COMUNICACIONES DIGITALES

Curso 01-02

PROBLEMAS PROPUESTOS

Tema I. Introducción a los sistemas de transmisión digital

1. Considera una señal de audio cuyo voltaje viene dado aproximadamente por la expresión:

$$s(t) = 3\cos 500t$$

a) Calcula la relación señal-ruido de cuantificación para la codificación PCM con 10 bits.
b) Cuantos bits serán necesarios para alcanzar 40 dB de SNR?

2. Una señal vocal de frecuencia máxima limitada a 3 kHz se muestrea y cuantifica mediante PCM de L niveles de cuantificación. Se especifica que el error de cuantificación no exceda del 1 % del valor pico a pico de la señal analógica. Por su parte, la señal digital obtenida se transmite mediante un código de línea multinivel con 16 niveles de tensión.

a) ¿Cuál es el nº mínimo de bits de la codificación con PCM?
b) Si la señal vocal se aproxima como una sinusoide, ¿cual es la relación SNR de cuantificación?
c) ¿Con qué velocidad mínima ha de muestrarse la señal vocal? ¿Cual es entonces la velocidad binaria resultante?¿A cuantos baudios se está transmitiendo en ese caso?
d) ¿Cuál es el ancho de banda mínimo necesario para evitar la interferencia intersimbólica?
e) ¿Cuál sería el ancho de banda mínimo necesario para evitar la interferencia intersimbólica si el pulso empleado fuese de tipo coseno alzado con un exceso de ancho de banda del 50 %?

3. Una fuente de información genera dos mensajes, donde el primero de ellos tiene una probabilidad *a priori* (probabilidad de aparición) **p**. Dibuja la entropía de la fuente en función de p.

4. Una fuente de información genera tres mensajes, donde los dos primeros son equiprobables con probabilidad *a priori* **p** (cada uno de ellos). Dibuja la entropía de la fuente en función de p.

5. Calcula la capacidad de un canal de radio si SNR=6 dB y el ancho de banda empleado es de 5 kHz. Repite el cálculo para un canal de televisión (ancho de banda de 5 MHz) y compara los resultados.

6. De los siguientes códigos, determina aquellos que son unívocamente descifrables e inmediatos:

a) 010, 0110, 1100, 0001, 00011, 00110
b) 0, 010, 01, 10
c) 0, 100, 101, 11

7. Se necesita transmitir por una línea telefónica, cuyo ancho de banda es de 3 kHz, información digitalizada a un régimen de 56 kbps. ¿Cual es la relación SNR mínima para conseguir este objetivo?

8. Determina la codificación de Shannon-Fano para una fuente que genera mensajes con probabilidades *a priori*

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7
0'05	0'15	0'2	0'05	0'15	0'3	0'1

Repite el procedimiento para la codificación de Huffman. Compara en ambos casos la longitud media de las codificaciones obtenidas con la entropía de la fuente.

9. Una codificación de bloques dada añade tres bits de paridad a las palabras originales (de 7 bits). ¿Cual es el porcentaje de mensajes recibidos posibles que corresponden a transmisiones válidas?

10. Calcula la probabilidad de aceptación de una palabra codificada mediante un código de bloques de **n** bits, si el error se produce en cada bit con una probabilidad $\mathbf{p_e}$ y entre bits los errores ocurren de manera estadísticamente independiente. ¿Puede hacerse n arbitrariamente grande? ¿Qué problemas acarrearía?

11. Una imagen de televisión en blanco y negro contiene 211.000 píxeles, que se transmitirán con 8 niveles de brillo para cada uno de ellos. Suponiendo que los niveles de brillo pueden aparecer con idéntica probabilidad:

a) ¿Cual es el contenido de información de una imagen?
b) ¿Cual es el régimen de transmisión de información si se envían 30 cuadros por segundo?
c) Supón ahora que el español consta de 50.000 entradas de diccionario equiprobables (lo cual es poco realista). ¿Cual es el contenido de información de 1.000 palabras?
d) ¿Vale una imagen más que 1.000 palabras?

12. Encuentra la distancia mínima para los siguientes códigos de cuatro palabras

Código 1: 0111001, 1100101, 0010111, 1011100
Código 2: 0111001, 1100101, 0010111, 0101001

¿Cuantos errores de bit será capaz de detectar cada código? ¿Y de corregir?

PROBLEMAS TEMA I

1- $s(t) = 3\cos 500\,t$

a) SNR para PCM 10 bits

$$SNR\ (dB) = 6'02 \cdot n + 4'77 - 20 \log \frac{x_c}{x_{eff}}$$

$x_c = 3$

$x_{eff} = 3/\sqrt{2}$ $\Big\}$ $SNR\,(dB) = 61'96$ dB

b) Bits para SNR = 40 dB

$$40 = 6'02 \cdot n + 4'77 - 20 \log \frac{x_c}{x_{eff}} \rightarrow n = 6'35$$

$$\boxed{n = 7}$$

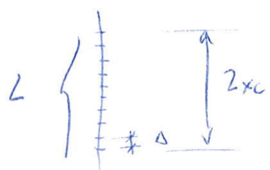
2- Señal vocal $f_{max} = 3$ kHz

PCM L niveles

Error de cuantificación < 1% del valor pico a pico

Código de línea 16 niveles

a) n mínimo



L niveles

$\Delta \leq 1\% \cdot 2x_c$

$\Delta = \frac{2x_c}{L} \leq 0'01 \cdot 2x_c \Rightarrow L \geq 100$

$\boxed{n = 7} \rightarrow L = 128$

b) Señal ~ sinusoide. ¿SNR de cuantificación?

$$\boxed{SNR = 6'02 \cdot 7 + 4'77 - 3 = 43'91 \text{ dB}}$$

c) Velocidad mínima?

Nyquist $\rightarrow f_s \geq 2W \rightarrow$ $\boxed{f_{s_{min}} = 6 \text{ kHz}}$

Velocidad binaria resultante: $\boxed{V_b = 6.000 \text{ muestras/s} \cdot 7 \text{ bits/muestra} = 42 \text{ kbps}}$

En baudios: $\boxed{r = \frac{V_b}{\text{simbolos}} = \frac{42 \text{ kbps}}{4} = 10'5 \text{ kbaudios}}$

4 bits/nivel

c) BW mínimo para evitar ISI

$$r_{max} = 2W \rightarrow \boxed{W = \frac{r_{max}}{2} = 5'25 \text{ kHz}}$$

e) BW mínimo para evitar ISI con coseno alzado $\alpha = 50\%$

$H(f) = 0 \qquad |f| > \frac{1}{2T} + \beta$

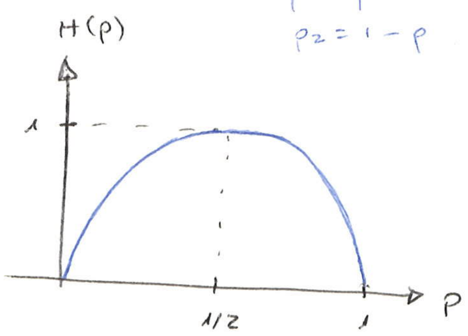
$\frac{1}{2T} = 5'25 \text{ kHz} \qquad \beta = \frac{\alpha}{2 \cdot T} \Rightarrow \boxed{W' = 1'5 \cdot W = 7'875 \text{ kHz}}$

3- 2 mensajes, probabilidad a priori p. $H(p)$

$$H = \sum_i p_i \cdot \log_2 1/p_i$$

$p_1 = p$

$p_2 = 1 - p \rightarrow \boxed{H(p) = p \cdot \log_2 1/p + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}}$



$p = 0 \Rightarrow H(p) = 0$

$p = 1 \Rightarrow H(p) = 0$

$p = 1/2 \Rightarrow H(p) = 1$

4- 3 mensajes, 2 equiprobables con probabilidad p

H(p)

$p_1 = p_2 = p$

$p_3 = 1 - 2p$

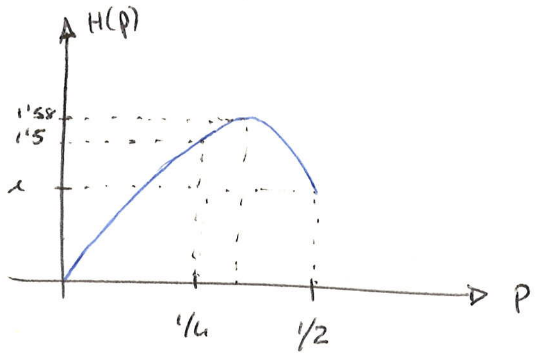
$$\boxed{H(p) = p \cdot \log_2 1/p^2 + (1-2p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-2p}}$$

$p = 0 \Rightarrow H(p) = 0$

$p = 1 \Rightarrow$ No puede ser $p > 1/2$, porque hay 2 mensajes con esa probabilidad

$p = 1/2 \Rightarrow H(p) = 1$

$p = 1/4 \Rightarrow H(p) = 3/2$



5- SNR = 6dB, BW = 5kHz (canal radio)

BW = 5MHz (canal de TV)

Capacidades

Límite de Shannon:

$$C = w \cdot \log_2 (1 + S/N)$$

$S/N = 10^{6/10} = 3'98$

$C_{radio} = 5 \cdot 10^3 \cdot \log_2 4'98 = 11'58$ kbps

$C_{TV} = 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 4'98 = 11'58$ Mbps

6 - a) 010

0110

1100

0001

00011

00110

No es inmediato

És unívoco

b) 0

010

01

10

$0 + 10 \in C$

No es unívoco

c) 0

100

101

11

Unívoco e inmediato

7 - BW = 3 kHz

r = 56 kbps

SNR mínima ?

$$C = W \cdot \log_2 (1 + SNR)$$

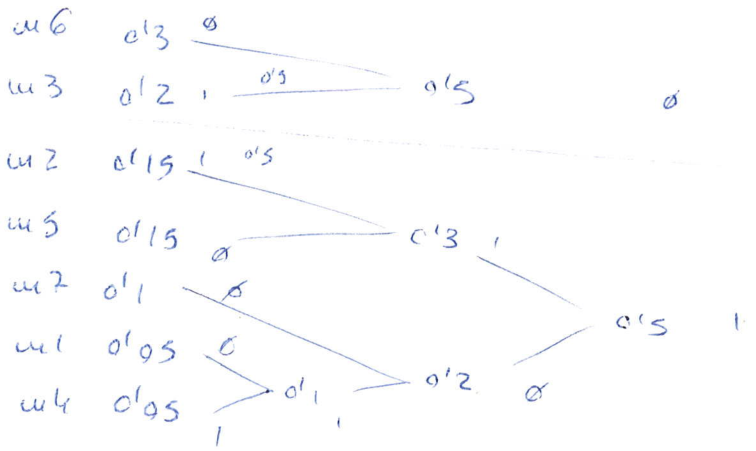
$$56 \text{ kbps} = 3 \text{ kHz} \cdot \log_2 (1 + SNR)$$

$$SNR = 2^{56/3} - 1 = 4'1613 \cdot 10^5$$

$$\boxed{SNR(dB) = 56'2 \text{ dB}}$$

8 - Shannon - Fano

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7
0'05	0'15	0'2	0'05	0'15	0'3	0'1

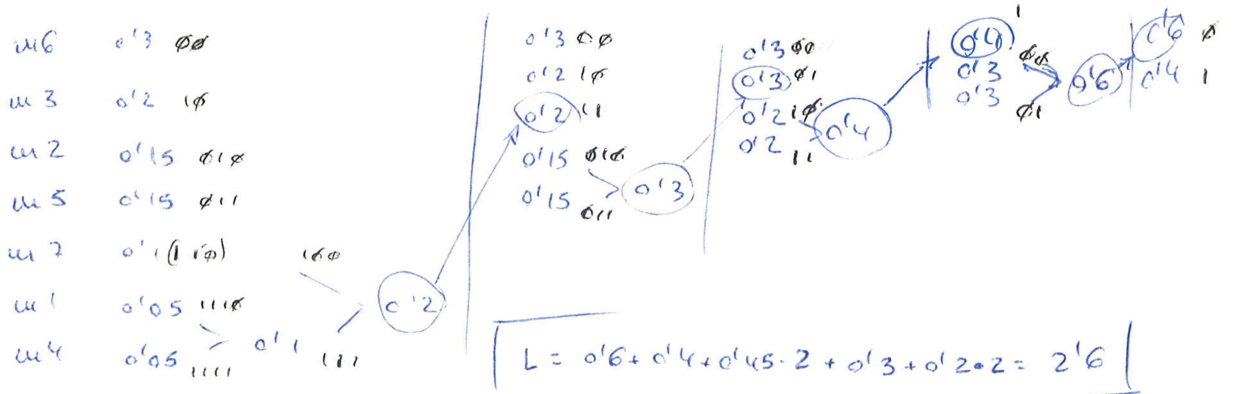


$m_1 = 0101$
$m_2 = 111$
$m_3 = 1\emptyset$
$m_4 = 11\emptyset1$
$m_5 = \emptyset11$
$m_6 = \emptyset\emptyset$
$m_7 = \emptyset\emptyset1$

Longitud media:

$L = \sum p_i \cdot l_i = 0'2 + 0'45 + 0'4 + 0'45 + 0'6 + 0'3 + 0'2 = 2'6$

Huffman



$L = 0'6 + 0'4 + 0'45 \cdot 2 + 0'3 + 0'2 \cdot 2 = 2'6$

$H = \sum p_i \cdot \log_2 1/p_i = 2'571$

9 - Palabras de 7 bits
Paridad de 3 bits
¿% mensajes recibidos que corresponden a tx válidos?

Palabras válidas: 2^7
Total palabras que se pueden recibir: 2^{10}

$$\boxed{\% = 100 \cdot \frac{2^7}{2^{10}} = 12'5\,\%}$$

10 - Código de bloques n bits
$p_{e,bit} = p_e$
¿n arbitrariamente grande?

Probabilidad de acertar en todos los bits: $\underbrace{p_{cA}}_{\text{probabilidad de aceptación del código}} = (1-p_e)^n$

Dado que $1-p_e < 1$, conforme aumente n, disminuirá la probabilidad de aceptar una palabra, ya que es más larga y por ello tiene más probabilidad de sufrir errores.

11- Imagen B/N → 211.000 píxeles, 8 niveles de brillo

a) Contenido de información = 211.000 × 3 = 633.000 bits = I

b) r = 633.000 × 30 = 18'11 Mbps (18.990.000 bps)

30 fps

c) 50.000 palabras equiprobables

1000 palabras → $I = 1000 \times I_{palabra}$

$P_{palabra} = \frac{1}{50.000}$

$I_{palabra} = \log_2 50.000 = 15'61$

$I = 15.609'64$ bits

d) Sí que vale más una imagen que 1000 palabras.

12- Distancia mínima

a) 0111001
1100101
0010111
1011100

$d_H = 4$ → detectar 3 errores
→ corregir 1 error

b) 0111001
1100101
0010111
0101001

iguales que antes

$d_H = 1$ → detectar y corregir 0 errores

↳ comparar sólo esta con las otras

COMUNICACIONES DIGITALES

Curso 01-02

PROBLEMAS PROPUESTOS

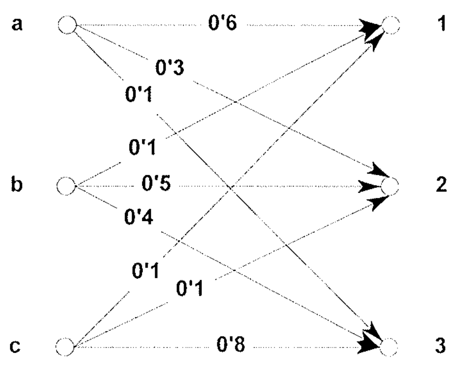
Tema II. Teoría de la decisión

1. Considera el canal de comunicación dado por las probabilidades condicionales:

$$p(r/m_0)=\frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{0.5}} \qquad\qquad p(r/m_1)=\frac{1}{2} \;\;,,\;\; |r|\le 1$$

a) Determina la regla de decisión óptima.
b) Calcula la probabilidad de error asociada a dicha regla.

2. Por el canal de comunicaciones discreto de la figura se transmite cada segundo uno de los elementos del alfabeto {a, b, c} y se recibe uno de los valores $\{1,2,3\}$. Las probabilidades *a priori* de los mensajes son 0'3, 0'5 y 0'2 respectivamente. ¿Cual es la regla de decisión óptima? ¿Cuál será entonces la probabilidad de error resultante? ¿Cual sería la probabilidad de error mínima que podría alcanzarse sin utilizar el canal?



3. En un sistema de comunicaciones digitales binario, las f.d.p. condicionales del voltaje recibido son:

$$p(r/m_0)=\begin{cases} r & ,,\quad 0\le r\le 1 \\ 2-r & ,,\quad 1\le r\le 2 \end{cases} \qquad\qquad p(r/m_1)=\frac{1}{4} \;\;,,\;\; -1\le r\le 3$$

Calcula la regla de decisión óptima y la probabilidad de error que esta arroja, suponiendo iguales las probabilidades *a priori* de los mensajes.

4. El observable en un detector digital binario consiste en la toma de **N** muestras del voltaje recibido **r**. Si el mensaje transmitido es m_0 la varianza de r es σ_0^2, mientras que si el mensaje es m_1 la varianza será σ_1^2. Suponiendo mensajes equiprobables *a priori*, y una distribución gaussiana del voltaje, demostrar que

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} r_i^2$$

es un estadístico suficiente.

5 En un sistema óptico de comunicaciones digitales, el receptor basa su decisión en la cuenta de fotones recibidos (**n**). Para los mensajes transmitidos m_0 y m_1, las f.d.p. condicionales respectivas son:

$$p(n/m_0) = \frac{\lambda_0^n}{n!} e^{-\lambda_0} \qquad\qquad p(n/m_1) = \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1}$$

Encontrar el criterio óptimo de decisión si las probabilidades *a priori* son iguales. ¿Cual es el estadístico suficiente en este caso?

6. Un transmisor envía dos posibles mensajes , m_0 y m_1, generando los voltajes respectivos de **0** y **E** V. El efecto del canal es la adición de ruido gaussiano de media nula y varianza σ^2.

a) Dar el criterio de decisión óptimo.
b) Calcular para el mismo la probabilidad de error.
c) Repetir los apartados anteriores para el caso de que el receptor tome **N** muestras del voltaje independientes entre sí.

7. En la figura adjunta aparecen las funciones de densidad de probabilidad condicional del voltaje recibido **r** para un canal dado. Se supone que las decisiones correctas tienen un coste asociado nulo, mientras que las decisiones erróneas tienen un coste unitario.

a) Indica el criterio para construir un receptor óptimo.
b) Calcula la probabilidad de error genérica que caracteriza al anterior receptor.
c) Determina la distribución de probabilidades *a priori* que arrojaría una probabilidad de error máxima.

PROBLEMAS TEMA II

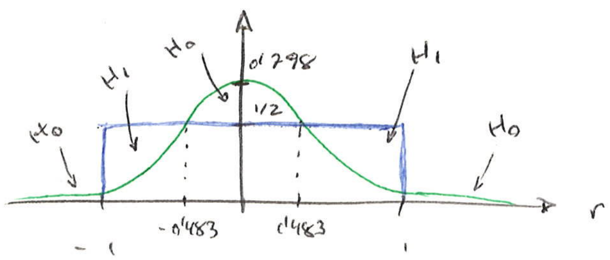
1.- $p(r/\omega_0) = \frac{1}{0'5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{0'5}}$ $\qquad p(r/\omega_1) = 1/2 \quad |r| \leq 1$

a) Regla de decisión óptima

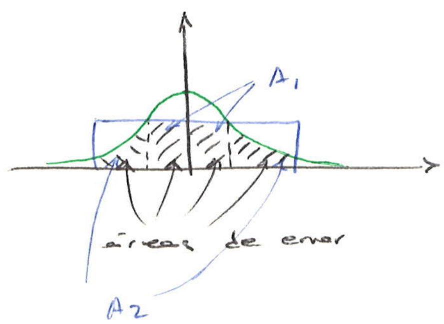
No tenemos probabilidades a priori ⇒ ML

$$p(r/\omega_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p(r/\omega_1)$$

$$p(r/\omega_0) = p(r/\omega_1) \Rightarrow e^{-r^2/0'5} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = 0'483$$



b) Probabilidad de error



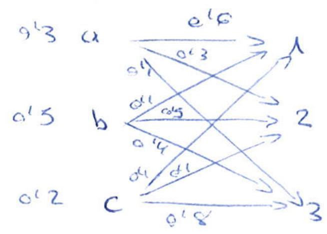
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0'483 = 0'483$

$p_0 = p_1 = 1/2$ (suposición)

$$A_2 = 2\int_{0'483}^{1} \frac{1}{0'5\sqrt{2\pi}} e^{-r^2/0'5} dr = 2\left(Q(2 \cdot 0'483) - Q(2)\right)$$

$$\boxed{p_e = \frac{0'483}{2} + \left(Q(0'966) - Q(2)\right)} \simeq 0'3897$$

2 -



Regla MAP: $\hat{m} = \max_i \left(p(r/m_i) \cdot p_i \right)$

$$\left.\begin{cases} p(1/a) \cdot p_a = 0'6 \cdot 0'3 = 0'18 \\ p(1/b) \cdot p_b = 0'1 \cdot 0'5 = 0'05 \\ p(1/c) \cdot p_c = 0'4 \cdot 0'2 = 0'08 \end{cases}\right\} \Rightarrow 1 \to \hat{a}$$

$$\left.\begin{cases} p(2/a) \cdot p_a = 0'3 \cdot 0'3 = 0'9 \\ p(2/b) \cdot p_b = 0'5 \cdot 0'5 = 0'25 \\ p(2/c) \cdot p_c = 0'1 \cdot 0'2 = 0'02 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2 \to \hat{b}$$

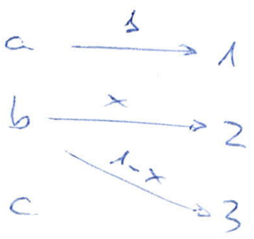
$$\left.\begin{cases} p(3/a) \cdot p_a = 0'1 \cdot 0'3 = 0'03 \\ p(3/b) \cdot p_b = 0'4 \cdot 0'5 = 0'2 \\ p(3/c) \cdot p_c = 0'8 \cdot 0'2 = 0'16 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3 \to \hat{b}$$

Probabilidad de error:

$$\begin{cases} p(e/a) = 0'4 \\ p(e/b) = 0'1 \\ p(e/c) = 1 \end{cases}$$ (prob. error al enviar "a")

$$\boxed{P_e = p(e/a) \cdot p_a + p(e/b) \cdot p_b + p(e/c) \cdot p_c = 0'4 \cdot 0'3 + 0'1 \cdot 0'5 + 1 \cdot 0'2 = 0'12 + 0'05 + 0'2 = 0'37}$$

Sin canal:

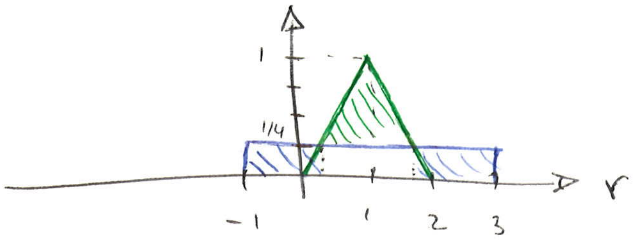


Sólo habrá error cuando genere "c", ya que $3 \to \hat{b}$

$$\boxed{P_e = 0'2}$$

3-

$$p(r/\omega_0) = \begin{cases} r & 0 \le r \le 1 \\ 2-r & 1 \le r \le 2 \end{cases} \qquad p(r/\omega_1) = 1/4 \quad -1 \le r \le 3$$



$r \in [1/4, 7/4] \to \hat{\omega}_0$

$r > 7/4, < 1/4 \to \hat{\omega}_1$

$r \in [-1, 3]$

$p_0 = p_1 = p = 1/2$

$$\boxed{P_e = p(e/\omega_0)\, p_0 + p(e/\omega_1)\cdot p_1 = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16}\,\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{32}}$$

$p(e/\omega_0) = \frac{1}{16}$

$p(e/\omega_1) = \frac{3}{8}$

4- N muestras del voltaje recibido r

$\omega_0 \to \sigma_0^2$

$\omega_1 \to \sigma_1^2 \qquad p_0 = p_1 = 1/2$

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \quad \text{estadístico suficiente}$$

$$r_1 \dots r_N \to p(r_k/\omega_0) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_k^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$p(r_k/\omega_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_k^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$p(r_1, \dots, r_N/\omega_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p(r_1 \dots r_N/\omega_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$p(r_1/\omega_0) \cdots p(r_N/\omega_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p(r_1/\omega_1) \cdots p(r_N/\omega_1)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{N} r_k^2} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \left(\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{k=1}^{N} r_k^2} \xrightarrow{\text{logaritmos}} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{k=1}^{N} r_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2N \ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

$$\boxed{\rho = \sum_{k=1}^{N} r_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2 \cdot N \cdot \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}} \qquad \sigma_0 < \sigma_1$$

5.- Fotones recibidos: "n"

$$p(n/m_0) = \frac{\lambda_0^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_0} \qquad p(n/m_1) = \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1}$$

$p_0 = p_1 = 1/2$

Criterio óptimo de decisión

→ PML: $p(n/m_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p(n/m_1)$

$$\lambda_0^n \cdot e^{-\lambda_0} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \lambda_1^n \cdot e^{-\lambda_1}$$

$$n \cdot \ln \lambda_0 - \lambda_0 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} n \cdot \ln \lambda_1 - \lambda_1$$

$$n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \lambda_0 - \lambda_1 \Rightarrow \boxed{n \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}}} \qquad \lambda_0 > \lambda_1$$

Estadístico suficiente: n

6.- $m_0 \to 0\ V$

$m_1 \to E\ V$

Canal: AWGN, σ^2

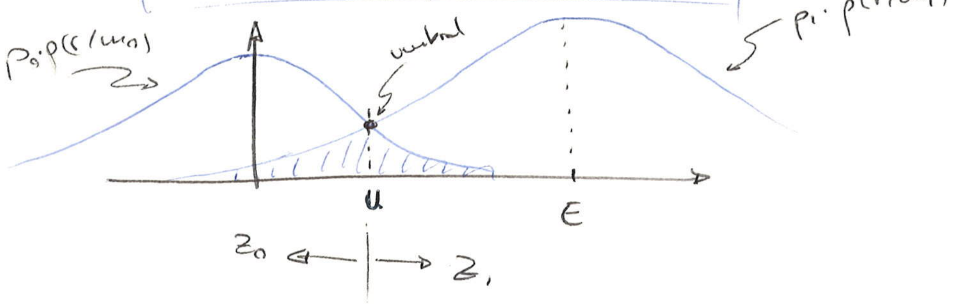
a) Criterio de decisión

$m_i \to s$

$r = s + n \to$ modifica la $p(r/m_i)$

$$\begin{cases} p(r/m_0) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ p(r/m_0) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(r-E)^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

MAP: $$\boxed{p_0 \cdot p(r/m_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p_1 \cdot p(r/m_1)}$$



b) pe.

El área marcada:

$$pe = \alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1$$

$$\begin{cases} \alpha = \displaystyle\int_u^{\infty} p(r/m_0)\,dr = p(e/m_0) \\ \beta = \displaystyle\int_{-\infty}^{u} p(r/m_1)\,dr = p(e/m_1) \end{cases}$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$\alpha = \cancel{\int_u^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,dr = \frac{1}{\sigma}\, Q\left(\frac{u}{\sigma}\right)}$$

$$\beta = \cancel{\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(r-E)^2}{2\sigma^2}}\,dr = 1-}$$

$\alpha \to \xi = \frac{r}{\sigma}$; $d\xi = \frac{dr}{\sigma}$ $\Rightarrow \alpha = \int_{u/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi = Q\left(\frac{u}{\sigma}\right)$

$\beta \to \xi = \frac{r-E}{\sigma}$; $d\xi = \frac{dr}{\sigma}$ $\Rightarrow \beta = \int_{-\infty}^{\frac{u-E}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi = 1 - Q\left(\frac{u-E}{\sigma}\right)$

$= Q\left(\frac{E-u}{\sigma}\right)$

$$\boxed{P_e = p_0 \cdot Q\left(\frac{u}{\sigma}\right) + p_1 Q\left(\frac{E-u}{\sigma}\right)}$$

Si $p_0 = p_1 = 1/2 \to P_e = Q\left(\frac{E}{2\sigma}\right)$

$\Downarrow$

$u = E/2$

c) Tomando N muestras independientes.

$$p(\bar{r}/m_i) = p(r_1 r_2 \cdots r_N / m_i) = \prod_K p(r_K/m_i)$$

indep.

Criterio de decisión: $p_0 \cdot p(\bar{r}/m_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p_1 \cdot p(\bar{r}/m_1)$

$p(r_K/m_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{r_K^2}{2\sigma^2}}$ $\quad p(r_K/m_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_K-E)^2}{2\sigma^2}}$

$$p_0 \cdot e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_N^2}{2\sigma^2}} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p_1 \cdot e^{-\frac{(r_1-E)^2 + \ldots + (r_N-E)^2}{2\sigma^2}}$$

$\Downarrow$ logaritmos

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_K \left((r_K - E)^2 - r_K^2\right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \ln \frac{p_1}{p_0} \to \sum_K \left(-r_K \cdot E + \frac{E^2}{2}\right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \sigma^2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Dividiendo por $N \cdot E$:

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} r_K \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{E}{2} - \frac{\sigma^2}{E \cdot N} \cdot \ln \frac{p_1}{p_0}}$$

Probabilidad de error:

$\rho = \frac{1}{N} \sum_K r_K$ (gaussiana)

$r_K \equiv N(0, \sigma) \Rightarrow \sum r_K \equiv N(0, \sigma\sqrt{N})$

$\Rightarrow \rho \equiv N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$

$$\to \begin{cases} P(\rho/\omega_0) = \dfrac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\rho^2 \cdot N}{2\sigma^2}} \\ P(\rho/\omega_1) = \dfrac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\rho-E)^2 \cdot N}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

$\rho \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \tilde{u}$ (umbral) $\quad \tilde{u} = \dfrac{E}{2} + \dfrac{\sigma^2}{E \cdot N} \cdot \ln \dfrac{P_0}{P_1}$

$$P(e/\omega_0) = \int_{\tilde{u}}^{\infty} P(\rho/\omega_0)\, d\rho = \int_{\tilde{u}}^{\infty} \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\rho^2 N}{2\sigma^2}}\, d\rho$$

$$P(e/\omega_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{u}} P(\rho/\omega_1)\, d\rho$$

$$P(e/\omega_0) = \left\{ \begin{array}{l} r = \rho \cdot \sqrt{N}/\sigma \\ dr = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} d\rho \end{array} \right\} = \int_{\tilde{u} \frac{\sqrt{N}}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-r^2/2}\, dr = Q\left(\frac{\tilde{u}\sqrt{N}}{\sigma}\right)$$

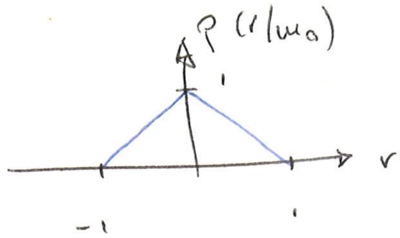
$$P(e/\omega_1) = \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{(\rho - E) \cdot \sqrt{N}}{\sigma} \\ dr = \frac{\sqrt{N}}{\sigma}\, d\rho \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\tilde{u} - E \cdot \frac{\sqrt{N}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-r^2/2}\, dr = 1 - Q\left(\frac{(\tilde{u}-E)\sqrt{N}}{\sigma}\right)$$

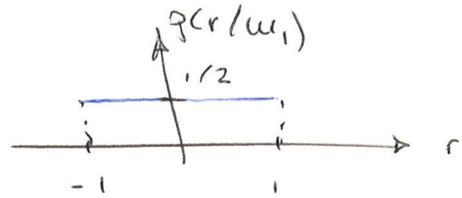
$$= Q\left(\frac{(E-\tilde{u})\sqrt{N}}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{P_e = P_0\, Q\left(\frac{\tilde{u}\sqrt{N}}{\sigma}\right) + P_1\, Q\left(\frac{(E-\tilde{u})\sqrt{N}}{\sigma}\right)}$$

Si $P_0 = P_1 = 1/2$, $\tilde{u} = E/2 \Rightarrow P_e = Q\left(\dfrac{E\sqrt{N}}{2\sigma}\right)$

7 - Coste asociado nulo para decisiones correctas
Coste unitario para decisiones erróneas



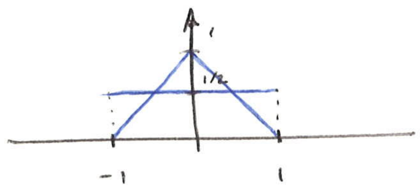


a) Criterio de decisión

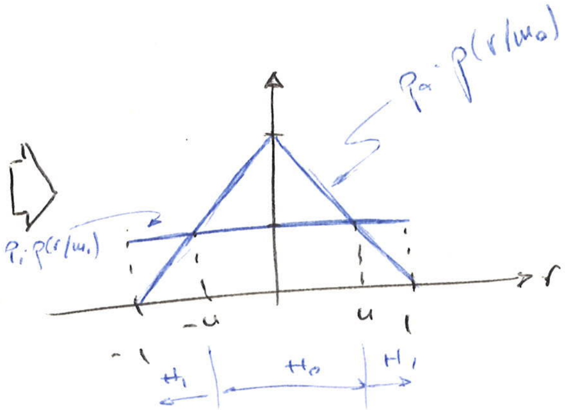
Costes ⇒ criterio de Bayes que degenera en MAP

$$\frac{p(r/m_0)}{p(r/m_1)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{\overset{1}{C_{01}} - \overset{0}{C_{11}}}{\underset{1}{C_{10}} - \underset{0}{C_{00}}} \, \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_1}{P_0}$$

$$p_0 \cdot p(r/m_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} p_1 \cdot p(r/m_1)$$



⇓



$|r| > u \rightarrow \hat{m}_1$

$|r| < u \rightarrow \hat{m}_0$

b) Probabilidad de error:

$$P_e = p_0 \cdot \alpha + p_1 \cdot \beta$$

$$\alpha = 2\int_u^1 p(r/m_0)\,dr = 2\int_u^1 (1-r)\,dr = 2\left[r - \frac{r^2}{2}\right]_u^1 = 1 - 2u + u^2$$

$$\beta = 2\int_0^u p(r/m_1)\,dr = u$$

$$\boxed{p_e = p_0\,(1-2u+u^2) + p_1 \cdot u} = p_0\,(1-u)^2 + p_1 \cdot u$$

c) Por p_1 para p_e máximo

$$p_1 = 1 - p_0 \rightarrow p_e = p_0\,(1-2u+u^2) + (1-p_0)\cdot u$$

$$\frac{dp_e}{dp_0} = 0$$

u es función de p_0 y p_1

Corte de $p_0 \cdot p(r/\omega_0)$ y $p_1 \cdot p(r/\omega_1)$

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p(u/\omega_0)}$$

$$p(r/\omega_0) = \begin{cases} 1-r & r>0 \\ 1+r & r<0 \end{cases}$$

$$1+u = \frac{p_1}{2p_0} \rightarrow u = \frac{p_1}{2p_0} - 1$$

$$= \frac{p_0}{2-2p_0} - 1 = \frac{3p_0-2}{2-2p_0}$$

$$u = \frac{1-\frac{3}{2}p_0}{1-p_0} \Rightarrow p_e = p_0\left(1 - \frac{2-3p_0}{1-p_0} + \left(\frac{1-\frac{3}{2}p_0}{1-p_0}\right)^2\right) +$$

$$+ 1 + \tfrac{3}{2}p_0$$

$$= \tfrac{5}{2}p_0 - \frac{2-3p_0}{1-p_0}\,p_0 + \left(\frac{1-\frac{3}{2}p_0}{1-p_0}\right)^2 \cdot p_0 + 1$$

$$\frac{dp_e}{dp_0} = \frac{2}{1-p_0}$$

$$u = 1 - \frac{p_1}{2p_0} = 1 - \frac{1-p_0}{2p_0} = \frac{3p_0 - 1}{2p_0}$$

$$p_e = p_0\left(1 - 1 + \frac{1-p_0}{2p_0}\right)^2 + (1-p_0) \cdot \frac{3p_0 - 1}{2p_0}$$

$$= \frac{(1-p_0)^2}{4p_0} + \frac{(1-p_0)(3p_0-1)}{2p_0} = \frac{(1-p_0)}{4p_0} \cdot (1 - p_0 + 6p_0 - 2)$$

$$= \frac{1-p_0}{2p_0} \cdot (5p_0 - 1)$$

$$\frac{dp_e}{dp_0} = 0 \rightarrow (5p_0 - 1)\frac{(p_0-1) \cdot 2 - 2p_0}{4p_0^2} + \frac{1-p_0}{2p_0} \cdot 5$$

$$= \frac{(5p_0 - 1)\cancel{2}}{\cancel{4}p_0^{\cancel{2}}} + 5\frac{1-p_0}{\cancel{2p_0}} = 0$$

$$5p_0 - 1 + 5p_0 - 5p_0^2 = 0$$

$$5p_0^2 - 10p_0 + 1 = 0 \rightarrow p_0 = \begin{cases} 0'1056 \\ 1'\cancel{89} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_0 &= 0'1056 \\ p_1 &= 0'8944 \end{aligned}}$$

COMUNICACIONES DIGITALES

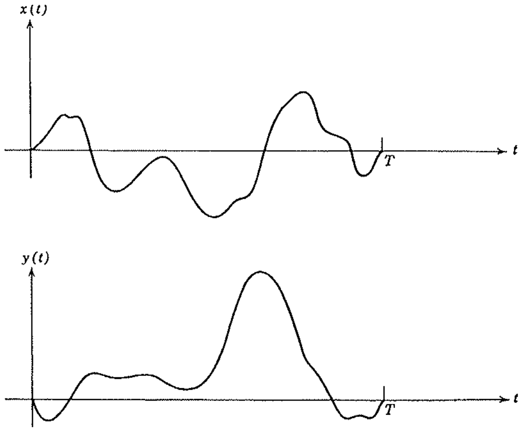
Curso 01-02

PROBLEMAS PROPUESTOS

Tema III. Transmisión digital en la banda de base

1. Si se aplican las ondas representadas a un resistor de 1 Ω se obtiene que:

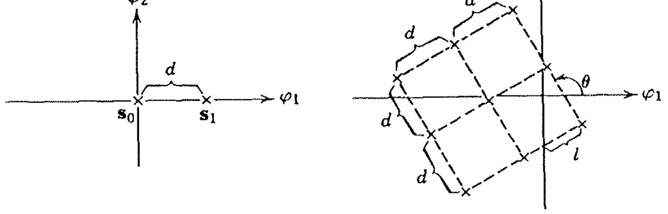
$$\int_0^T x^2(t')dt' = \int_0^T y^2(t')dt' = 16J \qquad \int_0^T x(t')y(t')dt' = 0$$



Las señales se emplean para la transmisión de dos mensajes equiprobables por un canal con ruido aditivo, gaussiano y blanco (canal AWGN)cuya densidad espectral de potencia es 4 W/Hz.

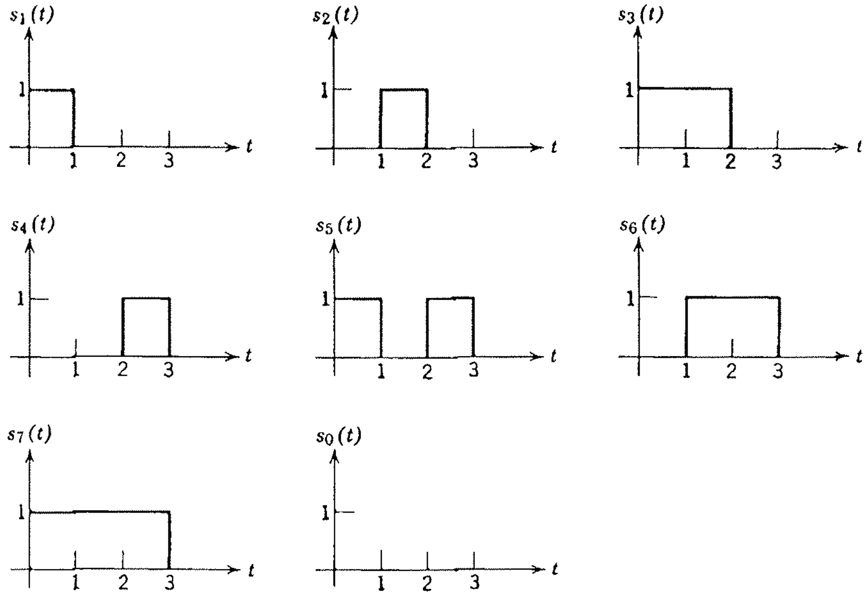
a) Calcula la probabilidad de error mínima si el alfabeto de señales está formado por x(t) y -x(t).
b) Repite el cálculo si las señales empleadas son x(t) e y(t).

2. Se sabe que la probabilidad de error de un sistema de comunicaciones que emplea la constelación de la figura **a** es igual a **q** cuando las señales son equiprobables y el canal AWGN. Calcula la probabilidad de error mínima para el sistema **b** a partir del dato anterior y de los parámetros geométricos **l** y θ.

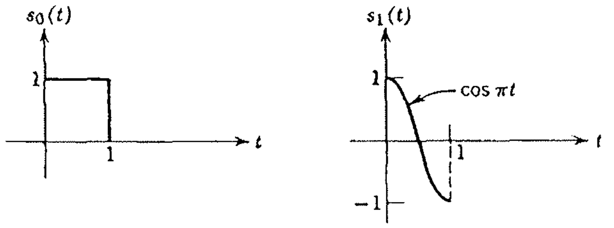


(a) *(b)*

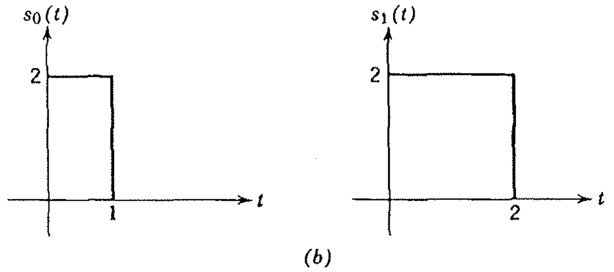
3. Calcula la probabilidad de error mínima que se puede conseguir con las constelaciones de señales equiprobables de la figura si se transmite por un canal AWGN con densidad espectral de ruido de $N_0/2$ W/Hz.



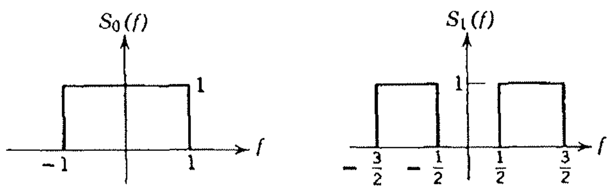
4. Calcula la probabilidad de error mínima para las constelaciones de señales equiprobables de la figura si se transmite la información por un canal AWGN con densidad espectral de ruido de $N_0/2$ W/Hz.



(a)



(b)



[$S_i(f)$, the Fourier transform of $s_i(t)$, is pure real.]

(c)

5. Un sistema de comunicaciones emplea N señales definidas en $0 \leq t \leq T$ para transmitir N mensajes por un canal perturbado por ruido aditivo, gaussiano y blanco (canal AWGN). Las N señales tienen la peculiaridad de ser idénticas entre sí en el subintervalo $t_1 \leq t \leq t_2$.

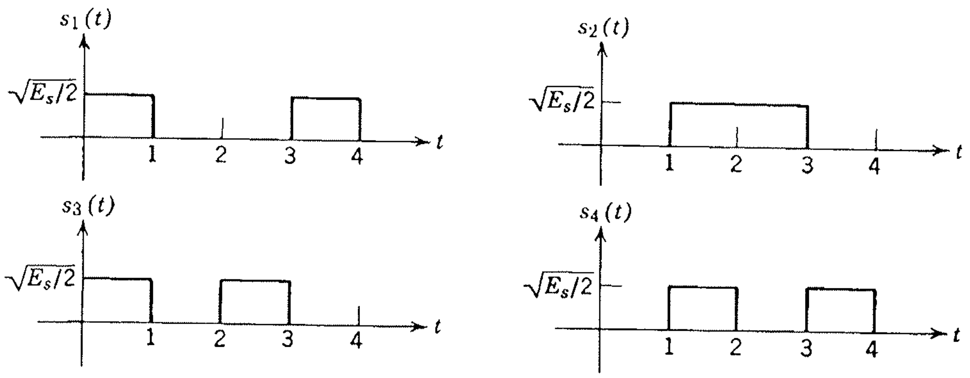
a) Demuestra que un receptor óptimo puede ignorar el subintervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ sin dejar de ser óptimo.

b) ¿Seguiría siendo cierto lo anterior si el ruido no fuese blanco?

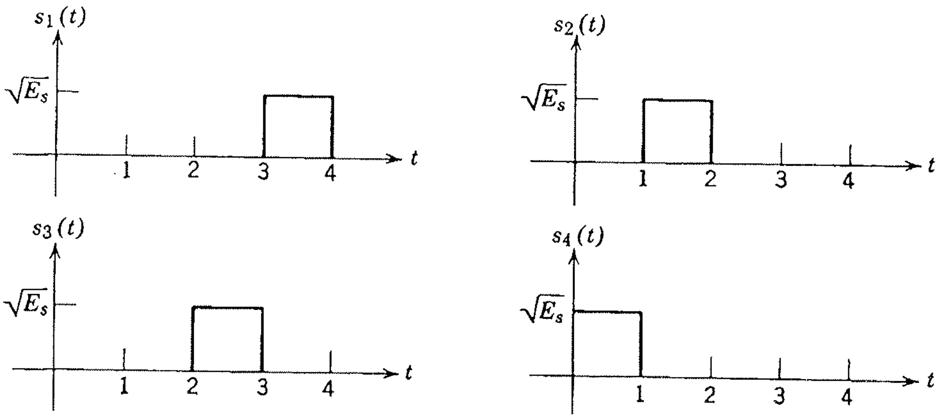
6. Se va a emplear uno de los dos conjuntos de señales de la figura para la transmisión digital por un canal AWGN. En ambos casos los mensajes son equiprobables.

a) Demuestra que los dos grupos de señales emplean la misma energía.

b) Demuestra que el conjunto de la figura **b** emplea la energía de una manera casi 3 dB más eficiente en caso de que se requiera una baja probabilidad de error.



(a)



(b)

7. A través de un canal perturbado por un ruido aditivo, gaussiano y blanco (canal AWGN) se pretende enviar uno de cuatro posibles mensajes equiprobables por medio de las correspondientes señales:

$s_1(t)= \cos(\omega_0 t) + \sin(4\omega_0 t)$
$s_2(t)= \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t)$
$s_3(t)= \cos(\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) + \sin(4\omega_0 t)$
$s_4(t)= \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t)$,, $\omega_0=2\pi f_0$, y f_0T= entero y grande

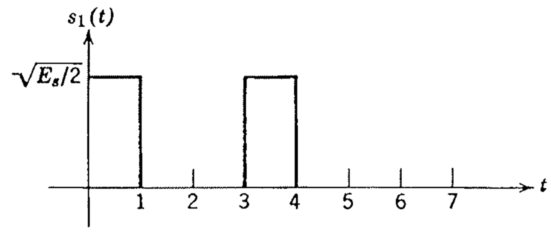
El canal tiene una respuesta pasobajo ideal ($h(t) = 6f_0\mathrm{sinc}[6f_0t]$), y la densidad espectral del ruido es de $N_0/2$ W/Hz. Partiendo de estas premisas se pide:

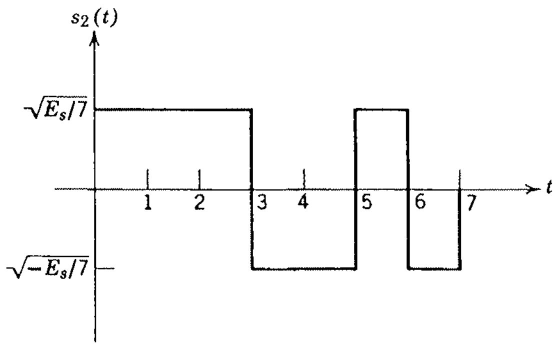
a) construir un receptor óptimo de complejidad mínima para el anterior sistema, comentando los efectos de la limitación de banda;
b) la regla de decisión del anterior receptor;
c) calcular la p_e mínima;
d) proponer una constelación a partir de la original que haga un uso óptimo de la energía manteniendo las prestaciones.

8. Especifica el filtro adaptado a cada una de las señales de la figura.

a) Dibuja la salida de los mismos en función del tiempo cuando a su entrada se inyectan las señales a que están adaptados.

b) Repetir la operación si a cada filtro adaptado se le inyecta la señal correspondiente al otro filtro.





PROBLEMAS TEMA 3

1- $R = 1\ \Omega$

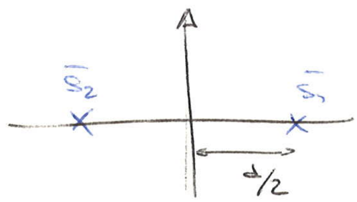
$$\int_0^T x^2(\tau)\,d\tau = \int_0^T y^2(\tau)\,d\tau = 16\ J$$

$$\int_0^T x(\tau)\,y(\tau)\,d\tau = 0$$

$N_0/2 = 4\ W/Hz$

Equienergéticas e incorreladas (forman una base) $\Rightarrow$ ortogonales

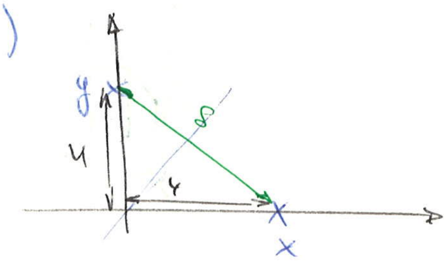
1.a) $x(t)$, $-x(t)$



$$E = \frac{d^2}{2^2} = 16 \Rightarrow d = 8$$

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(2)}$$

1.b)

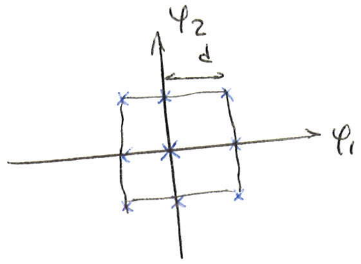


$\delta = 4\sqrt{2}$

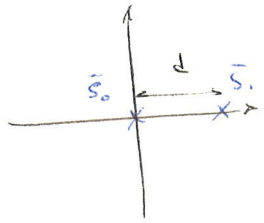
$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{\delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(\sqrt{2})}$$

2

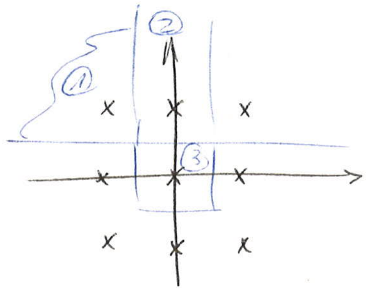
2 - $P_e = q$



No se modifican las prestaciones con rotaciones y desplazamientos



$$q = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$



$$P_{e①} = 2Q - Q^2 = 2q - q^2$$

$$P_{e②} = 3Q - 2Q^2 = 3q - 2q^2$$

$$P_{e③} = 4(Q - Q^2) = 4(q - q^2)$$

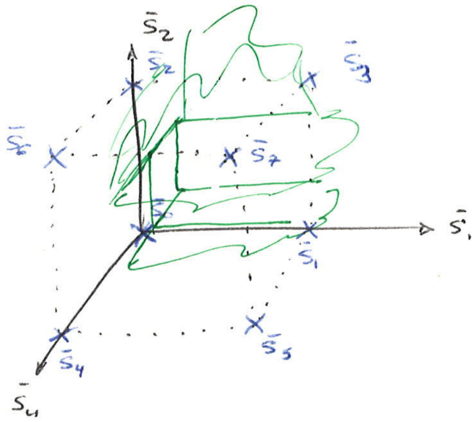
$$\boxed{P_e = \frac{1}{9}\left(4(2q - q^2) + 4(3q - 2q^2) + 4(q - q^2)\right)}$$

$$= \boxed{\frac{24}{9}q - \frac{16}{9}q^2}$$

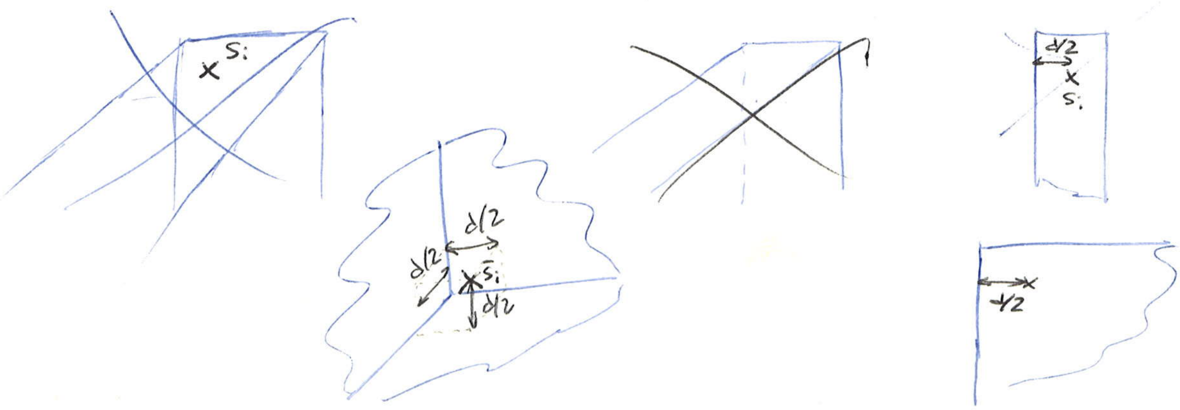
3 - Señales equiprobables.

$N_0/2$ W/Hz

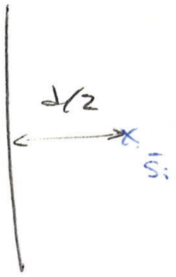
Base: $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_4$



Regiones de decisión:



Para cada una de las coordenadas:



$$\rightsquigarrow p_{e_1} = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$p_{c_1} = 1 - p_{e_1}$$

Para todos $p_c = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot p_{c_3} = \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^3$

$d/2 = 1/2$

$$p_e = 1 - p_c = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^3$$

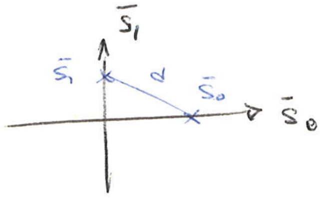
$$\boxed{p_e = Q^3\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + 3\,Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 3Q^2\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)}$$

4-

a) Ortogonales: $\int_0^1 s_0(t) \cdot s_1(t)\, dt = 0$

$E_0 = 1$

$E_1 = 1/2$



$$p_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$d = \sqrt{3/2}$

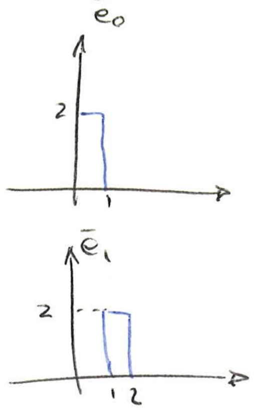
$$\boxed{p_e = Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{N_0}}\right)}$$

b) Base: $\bar{e}_1 = \bar{s}_0$

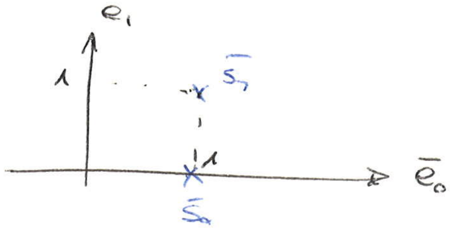
$\bar{e}_2 = \bar{s}_1 - \bar{s}_0$

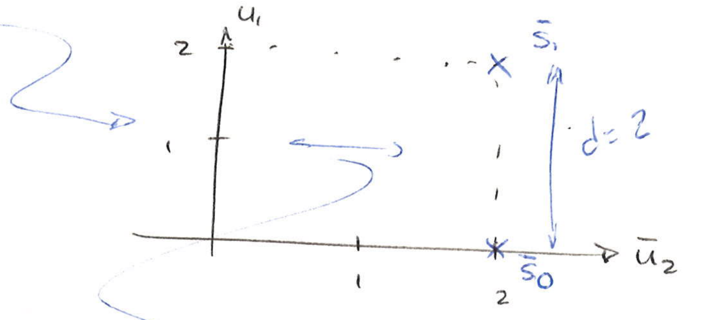
$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|} = \frac{\bar{s}_0}{2}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_0}{2}$$



$\bar{s}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$



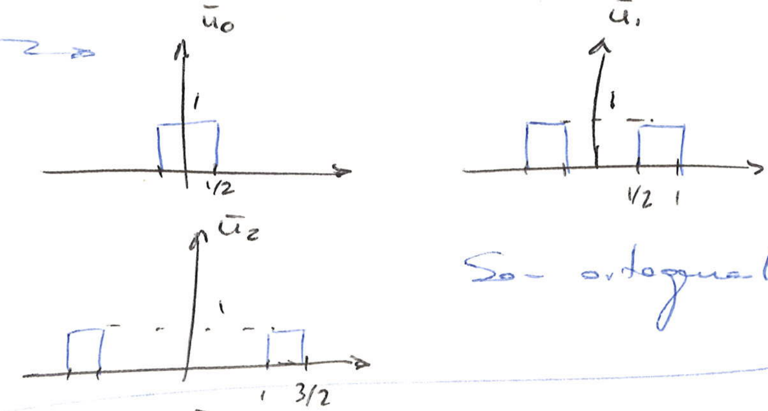


coordenada irrelevante

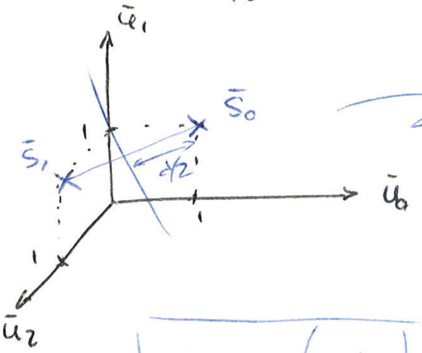
$$\boxed{p_e = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)}$$

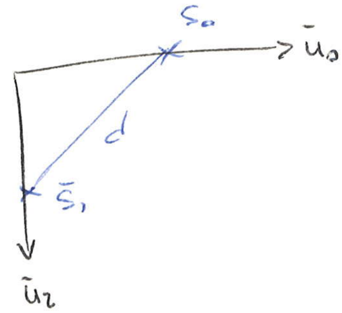
c) Señales en el dominio de la frecuencia:

Base →



Son ortogonales





$d/2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ → $\boxed{p_e = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)}$

5- N señales, $0 \leq t \leq T$

AWGN

Señales idénticas en $t_1 \leq t \leq t_2$

a) Receptor óptimo

$\longrightarrow$ MAP

$$\hat{m} = \max_i \left(\int_0^T r(\tau) s_i(\tau) d\tau - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right) =$$

$$= \max_i \left(\int_0^{t_1} r(\tau) s_i(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} r(\tau) s_i(\tau) d\tau + \int_{t_2}^{T} r(\tau) s_i(\tau) d\tau - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$\Rightarrow$ es un valor constante $\forall i$, por lo que no afecta al máximo $\Rightarrow$ irrelevante

b) Ruido no blanco $\Rightarrow$ filtro blanqueador

$$s_i'(t) = s_i(t) * g(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t-\tau) g(\tau) d\tau \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

$\Rightarrow$ Hace falta conocer $s_i(t)$ fuera de (t_1, t_2) para dicho intervalo, por lo que no será igual para todas las señales

En general NO es cierto.

6 -

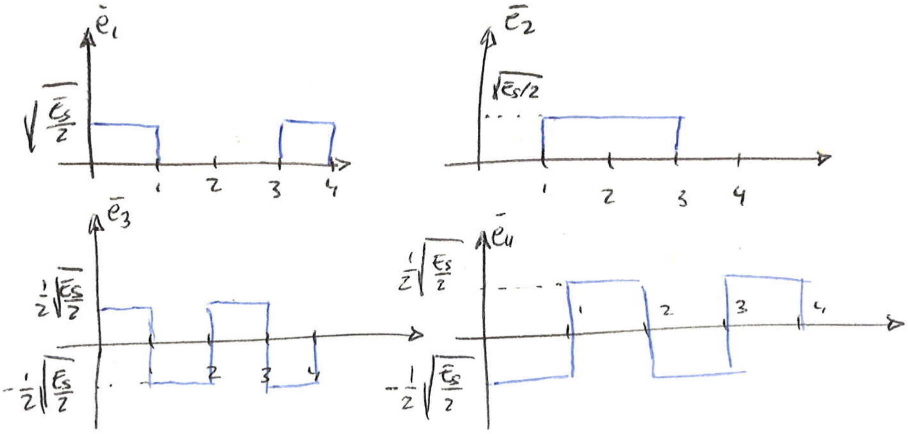
a) Ambos grupos de señales equienergéticos y energía $\bar{E}_s$:

$$\boxed{E_a = \sum_i E_i \cdot p_i = E_i = \frac{E_s}{2} \cdot 2 = E_s}$$

$$\boxed{E_b = \sum_i E_i \cdot p_i = E_i = E_s}$$

b) Base de (a):

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{s}_1 & \lambda_{21} = -\dfrac{(\bar{s}_2, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = 0 \\ \bar{e}_2 = \bar{s}_2 + \lambda_{21} \bar{e}_1 = \bar{s}_2 \\ \bar{e}_3 = \bar{s}_3 + \lambda_{32} \bar{e}_2 + \lambda_{31} \bar{e}_1 = \bar{s}_3 - \frac{1}{2} \bar{s}_2 - \frac{1}{2} \bar{s}_1 \\ \bar{e}_4 = \bar{s}_4 + \lambda_{43} \bar{e}_3 + \lambda_{42} \bar{e}_2 + \lambda_{41} \bar{e}_1 = \bar{s}_4 + 0 - \frac{1}{2} \bar{s}_2 - \frac{1}{2} \bar{s}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{s}_1 = \bar{e}_1 \\ \bar{s}_2 = \bar{e}_2 \\ \bar{s}_3 = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{s}_4 = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \end{cases}$$

$\bar{u}_1 = \dots$

$\bar{u}_2 = \dots$

$\bar{u}_3 = \dots$

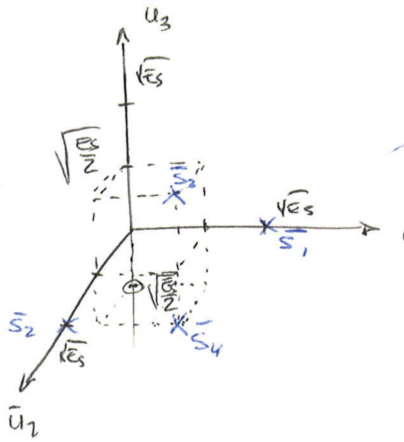
$\bar{u}_4 = \dots$

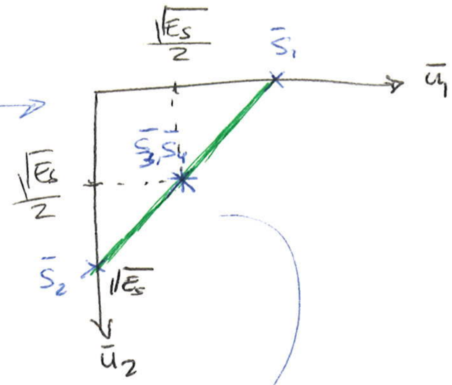
$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{E_s}$ $\quad \|\bar{e}_3\| = \sqrt{\frac{E_s}{2}}$

$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{E_s}$ $\quad \|\bar{e}_4\| = \sqrt{\frac{E_s}{2}}$

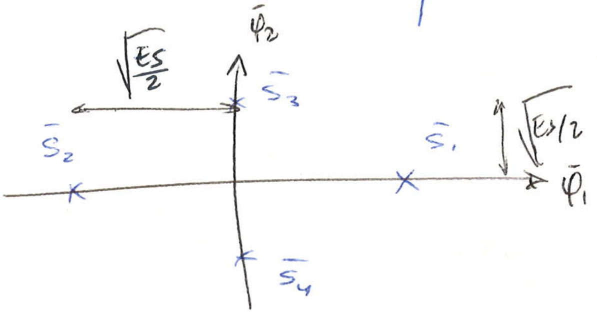
$$\begin{cases} \bar{s}_1 = \sqrt{E_s} \cdot \bar{u}_1 \\ \bar{s}_2 = \sqrt{E_s} \cdot \bar{u}_2 \\ \bar{s}_3 = \frac{\sqrt{E_s}}{2} \bar{u}_1 + \frac{\sqrt{E_s}}{2} \bar{u}_2 + \sqrt{\frac{E_s}{2}} \bar{u}_3 \\ \bar{s}_4 = \frac{\sqrt{E_s}}{2} \bar{u}_1 + \frac{\sqrt{E_s}}{2} \bar{u}_2 - \sqrt{\frac{E_s}{2}} \bar{u}_3 \end{cases}$$

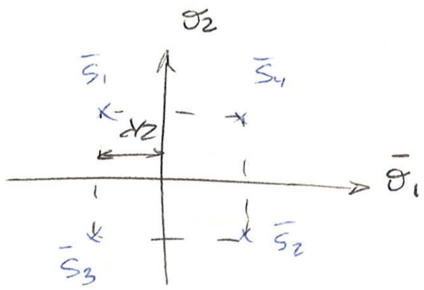
$\bar{u}_4$ no afecta ($\bar{u}_4 = -\bar{u}_3$)





⇒ Son coplanares

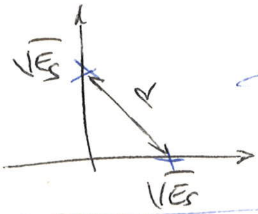




$d/2 = \sqrt{E_s}/2 \Rightarrow \boxed{P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)}$

Base de (b): el propio conjunto forma una base ortogonal.

Cota: $P_e \leq (M-1)\, p_e \quad (M=2)$



$d = \sqrt{2E_s}$

$p_e(M=2) = Q\left(\frac{\frac{\sqrt{2E_s}}{2}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$

$$\boxed{P_e \leq 3 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

SNR ↑↑ ⇒ $P_{e(a)} \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \longrightarrow P_{e(a)} \simeq P_{e(b)} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_{s(a)}}{2N_0}} = \sqrt{\frac{E_{s(b)}}{N_0}}$

$\Rightarrow E_{s(a)} = 2E_{s(b)}$

⇒ Necesita aprox. 3dB más.

7- Canal AWGN, $h(t) = 6 f_0 \operatorname{sinc} 6 f_0 t$

$S_n(f) = N_0/2 \ W/Hz$

$s_1(t) = \cos w_0 t + \operatorname{sen} 4 w_0 t$

$s_2(t) = \cos w_0 t + \cos 2 w_0 t + \operatorname{sen} 2 w_0 t$

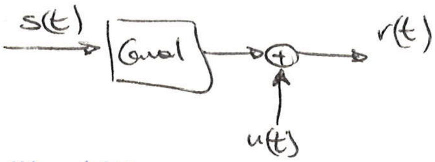
$s_3(t) = \cos w_0 t + \operatorname{sen} 2 w_0 t + \operatorname{sen} 4 w_0 t$

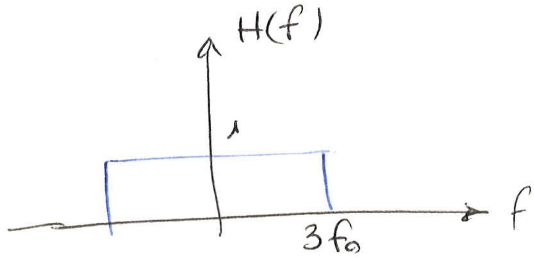
$s_4(t) = \cos w_0 t + \cos 2 w_0 t + \cos 4 w_0 t$

$w_0 = 2\pi f_0$

$f_0 T$ = entero y grande

a) Receptor óptimo





$s_i'(t) = s_i(t) * h(t)$

$$\begin{cases} s_1'(t) = \cos w_0 t \\ s_2'(t) = \cos w_0 t + \cos 2 w_0 t + \operatorname{sen} 2 w_0 t \\ s_3'(t) = \cos w_0 t + \operatorname{sen} 2 w_0 t \\ s_4'(t) = \cos w_0 t + \cos 2 w_0 t \end{cases}$$

$\cos w_0 t$ es irrelevante:

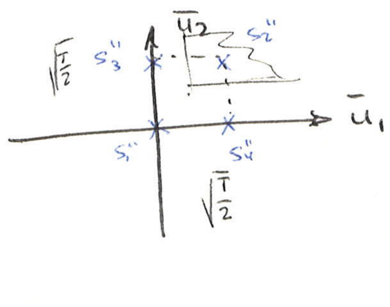
$$\begin{cases} s_1''(t) = 0 \\ s_2''(t) = \cos 2 w_0 t + \operatorname{sen} 2 w_0 t \\ s_3''(t) = \operatorname{sen} 2 w_0 t \\ s_4''(t) = \cos 2 w_0 t \end{cases}$$

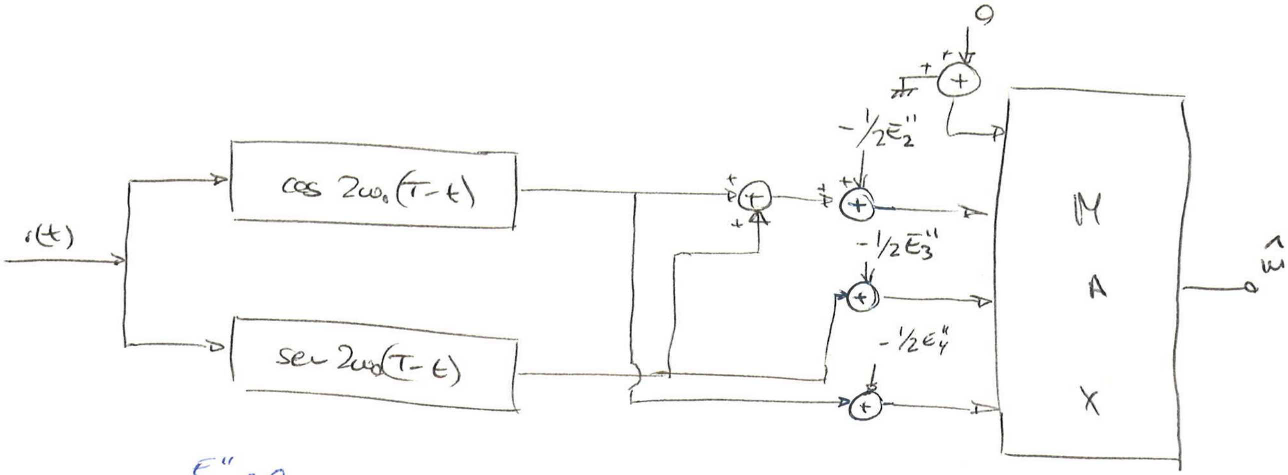
→ base: $\cos 2 w_0 t$, $\operatorname{sen} 2 w_0 t$

Ortogonal

$\bar{u}_1 = \cos 2 w_0 t \cdot \sqrt{\frac{2}{T}}$

$\bar{u}_2 = \operatorname{sen} 2 w_0 t \cdot \sqrt{\frac{2}{T}}$



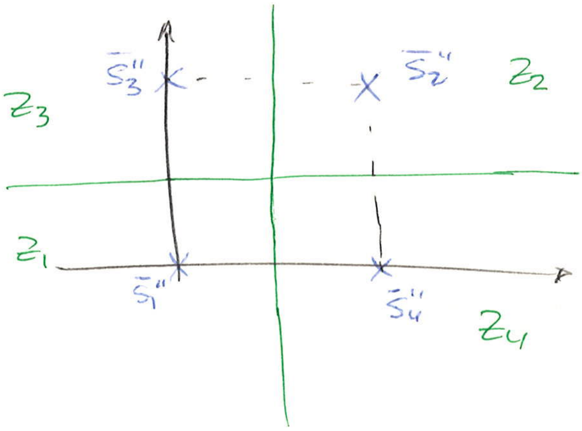


$E''_1 = 0$

$E''_2 = T$

$E''_3 = E''_4 = T/2$

b) Regla de decision

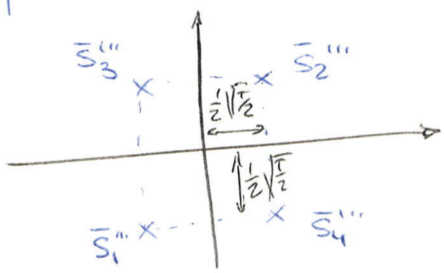


c) Pe mínima:

$$d = \sqrt{T/2} \Rightarrow \boxed{Pe = 2Q\left(\frac{\sqrt{T}/2\sqrt{2}}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{\sqrt{T}/2\sqrt{2}}{\sqrt{N_0/2}}\right)}$$

$$\boxed{Pe = 2\,Q\left(\sqrt{\frac{T}{4N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{T}{4N_0}}\right)}$$

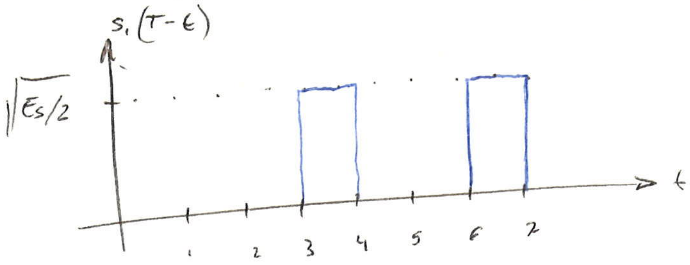
d) Uso óptimo $\Rightarrow \bar{s}_c = 0$:

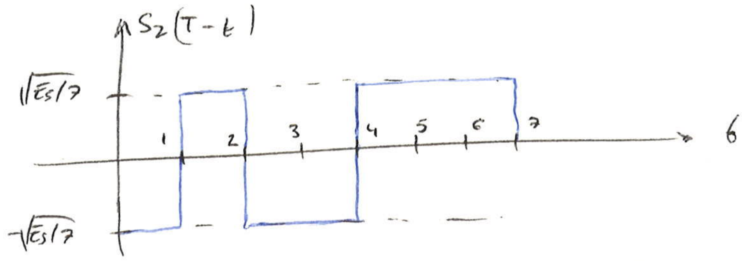


10.

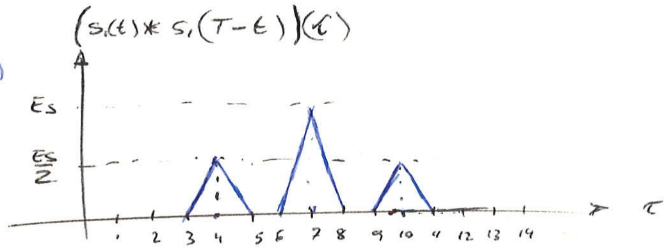
8 - $\begin{cases} s_1(t) \longrightarrow s_1(T-t) \\ s_2(t) \longrightarrow s_2(T-t) \end{cases}$

$T = 7$



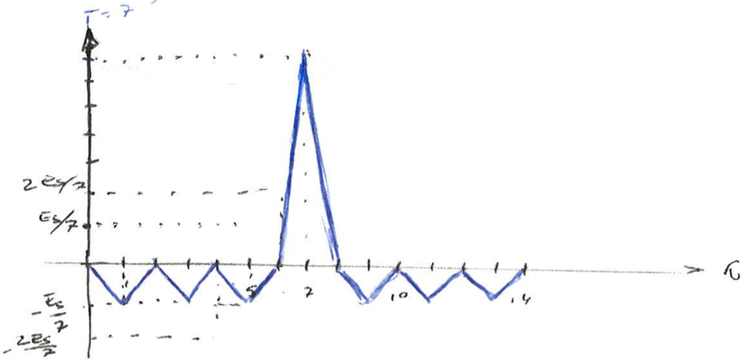


a)



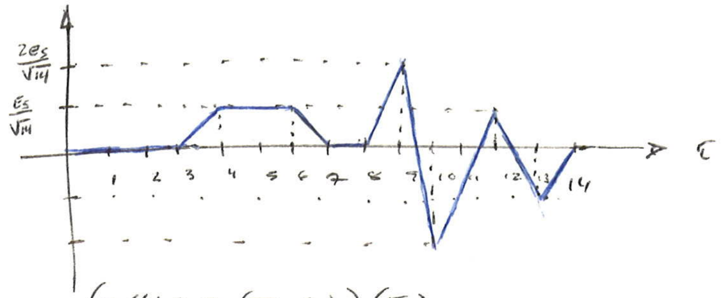
$s_1(t) * s_1(T-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau - t) \cdot s_1(7-t)\, dt$

T=7

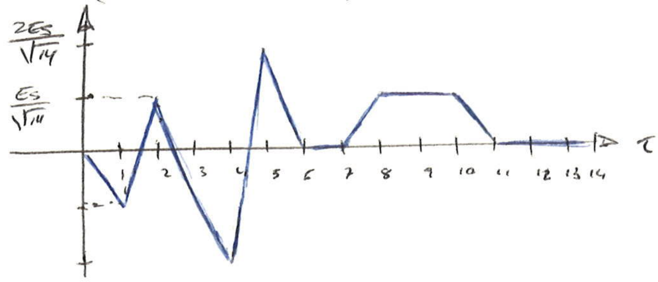


b)

$(s_2(t) * s_1(T-t))\,\tau$



$(s_1(t) * s_2(T-t))(\tau)$



(60) 3º TEL. SUP. 0,06€

COMUNICACIONES DIGITALES

PROBLEMAS PROPUESTOS

Tema IV. Transmisión digital pasobanda
Tema V. Canales variables

1. ¿Puede formarse una señal ASK sobre una portadora de 1 MHz mediante la mezcla (multiplicación) de la información (banda de base) con una onda periódica triangular de 500 kHz? ¿Y de 200 kHz?

2.a) Diseñar un receptor óptimo de complejidad mínima para un sistema de trasmisión digital binario que emplea las señales:

$$s_0(t) = 0 \qquad s_1(t) = \sin(1000t + \theta)$$

para transmitir por un canal AWGN, siendo $p_0 = 1/4$.

b) Hallar la probabilidad de error si $N_0/2 = 10^{-3}$ W/Hz y R = 100 bps.

c) ¿Cual sería el ancho de banda de primer nulo?

3. Diseñar un receptor de complejidad mínima para señales PSK que se transmiten por un canal AWGN:

$$s_1(t) = \sin(\omega t) \qquad s_2(t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$s_3(t) = \sin(\omega t + \pi) \qquad s_4(t) = \sin(\omega t + \frac{3\pi}{2})$$

donde $\omega T = 2\pi k$, donde k es un entero

Lo mismo para la constelación FSK:

$$s_1(t) = \sin(\omega_1 t) \qquad s_2(t) = \sin(\omega_2 t)$$

$$s_3(t) = \sin(\omega_3 t) \qquad s_4(t) = \sin(\omega_4 t)$$

donde igualmente $\omega_i T = 2\pi k$

a) ¿Qué ocurre en el caso de la constelación PSK si el receptor presenta un error de sincronismo del orden de 10 o 20 μs?

b) Idem para el caso FSK, donde $f_1 = 700$ Hz, $f_2 = 800$ Hz, $f_3 = 900$ Hz y $f_4 = 1$ kHz, con T = 1s.

c) ¿Cómo se podría intentar solventar el problema del error de sincronismo?

4. Se transmite uno de dos mensajes equiprobables por un canal AWGN mediante dos señales:

$$s_1(t) = \cos(\omega t) \qquad\qquad s_2(t) = \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$$

con T= 1 ms, f= 1 MHz y Δf= 250 Hz. El ruido tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2$ tal que $E/N_0=6$. Calcular la probabilidad de error. Lo mismo si Δf= 500 Hz.

5. Para enviar uno de tres símbolos equiprobables se dispone de un transmisor capaz de generar las formas de onda $s_1(t)$, $s_2(t)$, y $s_3(t)$, relacionadas según:

$$(s_1,s_1) = (s_2,s_2) = (s_3,s_3) = E \qquad (s_1,s_2) = (s_3,s_2) = 0 \qquad (s_1,s_3) = -E$$

donde el paréntesis indica, como es habitual, el producto escalar de señales. El canal dificulta la comunicación añadiendo ruido gaussiano y blanco (canal AWGN), con densidad de $N_0/2$ W/Hz.

a) Acota las prestaciones de un receptor óptimo para esa constelación.

b) Determina si el mismo sistema sería operativo en condiciones de desvanecimiento, en las que pretendiésemos obtener una tasa de error inferior a 10^{-4}. La f.d.p. que presenta la atenuación α es:

$$p_\alpha(\alpha) = 5e^{-5\alpha}\ ,, \quad \alpha \geq 0$$

{Nota: $Q[0.2(E/N_0)^{1/2}]= 0.001$}

6. Se pretende transmitir señales en banda base por un canal que presenta desvanecimientos, de manera que a una cierta s(t) enviada le correspondería:

$$r(t) = as(t) + n_W(t)$$

donde la función de densidad de probabilidad de la atenuación a es:

$$p_a(a) = 0.01\delta(a) + 0.09\delta(a-1) + 0.9\delta(a-2)$$

y $n_w(t)$ es un ruido gaussiano y blanco, cuya densidad espectral de potencia es de $N_0/2$ W/Hz. Se transmitirán dos mensajes antipodales y equiprobables de energía E_s cada uno.

a) ¿Cual es la energía media de la componente de señal de r(t)?
b) Calcula p_e.
c) ¿A qué valor tiende p_e cuando el cociente E_s/N_0 se hace arbitrariamente grande?

PROBLEMAS TEMAS 4 Y 5

1.- $f_c = 1\,MHz$

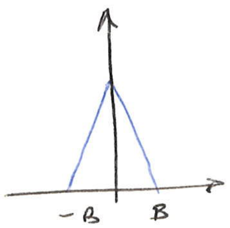
Señal triangular de $\begin{cases} 500\,kHz \\ 200\,kHz \end{cases}$

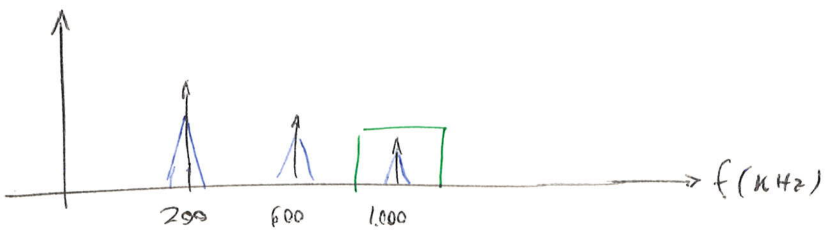
El desarrollo en series de Fourier de la señal triangular es proporcional a $(\cos n\pi - 1)$

$\Rightarrow$ n par $\Rightarrow$ $\cos n\pi - 1 = 0$

No tiene armónicos pares

Sobre la de 500 kHz no se puede, pero sí sobre la de 200 kHz, modulando con dicha señal triangular y filtrando la banda del 5º armónico, siempre que no haya solape:





$$\boxed{\Rightarrow 2B < 400\,kHz}$$

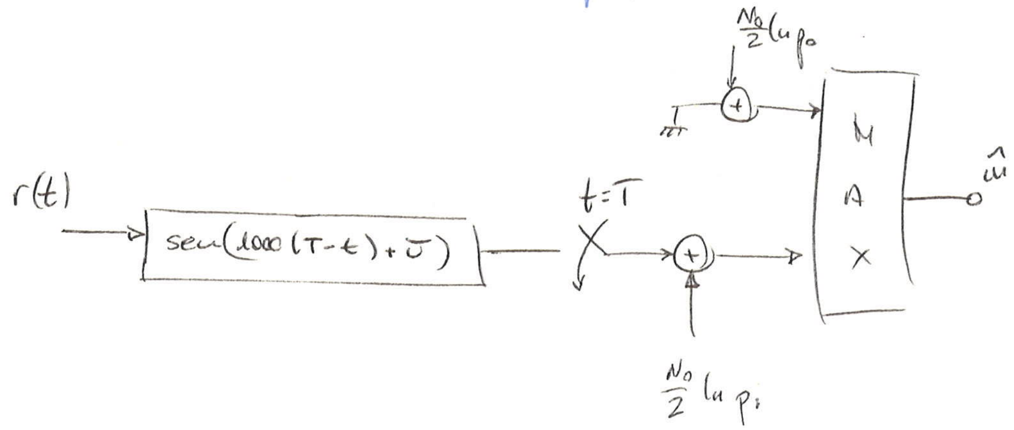
2 - $s_0(t) = 0$

$s_1(t) = \text{sen}(1000\,t + \theta)$

Canal AWGN

$p_0 = 1/4$

a) Receptor óptimo de complejidad mínima



b) $\frac{N_0}{2} = 10^{-3}$ W/Hz

$R_i = 100$ bps

$R = r \cdot H$; $H = p_0 \log_2 \frac{1}{p_0} + p_1 \log_2 \frac{1}{p_1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 0'415 =$

$= 0'81$

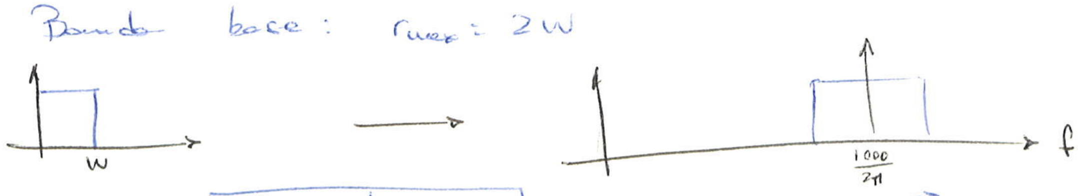
$r = \frac{100 \text{ bps}}{0'81 \text{ bits/símbolo}} = 123'46$ baudios

$r = 1/T \Rightarrow \boxed{T = 8'1 \cdot 10^{-3}}$

$\rightarrow E_1 = T/2 = \delta^2$

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{\delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(1'424)}$$

c) Banda base: $r_{max} = 2W$



$\boxed{B = 123'46 \text{ Hz}}$

$B = 2W$

3 - Canal AWGN

PSK $\begin{cases} s_1(t) = \text{sen}\, \omega t & s_2(t) = \text{sen}(\omega t + \pi/2) \\ s_3(t) = \text{sen}(\omega t + \pi) & s_4(t) = \text{sen}(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

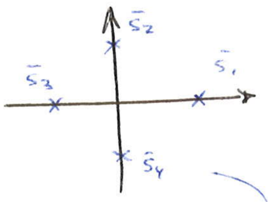
$\omega T = 2\pi k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

FSK $\begin{cases} s_1(t) = \text{sen}\, \omega_1 t & s_2(t) = \text{sen}\, \omega_2 t \\ s_3(t) = \text{sen}\, \omega_3 (t) & s_4(t) = \text{sen}\, \omega_4 t \end{cases}$

$\omega_i T = 2\pi K$

a) Error de sincronismo de 10 - 20 μs

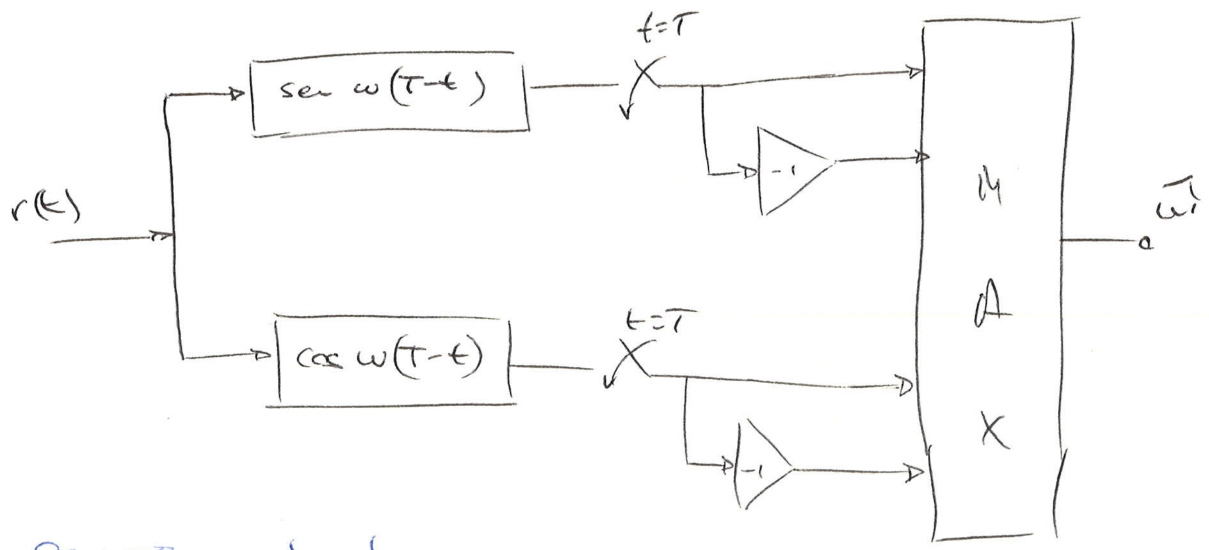
PSK:



$\bar{s}_i$ equiprobables y equienergéticas

$E_i = \frac{T}{2}$

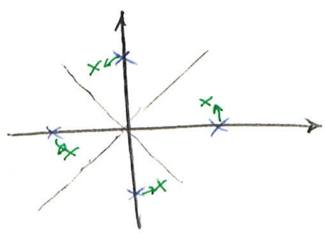
→ 2 filtros $\begin{cases} \text{seno} \\ \text{coseno} \end{cases}$



Pe → cuadrado

Error de sincronismo: $\Delta t \Rightarrow \Delta \vartheta = \omega \Delta t$

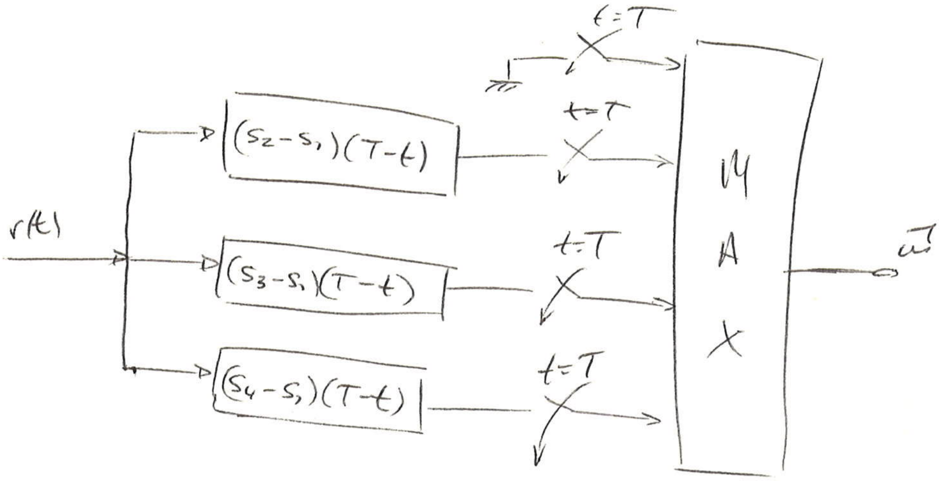
$\boxed{Pe \uparrow}$



b) $T = 1s$

$f_1 = 700\,Hz \quad f_2 = 800\,Hz \quad f_3 = 900\,Hz \quad f_4 = 1\,KHz$

3 filtros $\to$ $s_i(t) - s_1(t)$



$$\omega_1 \to \Delta\theta_1 = \omega_1 \cdot \Delta t = \begin{cases} 2\pi \cdot 7 \cdot 10^{-3}\,s \\ 2\pi \cdot 14 \cdot 10^{-3}\,s \end{cases}$$

$$\Delta\theta_2 = \omega_2 \Delta t = \begin{cases} 2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}\,s \\ 2\pi \cdot 16 \cdot 10^{-3}\,s \end{cases}$$

$$\Delta\theta_3 = \begin{cases} 2\pi \cdot 9 \cdot 10^{-3}\,s \\ 2\pi \cdot 18 \cdot 10^{-3}\,s \end{cases} \qquad \Delta\theta_4 = \begin{cases} 2\pi\, 10^{-2}\,s \\ 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,s \end{cases}$$

Idem, pe ↑

Ortogonalidad: $\Delta f \cdot T = k/2$

$100 \cdot 1 = k/2$ Sí

$\to$ Cambio el origen de tiempos para corregir la desviación $\Rightarrow$ siguen siendo ortogonales.

c) Mejorar el PLL o usar PSK diferencial.

4- $s_1(t) = \cos \omega t \qquad s_2(t) = \cos(\omega + \Delta\omega)t$

$T = 1\,ms$

$f = 1\,MHz \qquad E/N_0 = 6 \qquad$ (Canal AWGN)

$\Delta f_1 = 250\,Hz$

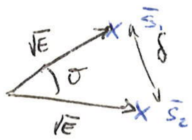
¿p_e?

Ortogonalidad: $\Delta f \cdot T = n/2$

$\Delta f_1 \cdot T = 0'25 \rightarrow$ no es ortogonal

Son señales equienergéticas y equiprobables:

$$p_e = Q\left(\frac{\delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$



$$\delta^2 = E + E - 2E\cos\vartheta = 2E(1 - \cos\vartheta)$$

$$\vartheta \rightarrow (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \|\bar{s}_1\| \cdot \|\bar{s}_2\| \cdot \cos\vartheta$$
$$= \frac{T}{2} \cdot \cos\vartheta$$

$$\int_0^T \cos\omega t \cdot \cos(\omega + \Delta\omega)t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\cos(2\omega + \Delta\omega)t + \cos\Delta\omega t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\operatorname{sen}(2\omega + \Delta\omega)t}{2\omega + \Delta\omega}\right]_0^T + \left[\frac{\operatorname{sen}\Delta\omega t}{\Delta\omega}\right]_0^T\right) =$$

$0 \leftarrow \operatorname{sen}(2\omega + \Delta\omega)t << 2\omega + \Delta\omega$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\Delta\omega T}{\Delta\omega} = \frac{T}{2}\frac{\operatorname{sen}\Delta\omega T}{\Delta\omega T} = \frac{T}{2}\operatorname{sinc} 2\Delta f T$$

$$\rightarrow \frac{T}{2}\cos\vartheta = \frac{T}{2}\operatorname{sinc} 2\Delta f T \Rightarrow \boxed{\cos\vartheta = \operatorname{sinc} 2\Delta f T = \operatorname{sinc} 1/2 = 2/\pi}$$

$$\delta^2 = T(1 - 2/\pi) \Rightarrow p_e = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E(1 - 2/\pi)}{N_0/2}}\right)$$
$$= 2E(1 - 2/\pi)$$

$E/N_0 = 6 \Rightarrow \boxed{p_e = Q\left(\sqrt{6\cdot\left(1-2/\pi\right)}\right) = Q(1'48)}$

$\Delta f_2 = 500\,Hz$:

$\Delta f_2 \cdot T = 0'5 = k/2 \rightarrow$ ortogonales

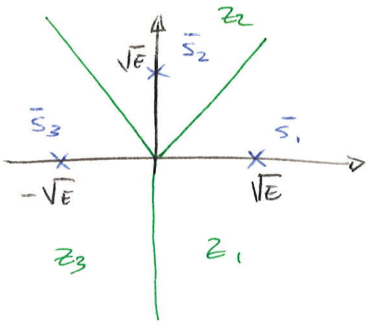
$\Rightarrow \delta = \sqrt{2E}$; $\boxed{p_e = Q\left(\sqrt{\frac{E/2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{6}\right) = Q(2'45)}$

5- $s_1(t),\ s_2(t),\ s_3(t)$

$(\bar{s}_1, \bar{s}_1) = (\bar{s}_2, \bar{s}_2) = (\bar{s}_3, \bar{s}_3) = E$ Equienergéticas

$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = (\bar{s}_3, \bar{s}_2) = 0$ ortogonales

$(\bar{s}_1, \bar{s}_3) = -E$



Canal AWGN $N_0/2$ W/Hz

a) Acotar pe: Arthurs-Dym:

$$Q\left(\frac{\bar{\delta}}{\sqrt{2N_0}}\right) \le p_e \le (M-1)\cdot Q\left(\frac{\delta^*}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\delta} = \sqrt{2E} \\ \delta^* = \sqrt{2E}\end{array}\right\} \quad \boxed{Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \le p_e \le 2\,Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)}$$

b) Desvanecimiento: $p_\alpha(\alpha) = 5e^{-\alpha}$ $\quad \alpha \geq 0$

$p_e < 10^{-4}$

$p(e/\alpha)$ cóncava $\Rightarrow p_e = \overline{p(e/\alpha)} = p(e/\bar{\alpha})$

$$\bar{\alpha} = \int 5\alpha e^{-5\alpha}\, d\alpha = \ldots = \frac{1}{5} = 0'2$$

Nuevas distancias: $\bar{\delta} = \bar{\alpha}\sqrt{2E}$

$\delta^* = \alpha\sqrt{2E}$

$$Q\left(\frac{\bar{\alpha}\sqrt{2E}}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq p_e \longrightarrow p_e \geq Q\left(0'2\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = 0'001 = 10^{-3}$$

No es operativo

6- Canal con desvanecimientos

$$r(t) = a\cdot s(t) + n_w(t)$$

$$p_a(a) = 0'01\,\delta(a) + 0'09\,\delta(a-1) + 0'9\,\delta(a-2)$$

$n_w(t)$ AWGN, $N_0/2$ W/Hz

Mensajes antipodales y equiprobables, Es

a) $\boxed{E = \sum_i p_i \cdot E_i(a) = a^2\cdot E_s}$

Media de $a^2 \Rightarrow \bar{E} = \overline{a^2\cdot E_s} = \overline{a^2}\cdot E_s \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{E} = (0'01\cdot 0 + 0'09\cdot 1 + 0'9\cdot 4)E_s = 3'69\cdot E_s}$$

b) $P_e = \overline{p(e/a_i)} = p_0 \cdot p(e/a=0) + p_1 \cdot p(e/a=1) + p_2 \cdot p(e/a=2)$

$p(e/a=0) = 1/2 \rightarrow$ elegir al azar

$p(e/a=1) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$

$p(e/a=2) = Q\left(\sqrt{\frac{8E_s}{N_0}}\right)$

$$\boxed{P_e = 0'005 + 0'09 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) + 0'9 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{8E_s}{N_0}}\right)}$$

c) $E_s/N_0 \uparrow\uparrow \Rightarrow Q(\dots) \rightarrow 0$

$$\boxed{P_e \rightarrow 0'005}$$