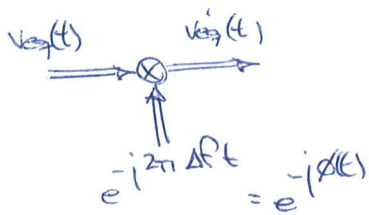
Representación vectorial:



si $\phi = \frac{\pi}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x_c'(t) = x_c(t) \\ x_c(t) = x_c'(t) \end{array} \right.$

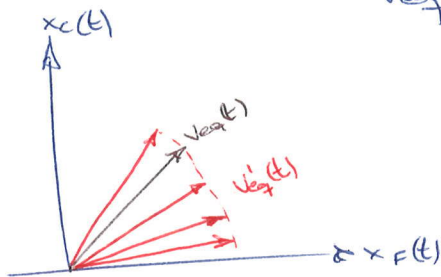
\downarrow
intercambio de canales

Si el error está en la frecuencia de la portadora:



$\phi(t) = 2\pi Aft$ varía con el tiempo

$$v'_{eq}(t) = v_{eq}(t) e^{-j2\pi Aft}$$



se produce una modulación residual
a frecuencia Af

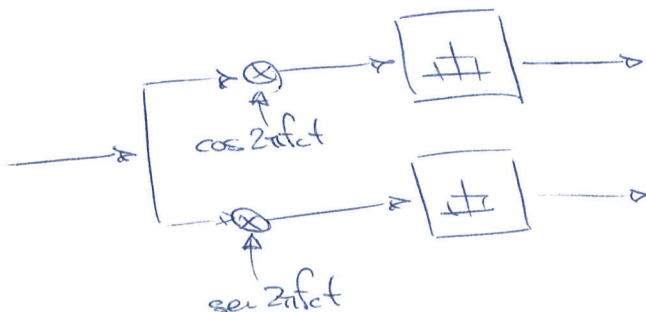
$$Af \ll B$$

$$Af \ll f_c$$

los pm es un error posible en osciladores baratos

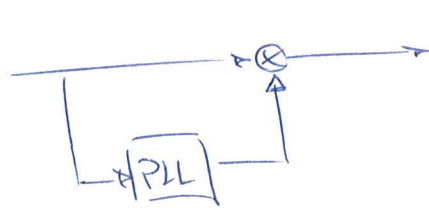
- DBL o AFI: variación de la potencia dependiente del tiempo (atenuación variable)
- BLU o BLR: atenuación y fase variables con el tiempo
- KQ: atenuación e interferencia variables con el tiempo

Debemos implementar:



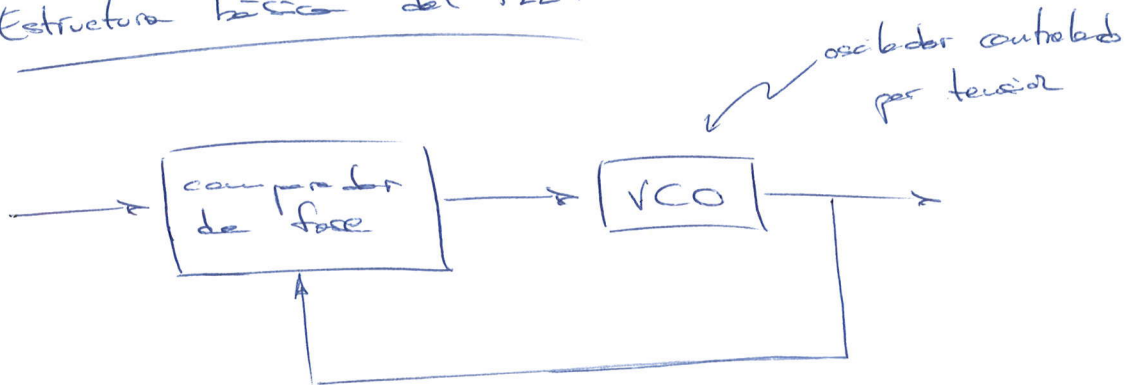
La sincronización o coherencia se consigue en circuitos PLL

(Phase Locked Loop)



El PLL extrae la portadora de la propia señal modulada

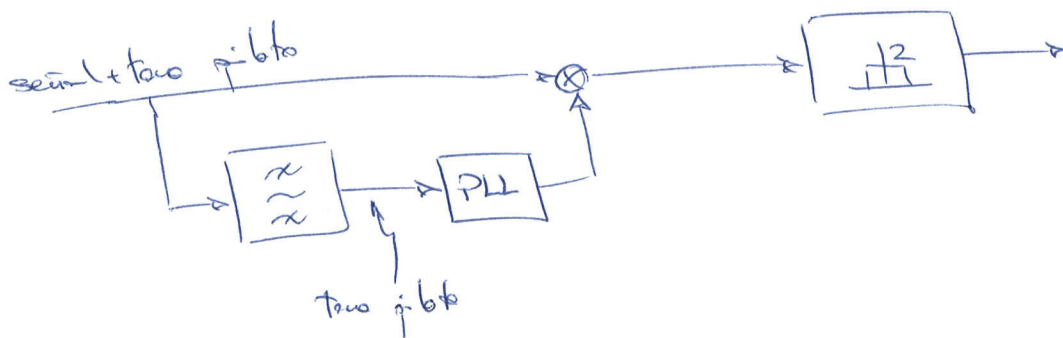
Estructura básica del PLL:



En AM, colocamos la señal a un filtro paso banda, y de ahí al PLL.

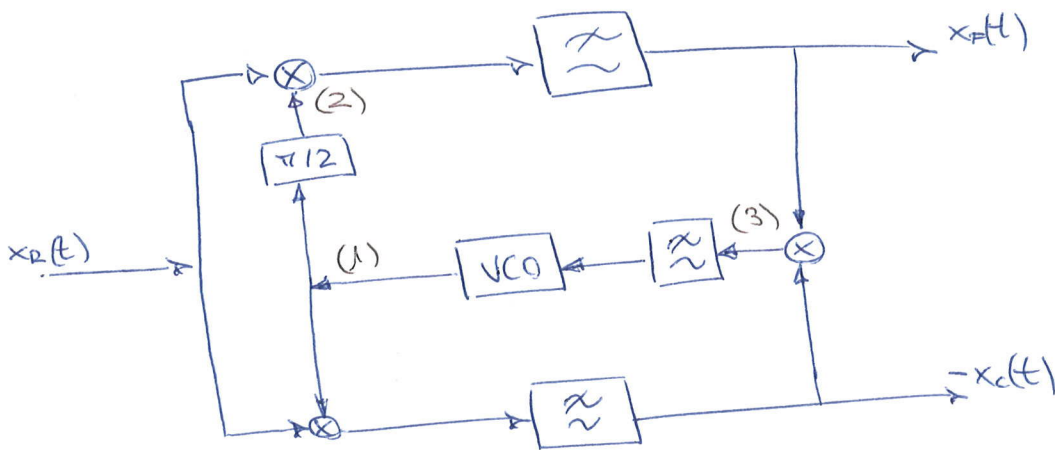
Si la modulación es en AM, se puede añadir un tono piloto: la propia portadora, con poca amplitud

(ej: TV)



Otra opción: para evitar tener que añadir un tono piloto

2a Leza de Costas



Ejemplo:

$$(1) = \sin(2\pi f_c t + \delta) \rightarrow (2) = \cos(2\pi f_c t + \delta)$$

las salidas serán:

$$x_f(t) = x_p(t) \cos \delta + x_c(t) \sin \delta$$

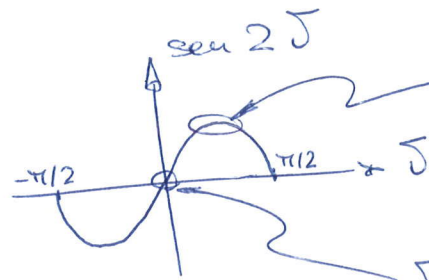
$$x_c(t) = x_c(t) \cos \delta - x_p(t) \sin \delta$$

entonces, si es DBL, en (3):

$$\left. \begin{aligned} x_f(t) &= x_p(t) \cos \delta \\ x_c(t) &= -x_p(t) \sin \delta \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow (3) = x_p^2(t) \cos \delta \sin \delta = 2 x_p^2(t) \sin 2\delta$$

después del filtro paso bajo: valor medio de (3)
o estimación de la potencia



al variar ω varía la frecuencia del VCO en función de J

$J=0 \Rightarrow$ entrada al VCO = 0
 \Rightarrow frecuencia nominal

Ejercicio: estudiar por BLU (ver si se puede equilibrar en frecuencia)

2a Solución: no funciona por BLU, ya que se cambian las potencias y prueba que la entrada al VCO sea mb.

BLU prueba un proceso paso bajo estacionario, no subestacionario, si la entrada es estacionaria.

para HQ: no funciona si $S_{z_1}(f) = S_{z_2}(f)$

2a salida estacionaria, no subestacionaria

- demoduladores incoherentes: detectores de envolvente

No hace falta sincronizarse en fase ni en frecuencia.

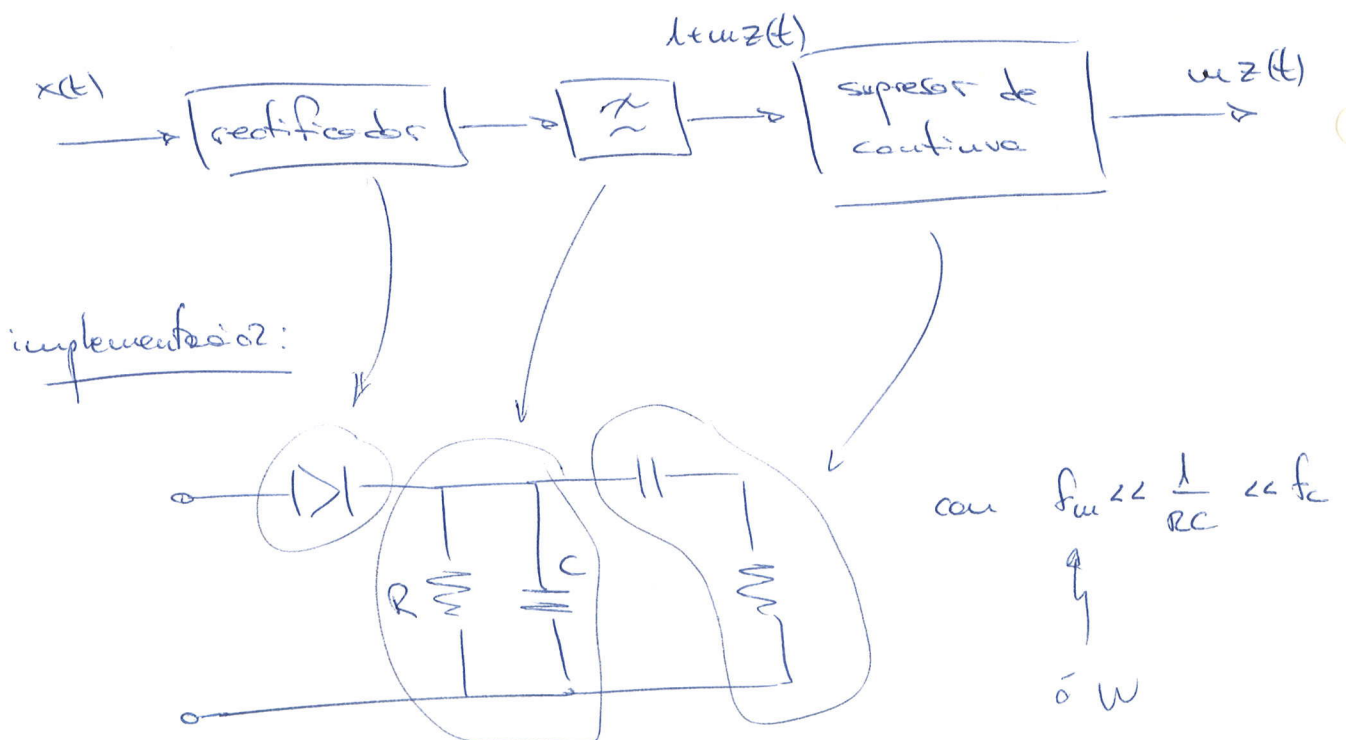
En principio, sólo es válido para AM: $x_F(t) = 1 + m_z(t)$

$$\leadsto x_{\text{eq}}(t) = 1 + m_z(t) \equiv \text{envolvente compleja} \equiv a(t)$$

↑
siempre ≥ 0 y real

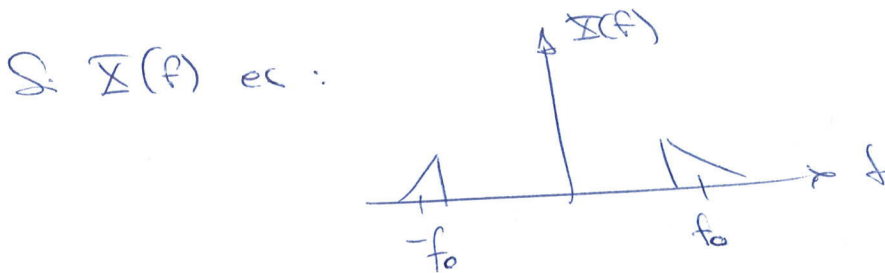
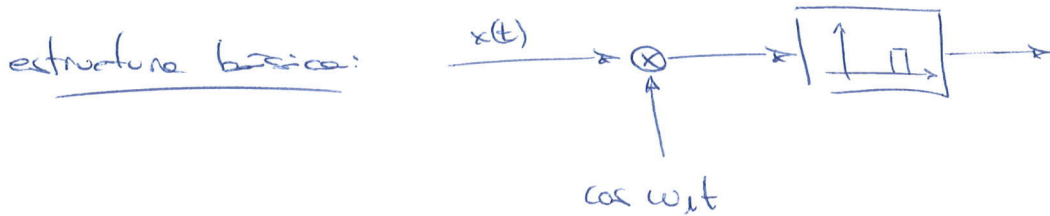
$$x_{\text{eq}}(t) \leadsto x(t) = \text{Re} \left\{ \underbrace{x_{\text{eq}}(t)}_{\text{envolvente}} e^{j\omega_c t} \right\}$$

En AM: $a(t) \equiv \text{real}$ y positiva $\leadsto x(t) = a(t) \cos 2\pi f_c t$

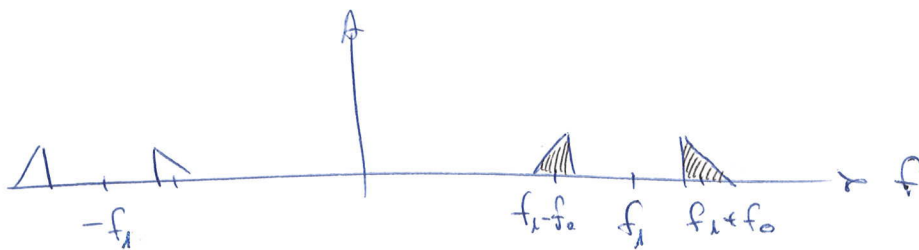


1.4. - MEZCLADOR. RECEPTOR SUPER HETERODINO

a) Mezclador: su objetivo es coger una señal paso banda y trasladar su espectro a otra frecuencia.

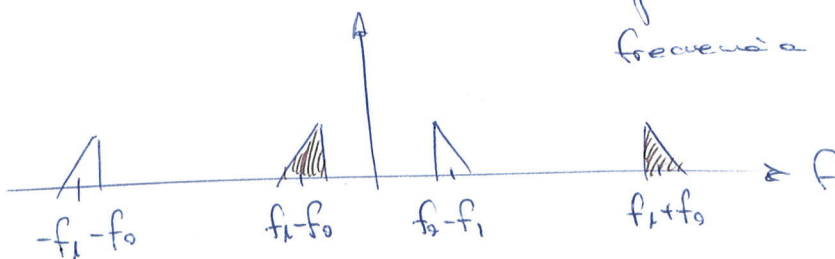


$f_c > f_0$: ($f_c > f_{max}$), caso típico

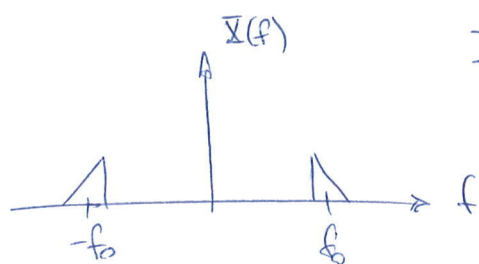


$f_c < f_0$: ($f_0 < f_{max}$)

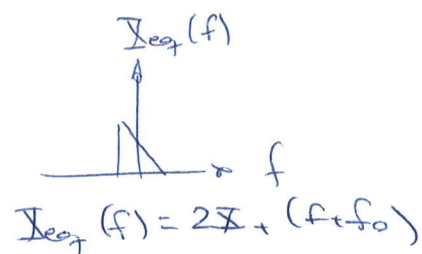
permite "acercar" los bands del espectro a la zona de baja frecuencia



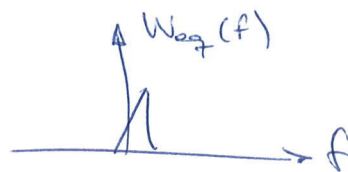
Repasso tema 2:



$$X(f) = X_+(f) + X_-(f)$$



$$X_{eq}(f) = 2X_+(f+f_0)$$



$$\begin{aligned} W_{eq}(f) &= 2X_-(f-f_0) = \\ &= 2X_+^*(-f+f_0) = X_{eq}^*(-f) \end{aligned}$$

$$Z_0 \quad W_{eq}(t) = x_{eq}^*(t)$$

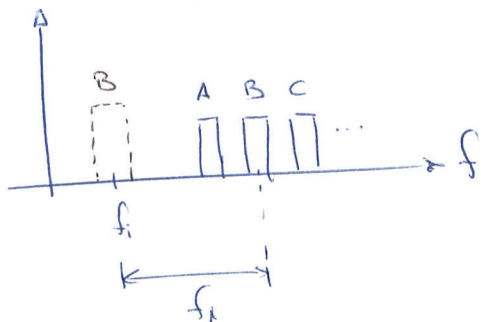
$$\text{Entonces, si } x_{eq}(t) = x_r(t) + j x_c(t)$$

$$W_{eq}(t) = x_r(t) - j x_c(t)$$

_____ o _____

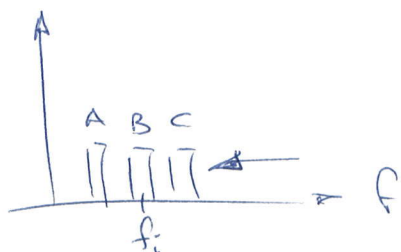
b) Receptor superheterodino:

Dada una serie de canales:



- para demodular, podemos bajarlos todos a una frecuencia intermedia f_i

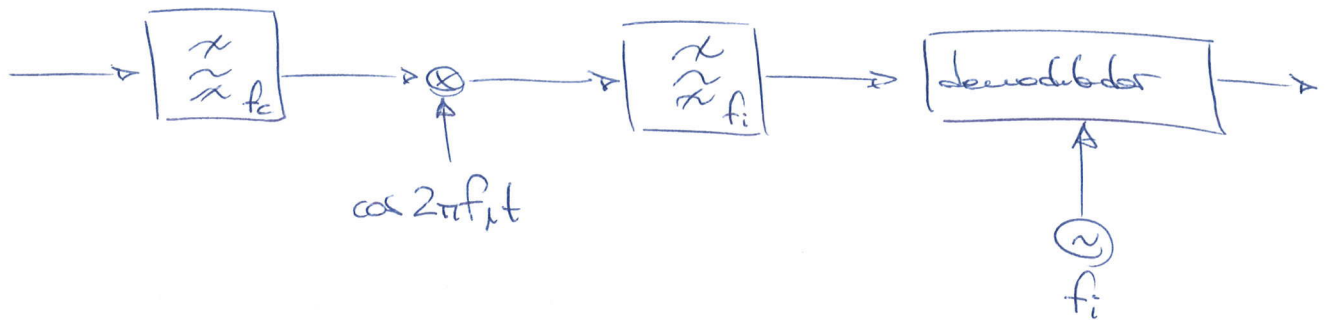
- así, sólo basta con un único filtro paso banda en f_i , con un solo demodulador



Demodulador:

- multiplicar por f_i variable
- demodular a f_i fija

Esto es, se realiza la demodulación en 2 etapas:



2.- MODULACIONES ANGULARES

Son modulaciones no lineales y de envolvente constante.

La señal modulada tiene la siguiente expresión:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \text{Re} \left\{ x_{\text{eq}}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

f_c \equiv frecuencia de portadora

$\phi(t)$ \equiv representa la información de usuario (paso bajo)

$$x_{\text{eq}}(t) = A \cdot e^{j\phi(t)}$$

la fase varía con el mensaje

la amplitud permanece constante \Rightarrow

\Rightarrow potencia de la señal modulada constante

$$P = \frac{A^2}{2}$$

e independiente de la información

Estos moduladores responden muy bien ante distorsiones no lineales.

• fase instantánea: $\boxed{J(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)}$

• frecuencia instantánea: $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{dJ(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}}$

2.1.- MODULACIÓN DE FASE (PM)

$z(t)$ canalizada en amplitud: $|z(t)| \leq 1$

$$\boxed{\phi(t) = \phi_{\Delta} z(t)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \cos J(t)$$

$\phi_{\Delta} \equiv$ índice de modulación: $0 < \phi_{\Delta} \leq \pi$

$$\Rightarrow |\phi(t)| \leq \pi$$

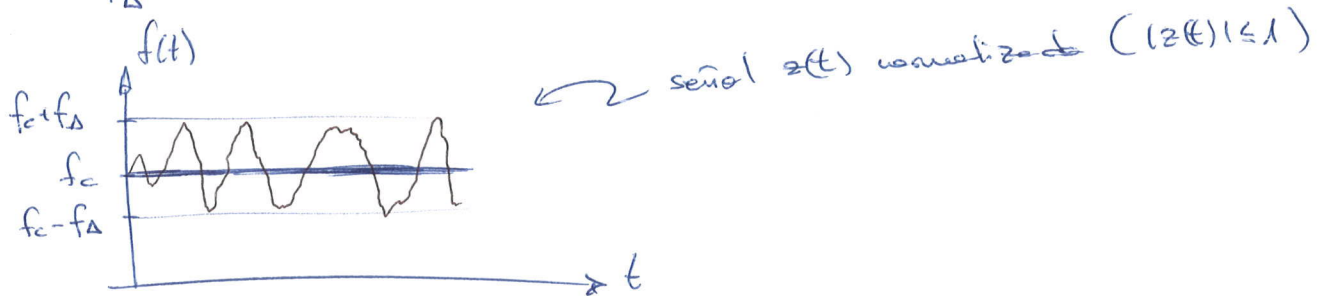
$\phi(t)$ no debe superar el rango en el que se puede distinguir la señal de información: $(-\pi, \pi)$

Frecuencia instantánea: $\boxed{f(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_{\Delta} \frac{dz(t)}{dt}}$

2.2. - MODULACIÓN DE FRECUENCIA (FM)

Frecuencia instantánea: $f(t) = f_c + f_\Delta z(t)$ (*)

$f_\Delta \equiv$ desviación de frecuencia



$$f(t) = f_c + f_\Delta z(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}}_{f_\Delta z(t)}$$

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau + \phi(0) \quad (*) \quad \phi(0) = 0$$

integrador $\rightarrow H_I(f) = \frac{1}{j2\pi f}$

Relación PM-FM:



(*) La variación de fase de este modulador PM no tiene que cumplir $|\phi(t)| \leq \pi$, ya que la información se ve representada en la fase, sino en la velocidad de variación de la fase.

Por tanto, hay más libertad en f_Δ que en ϕ_Δ , así que es preferible usar FM frente a PM.

	$\phi(t)$	$f(t)$
PM	$\phi_\Delta z(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_\Delta \frac{dz(t)}{dt}$
FM	$2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau$	$f_c + f_\Delta z(t)$

En la frecuencia:

$$\frac{dz(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\omega z(f)$$

$$\int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau \xrightarrow{TF} \frac{z(f)}{\omega}$$

En FM, se puede hablar de índice de modulación o derivación de fase:

$$\phi_{FM}(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau$$

Si $z(t) = \cos 2\pi f_m t$

$$\Rightarrow \phi_{FM}(t) = 2\pi f_\Delta \frac{1}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t = \frac{f_\Delta}{f_m} \sin 2\pi f_m t$$

$$\boxed{D_{FM} = \frac{f_\Delta}{f_m}} \quad \underline{\text{derivación de fase}}$$

En general, la desviación de fase en FM es

$$D = \frac{f_{\Delta}}{B} \quad (*)$$

$B \equiv$ frecuencia máxima de $z(t)$

2.3. - ESPECTROS DE MODULACIONES ANGULARES

Los efectos no lineales sobre los espectros son importantes.

La relación entre los espectros de la señal original y la modulada es sencilla, ya que no es un simple desplazamiento en frecuencia.

Además, al ser sistemas no lineales, no se puede generalizar el estudio para una sinusoidal.

De todas formas, no nos vamos a preocupar por ello.

2.3.1. - ESPECTRO DE LA MODULACIÓN POR UN TONO

$$\left. \begin{array}{l} \text{FM: } z(t) = \cos 2\pi f_m t \\ \text{PM: } z(t) = \text{sen } 2\pi f_m t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(t) = f_c z(t) + f_c \\ \phi(t) = \phi_\Delta z(t) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{FM: } \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau = \frac{f_\Delta}{f_m} \text{sen } 2\pi f_m t \\ \text{PM: } \phi(t) = \phi_\Delta \text{sen } 2\pi f_m t \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \phi(t) = \beta \text{sen } 2\pi f_m t \\ \beta = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_\Delta}{f_m} \text{ en FM} \\ \phi_\Delta \text{ en PM} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$\beta \equiv$ índice de modulación
 \hookrightarrow puede ser mayor que 1

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \beta \text{sen } 2\pi f_m t)$$

$$x_{\text{eq}}(t) = A \cdot e^{j\beta \text{sen } \omega_m t}$$

\hookrightarrow envolvente compleja
 periódica con $T = \frac{2\pi}{\omega_m}$

\Rightarrow DFT

$$\hookrightarrow x_{\text{eq}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_m n t}$$

$$\left[c_n = J_n(\beta) \right]$$

funciones de Bessel de
 primera especie de
 orden n

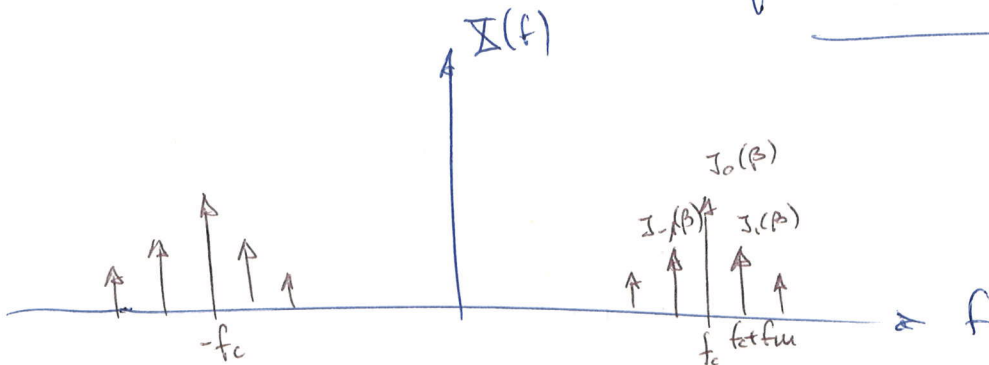
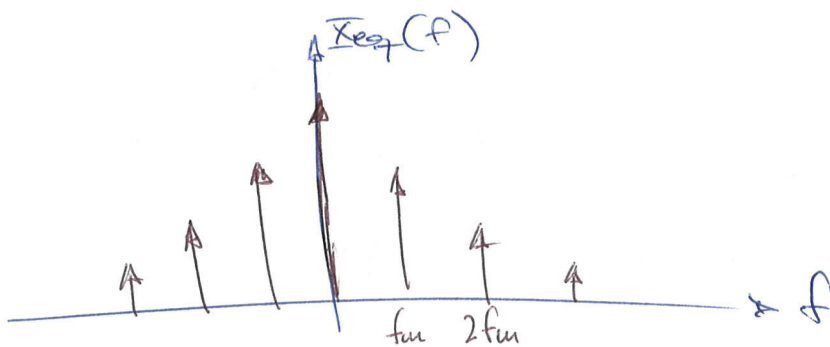
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-j n \omega_c t} dt = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} e^{j \beta \sin \omega_c t} e^{-j n \omega_c t} dt$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \omega_c t \\ du = \omega_c dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin u - nu)} du$$

$$x(t) = A \sum_{u=-\infty}^{\infty} J_u(\beta) \cos((\omega_c + u \omega_m)t)$$

↑ u infinite de tons, e frequências

$f_c \pm u \cdot f_m$, com amplitudes $J_u(\beta)$



$$J_u(\beta) = J_{-u}(\beta)$$

$$\text{Si } \beta \ll 1 : \left. \begin{array}{l} J_0(\beta) \approx 1 \\ J_1(\beta) \approx \beta/2 \\ \vdots \\ J_n(\beta) \approx 0 \text{ resto} \end{array} \right\}$$

esto corresponde a una modulación de banda estrecha,
y se aproxima a una modulación lineal

En principio, se pueden desprestigiar los componentes tales que $u > \beta + 1$

Por ejemplo, si $\beta = 1$, consideramos apreciables los rayos espectrales $u = 0, 1, 2$

Esto es como considerar que hasta $u = 1$ está casi toda la energía de la señal modulada, y su ancho de banda será $(\beta + 1) f_m$

\Rightarrow el ancho de banda / β : u rayos espectrales
depende de: f_m : distancia entre los rayos

Estimación para un tono: Ancho de banda práctico

$$\boxed{B_{\text{tono}} = 2(\beta + 1) f_m} = 2(f_{\Delta} + f_m) \xrightarrow{\text{FM}}$$

$$\xrightarrow{\text{PM}} = 2(\phi_{\Delta} + 1) f_m$$

Para una señal con ancho de banda W :

- no se puede aplicar superposición (no es lineal)
- aproximación: REGLA DE CARSON

$$FM = \Delta \left| B_{FM} = 2(f_{\Delta} + W) = 2(D+1)W \right|$$

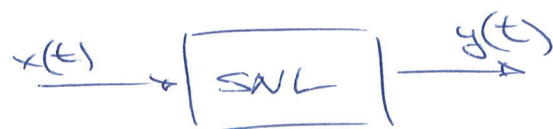
$$PM = \Delta \left| B_{PM} = 2(\phi_{\Delta} + 1)W \right|$$

Es una expresión heurística, y puede que haya que hacer correcciones.

Restamente depende no sólo del espectro de $z(t)$, sino también de su fdp.

2.3.2. - PROPIEDAD DE LAS MODULACIONES ANGULARES

Vamos a ver el efecto del paso de la señal modulada por un sistema no lineal y sin memoria



$$\text{Si } x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$$\text{en general, será } y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \dots + a_n x^n(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = a_0 + a_1 A \cos(\omega_c t + \phi(t)) +$$

$$+ a_2 (A \cos(\omega_c t + \phi(t)))^2 +$$

$$+ a_3 (A \cos(\omega_c t + \phi(t)))^3 + \dots$$

$$= a_0 + \underbrace{\left(a_1 A + \frac{3a_3 A^3}{4} \right)}_{\Delta} \cos(\omega_c t + \phi(t)) +$$

$$+ \frac{a_2 A^2}{2} \cos(2\omega_c t + 2\phi(t)) +$$

$$+ \frac{a_3 A^3}{4} \cos(3\omega_c t + 3\phi(t)) + \dots$$

armónicas: se podrán eliminar

distorsión en amplitud: no afecta a la información de la modulación angular

Los sistemas no lineales afectan (provocan distorsión) a modulación lineal, y no en angular.

Armónicas: $\frac{a_2}{2} A^2 \cos(2\omega_c t + 2\phi(t)) + \frac{a_3}{4} A^3 \cos(3\omega_c t + 3\phi(t))$

la distorsión de
fase aumenta con f_c

Système linéaire : $y(t) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(t)$

(série de puissances)

$$x(t) = A \cos \tilde{\omega}(t) = \frac{A}{2} (e^{i\tilde{\omega}(t)} + e^{-i\tilde{\omega}(t)})$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{A^n}{2^n} (e^{i\tilde{\omega}(t)} + e^{-i\tilde{\omega}(t)})^n$$

$$\begin{aligned} (e^{i\tilde{\omega}(t)} + e^{-i\tilde{\omega}(t)})^i &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} e^{i\tilde{\omega}(t)(i-k)} e^{-i\tilde{\omega}(t)k} \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} e^{i\tilde{\omega}(t) \cdot (i-2k)} \end{aligned}$$

en forme trigonométrique :

$$\left. \begin{array}{l} i \text{ pair} \rightarrow \sum_{k=0}^i b_k \cos 2k\tilde{\omega}(t) \\ i \text{ impair} \rightarrow \sum_{k=0}^i b_k \cos (2k+1)\tilde{\omega}(t) \end{array} \right\}$$

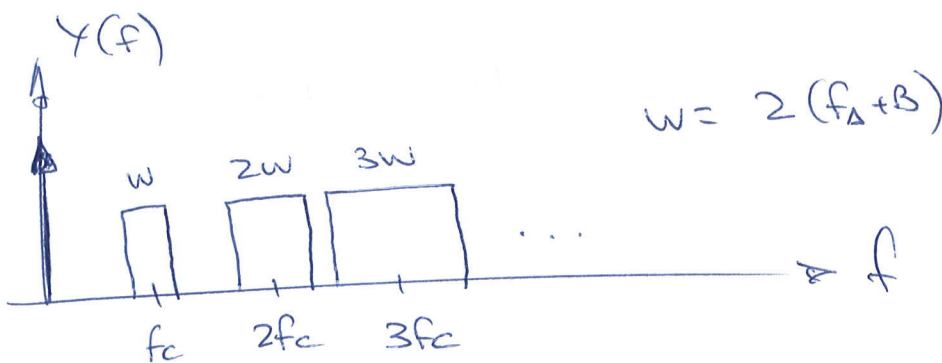
$$\boxed{y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos i\tilde{\omega}(t)} \quad \tilde{\omega}(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos(2\pi i f_c t + i \cdot \phi(t))$$

La información que llevan $x(t)$ e $y(t)$ es la misma:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \longrightarrow f_c, f_\Delta \\ \cos(2\pi i f_c t + i \cdot \phi(t)) \longrightarrow i \cdot f_c, i \cdot f_\Delta \end{array} \right\}$$

Como $f_c \gg f_\Delta$:



Se aparecen réplicas disjointas que son mediciones FTM de la señal original.

Amplificadores en cascada $C(A, \gamma) \rightarrow$ la linealidad que se afecta a mediciones angulares

Con esto también pueden hacerse multiplicaciones de frecuencia instantáneas:



Esto permite convertir modulaciones de banda estrecha en modulaciones de banda ancha.

2.4. - GENERACIÓN Y DEMODULACIÓN DE FM

2.4.1. - MODULADORES FM

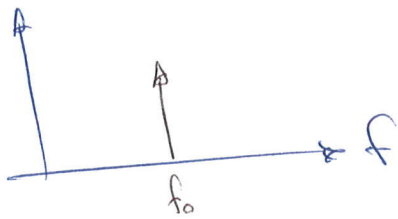
Hoy 2 métodos de generación / directos
/ indirectos

1. - Método directo:

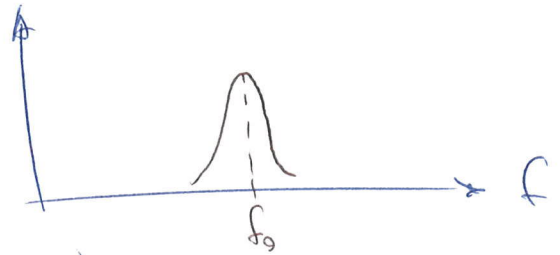
- Circuitos VCO: son los más simples

Posibilidades: a) diodo varactor: $C = f(V)$ en circuitos LC
b) tubos de reactancia: $L = f(V)$

VCO ideal: para una frecuencia dada, la frecuencia es única



VCO real: aparece ruido de fase



$$x(t) = A \cdot \cos \left(\omega_c t + 2\pi f_c \int_0^t z(\tau) d\tau + u(t) \right)$$

ruido de fase

El VCO es un modulador FM analógico, y que aparece el ruido de fase en la propia modulación.

- Métodos digitales: conseguir reducir el ruido de fase

→ DDS = Data Driven Synthesizer

Es un sistema equivalente al VCO, pero con tecnología digital.

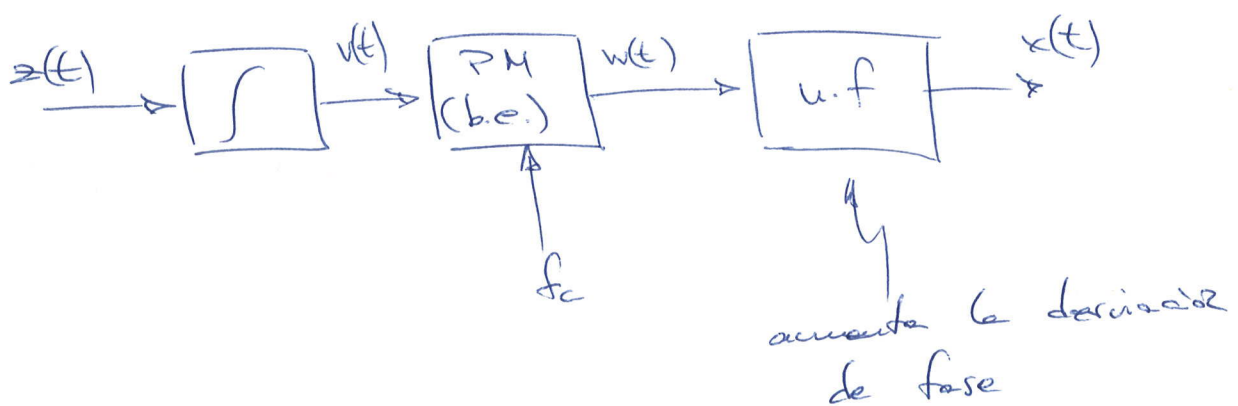


contiene los buses de diferentes frecuencias y se reproduce cada una en función del mensaje

2.- Método indirecto: usa un modulador de fase de banda estrecha (variaciones de fase muy pequeñas)

- Modulador PM de banda estrecha: tiene un ϕ_{Δ} para derivación de fase

Posteriormente, se coloca un multiplicador de frecuencia:



La realización de este sistema es muy simple

Modulador PM de banda estrecha:

$$w(t) = A \cos(\omega_c t + k v(t))$$

$$w(t) \equiv \text{banda estrecha} \Rightarrow k \cdot v(t) \ll 1$$

$$w(t) = A \underbrace{\cos(\omega_c t)}_{\approx 1} \underbrace{\cos(k v(t))}_{\approx k v(t)} - A \underbrace{\sin(\omega_c t)}_{\approx 1} \underbrace{\sin(k v(t))}_{\approx k v(t)} \approx$$

$$\approx \underbrace{A \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} - \underbrace{A k v(t) \sin(\omega_c t)}_{\text{modulação linear} \Leftarrow \text{DBL}}$$

$$x_{\text{eq}}(t) = A e^{j\phi(t)} = A (\cos \phi(t) + j \sin \phi(t))$$

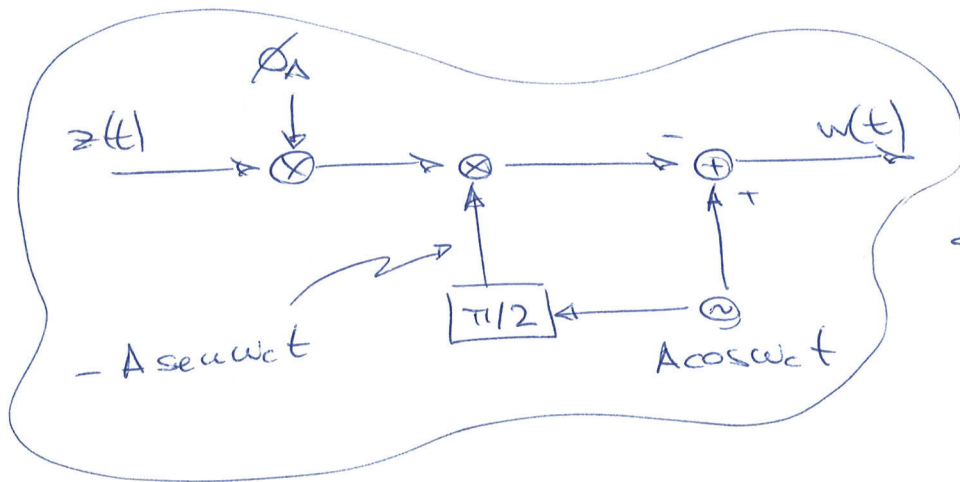
$$\phi(t) \ll \pi \Rightarrow x_{\text{eq}}(t) \approx A (1 + j \phi(t))$$

$$\phi^w(t) = \omega_c t + k v(t)$$

$$f^w(t) = f_c + \frac{k}{2\pi} z(t)$$

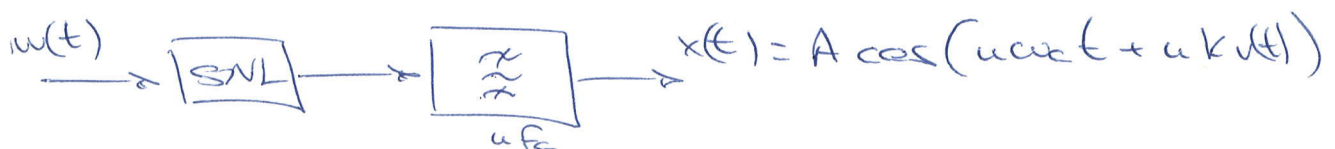
$$f_{\Delta} = \frac{k}{2\pi} \text{ pequena}$$

para SRR ↑ interesse grande



modulador PM de banda estreita

Multiplicador de frequência:

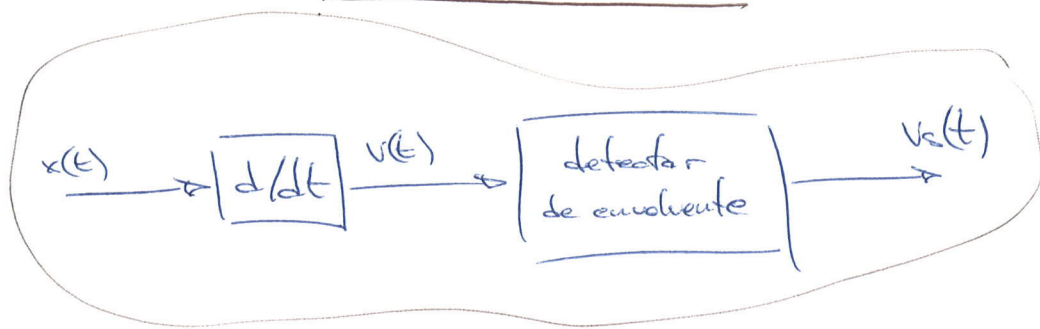


$$\phi^x(t) = \nu \omega_c t + \nu k v(t)$$

$$f^x(t) = \nu f_c + \frac{\nu k}{2\pi} z(t)$$

$$f_{\Delta} = \frac{\nu k}{2\pi}$$

2.4.2. - DEMODULADORES FM



$$x(t) = A \cos \left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau \right)$$

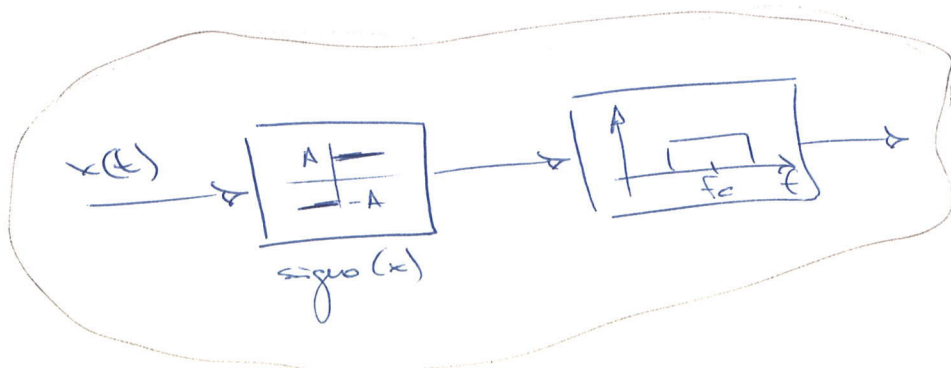
$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -A \left(f_c + f_\Delta z(t) \right) \text{sen} \left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t z(\tau) d\tau \right)$$

f_c $\underbrace{\hspace{10em}}$ $f_\Delta z(t)$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ $\text{sen}(\dots)$
 envolvente con la información de la señal $z(t)$ señal modulada en FM
 (≥ 0)

$$v_d(t) = 2\pi f_c + 2\pi f_\Delta z(t) \quad \rightarrow \quad v_d(t) - \overline{v_d(t)} = 2\pi f_\Delta z(t)$$

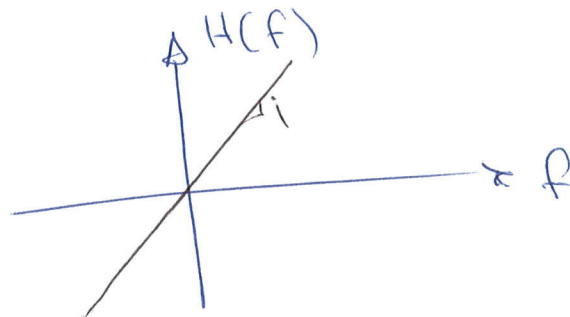
(expresión de corriente)

Limitador: permite asegurar una amplitud de señal constante a la entrada del derivador

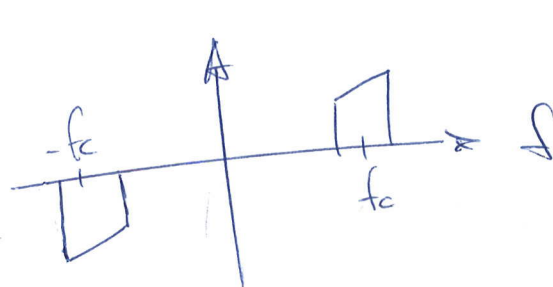


Diferenciador: realiza la operación de derivación

→ filtro con $H(\omega) = j\omega$

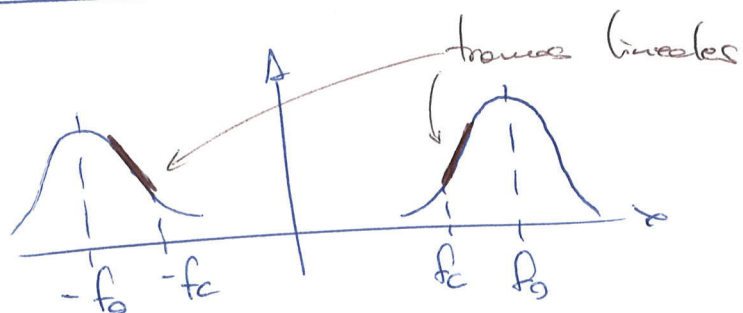


Banda con que funciona en la banda de f_c :

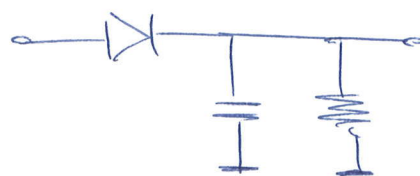


→ es muy difícil su realización

⇒ filtros resonantes con $f_0 > f_c$:



Detectores de envolvente:



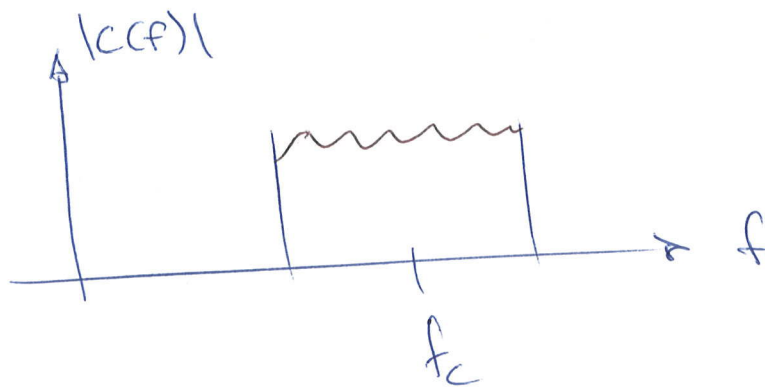
Paso de una señal modulada por un

filtro: sistema LTI con memoria:



Distorsión lineal $\rightarrow |C(f)| \neq \text{cte}$

Si $|C(f)| \neq \text{cte}$ en la banda de paso, ley distorsión lineal de amplitud (ej: derivador)



\Rightarrow cambio de FM a AM, pero de forma más costosa que el derivador

Se puede compensar con el limitador. En la entrada de cualquier rx FM hay un.

Distorsión de fase: $\arg C(f) \neq a + b \cdot f$
(no lineal, retardo variable)

Z_0 es más perpendicular que b de amplitud

3.- EJEMPLOS DE RADIODIFUSIÓN

3.1.- RADIODIFUSIÓN AM

Banda de frecuencias: 535 - 1605 kHz

Señal en banda base: $B = 5$ kHz

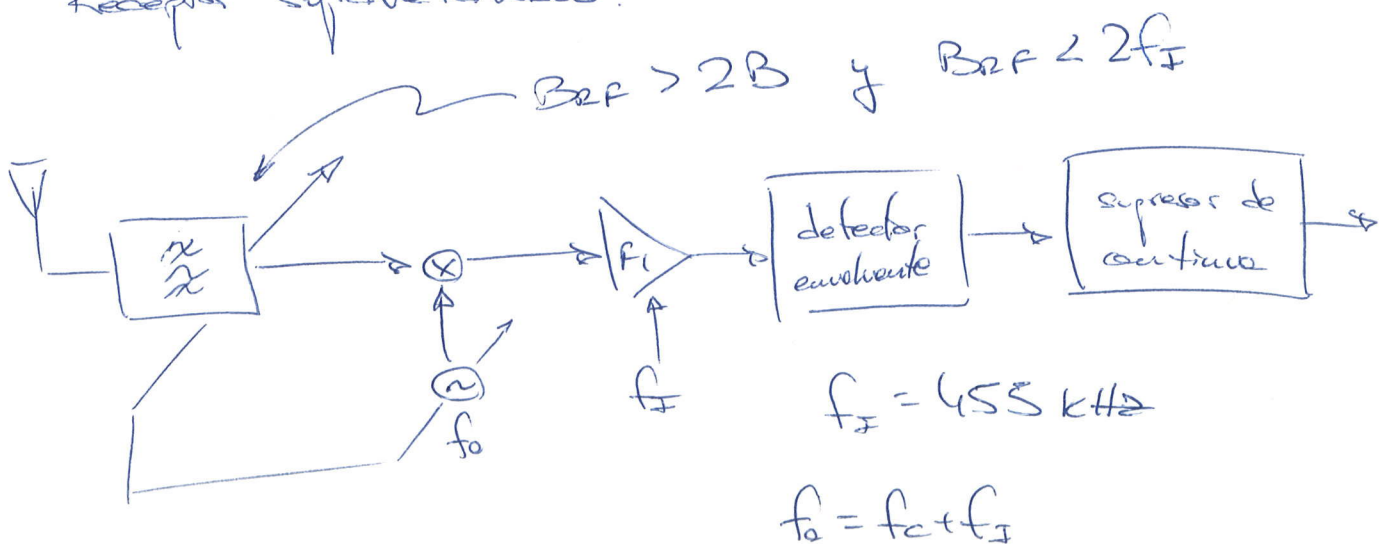
→ auto de baja calidad

→ señal modulada: $W = 10$ kHz

Portadoras: $f_c = 540 - 1600$ kHz

separación: 10 kHz

Receptor superheterodino:



Se usa $B_{RF} < 2f_I$ para evitar que interfiera la frecuencia imagen.

3.2.- Diffusión de FM

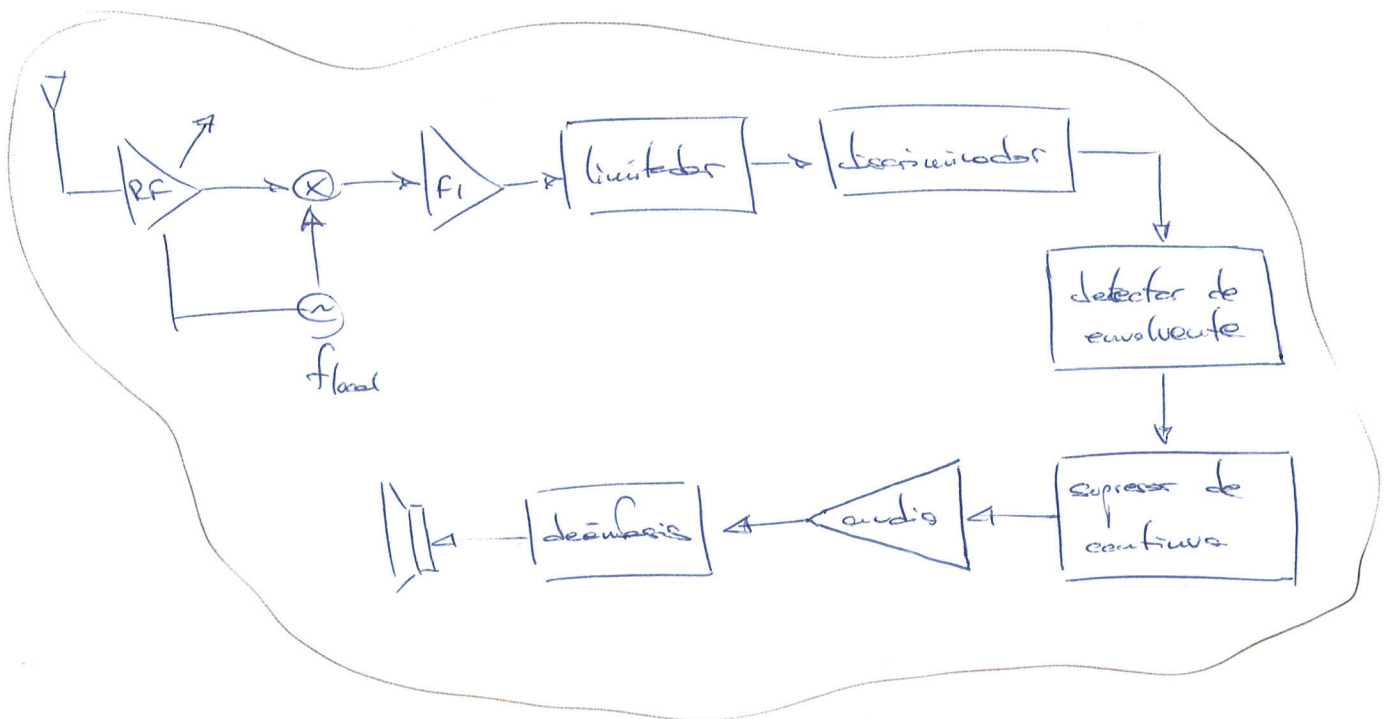
Banda del servicio: 88 - 108 MHz (se propaga a mayor distancia que AM)

Banda base: audio de alta calidad, $B = 15 \text{ kHz}$

Separación de canales: 200 kHz

$$f_{\Delta} = 75 \text{ kHz} \Rightarrow W = 2(B + f_{\Delta}) = 180 \text{ kHz}$$

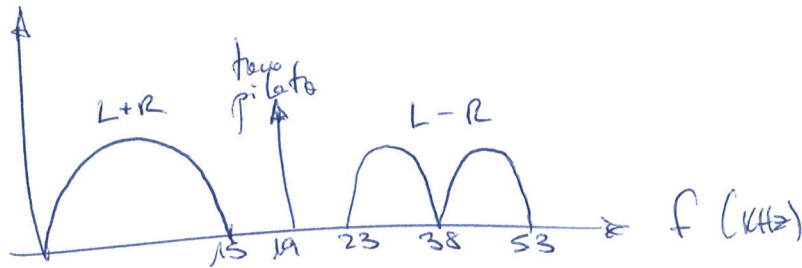
Receptor superheterodino: $\left. \begin{array}{l} f_I = 10.7 \text{ MHz} \\ B_{FI} \geq 200 \text{ kHz} \end{array} \right\}$



3.3.- FM ESTEREO

Pensada para dar FM estereo sobre los canales mono.

2o 2 canales de 15 kHz

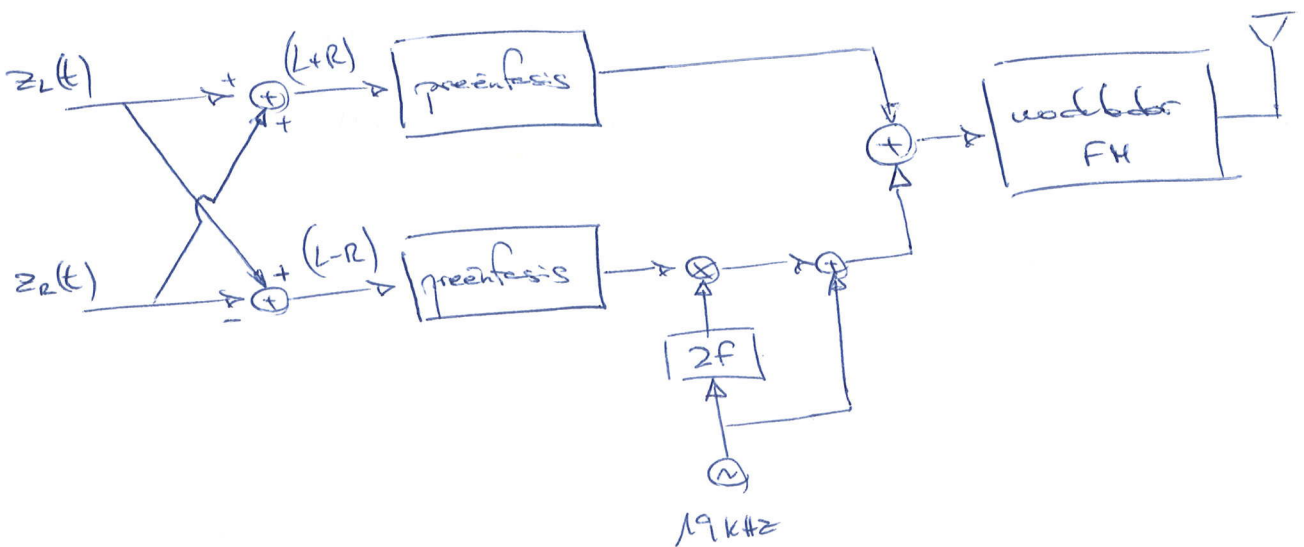


señal estereo
en banda base

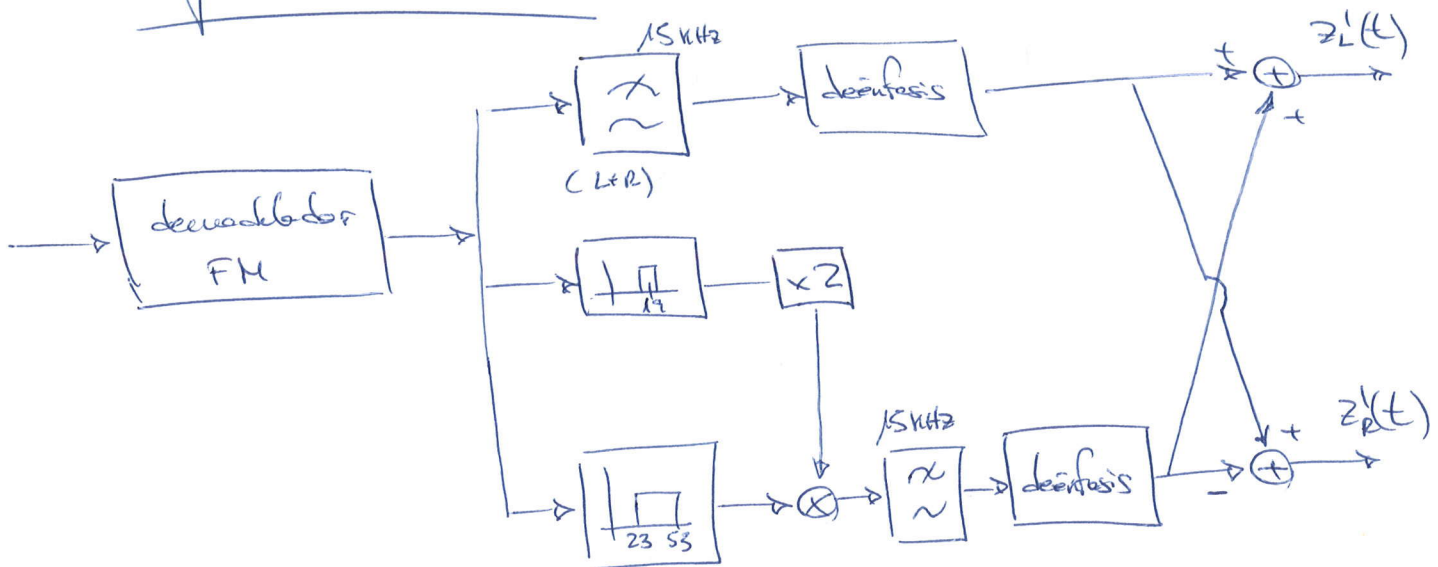
$L+R$ = suma de los canales izquierdo y derecho

$L-R$ = resta de los canales modulados en DBL

Transmisor:



Receptor FM estéreo:



Audio de banda estereo $\equiv 3 \times \omega_{\text{base}}$ (en banda base)

En la señal modulada, $B_T \approx 250 \text{ kHz}$

S: se usa un receptor monoaural, se oye la suma de los 2 canales.

3.4. - RADIODIFUSIÓN DE TV EN BLANCO Y NEGRO

Se emiten 2 señales:

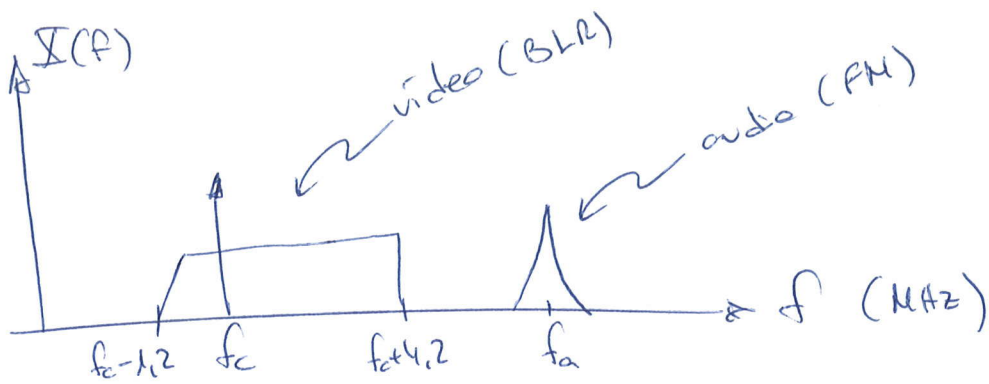
- video (blu): $B_v = 4,2 \text{ MHz}$ ($v(t)$) \rightarrow BLR + palt. de base

- audio: $B_a = 10 \text{ kHz}$ ($a(t)$) \rightarrow FM

Y se usan 2 bandas:

- VHF: 54 - 216 MHz ($\omega_T = 7 \text{ MHz}$)

- UHF: 470 - 860 MHz ($\omega_T = 8 \text{ MHz}$)

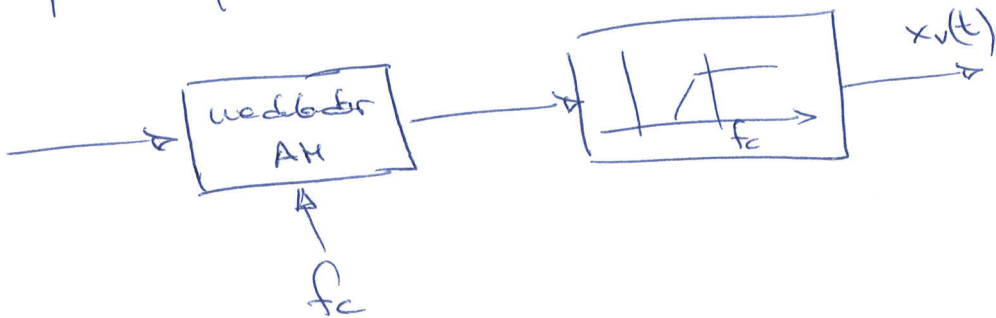


$$f_a = f_c + 4,5 \text{ MHz}$$

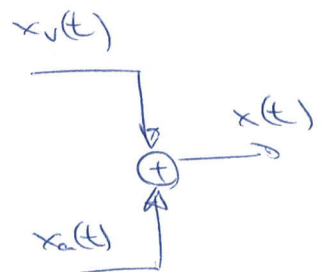
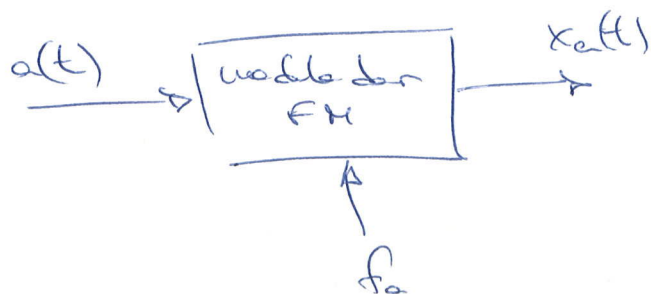
El audio se modula usando una desviación de frecuencia de 25 kHz, por lo que su ancho de banda es de 70 kHz

Transmisor:

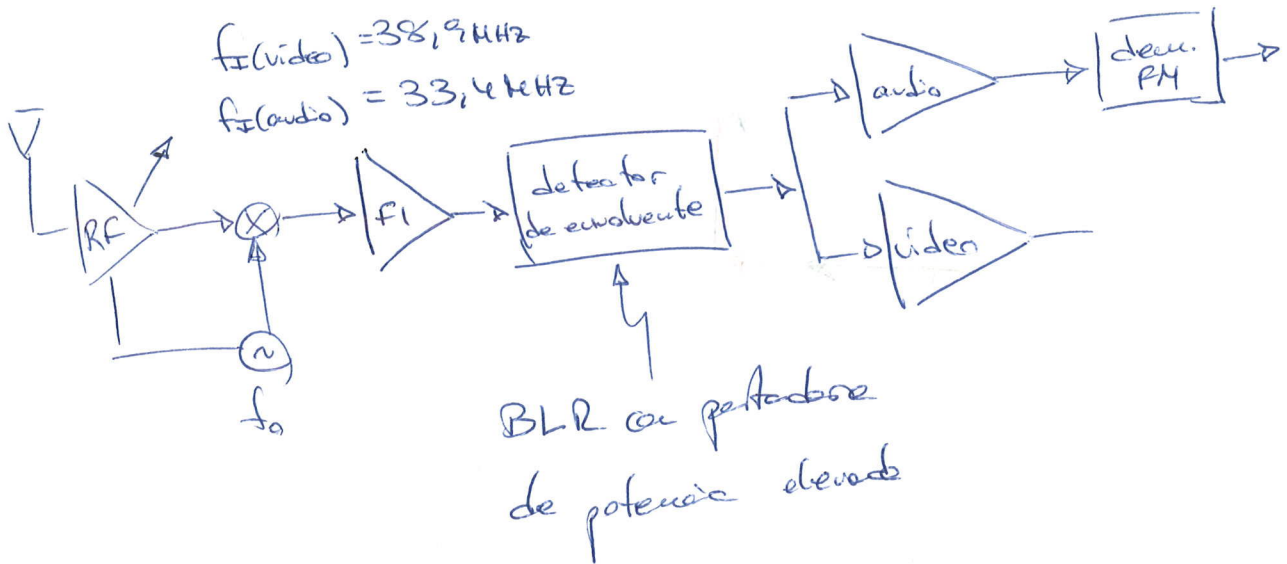
La señal de video se modula en AM y luego se pasa por un filtro para generar BTR:



Y la de audio se modula en FM en otra frecuencia:



Receptor:



Teoremas $x(t)$: si A es la amplitud de la portadora,

$$x_a(t) = \underbrace{A(1 + m v(t) + j m \tilde{v}(t))}_{\text{señal de video}} e^{j 2\pi f_c t} + \underbrace{A' e^{j\phi(t)} e^{j 2\pi f_a t}}_{\text{señal de audio}}$$

$$x_{\text{eq}}(t) = x_a(t) e^{-j 2\pi f_c t}$$

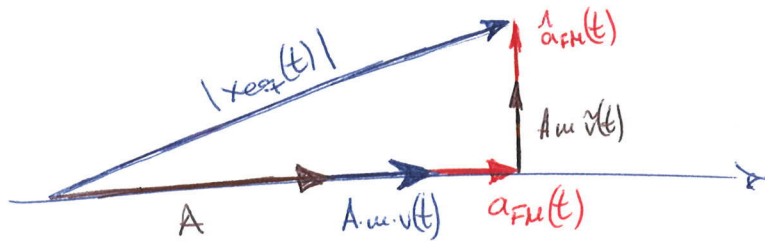
$$= A(1 + m v(t) + j m \tilde{v}(t)) + A' e^{j\phi(t)} e^{j 2\pi(f_a - f_c)t}$$

$$x_r(t) = A(1 + m v(t)) + A' \cos(2\pi(f_a - f_c)t + \phi(t))$$

$$x_c(t) = A m \tilde{v}(t) + A' \text{sen}(2\pi(f_a - f_c)t + \phi(t))$$

A la salida del detector de envolvente se tiene $|x_{\text{eq}}(t)|$

Diagrama fasorial:



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{FM}(t) = A' \cos(2\pi(f_a - f_c)t + \phi(t)) \\ \hat{a}_{FM}(t) = A' \sin(2\pi(f_a - f_c)t + \phi(t)) \end{array} \right.$$

El detector de envolvente funciona cuando A es mucho mayor que las otras componentes, lo que ocurre cuando se envía la potencia con mucha potencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ll 1 \\ A' \ll A \end{array} \right.$$

En TV se genera mucha potencia en algo superfluo porque así se consigue un receptor muy sencillo.

3.5. - RADIODIFUSIÓN DE TV EN COLOR

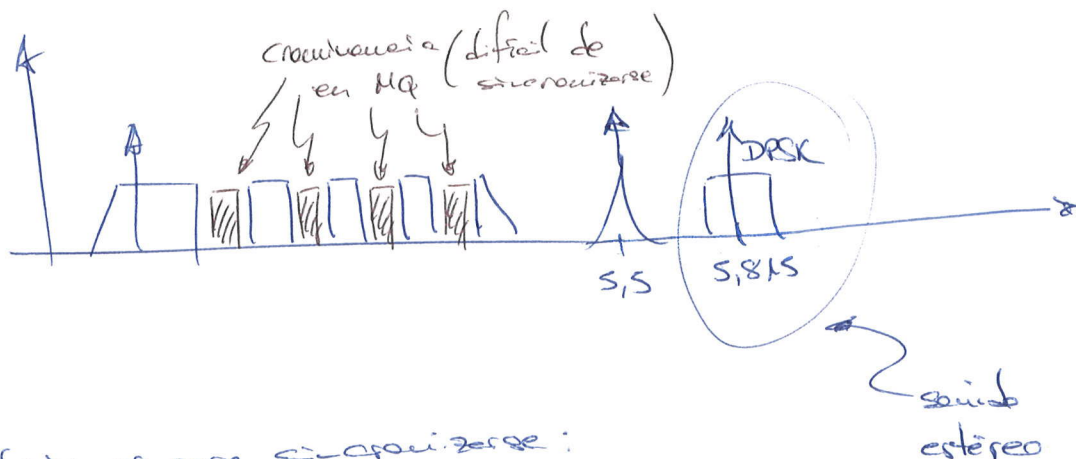
- Se debe transmitir información de rojo (R) y azul (B)
- B & W = luminancia (Y)

⇒ transmitiendo: Y, R-Y, B-Y ⇒ R, G, B

Señal de vídeo periódica: su espectro será discreto, por lo que en sus huecos o huecos de 2 veces se reñalen con modulación de Q

⇒ crominancia

R-Y y B-Y a 1 MHz



• 3 soluciones para sincronización:

- NTSC (EE.UU.)
- PAL (Europa)
- SECAM (Francia): color a FM

