

APROBADO

4 / IX / 2002

Apuntes de Comunicaciones Digitales
3º ETSI Telecomunicación
(Universidad de Málaga)

Carlos García Argos (garcia@ieee.org)
<http://www.telecos-malaga.com>

Curso 2001/2002

INDICE

TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DIGITAL

- 1.1- Modelo de sistema de transmisión digital
- 1.2- Fundamentos de teoría de la información
- 1.3- Transmisión en canales limitados en banda
- 1.4- Codificación de fuente
- 1.5- Codificación de canal
- 1.6- Codificación de línea
- 1.7- Igualación. Filtro transversal

TEMA 2: TEORÍA DE LA DECISIÓN

- 2.1- Introducción
- 2.2- Teoría de la decisión. Test de hipótesis
- 2.3- Criterios de decisión
- 2.4- Suficiencia e irrelevancia estadística. "Optimalidad"

TEMA 3: TRANSMISIÓN DIGITAL EN LA BANDA DE BASE

- 3.1- Introducción
- 3.2- Determinación del receptor óptimo: filtro adaptado
- 3.3- Representación vectorial: canal vector
- 3.4- Prestaciones
- 3.5- Modelos especiales

TEMA 4: SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DIGITAL PASO BANDA

- 4.1- Introducción
- 4.2- Planteamiento general
- 4.3- Técnicas de modulación digital
- 4.4- Prestaciones

TEMA 5: CANALES VARIABLES

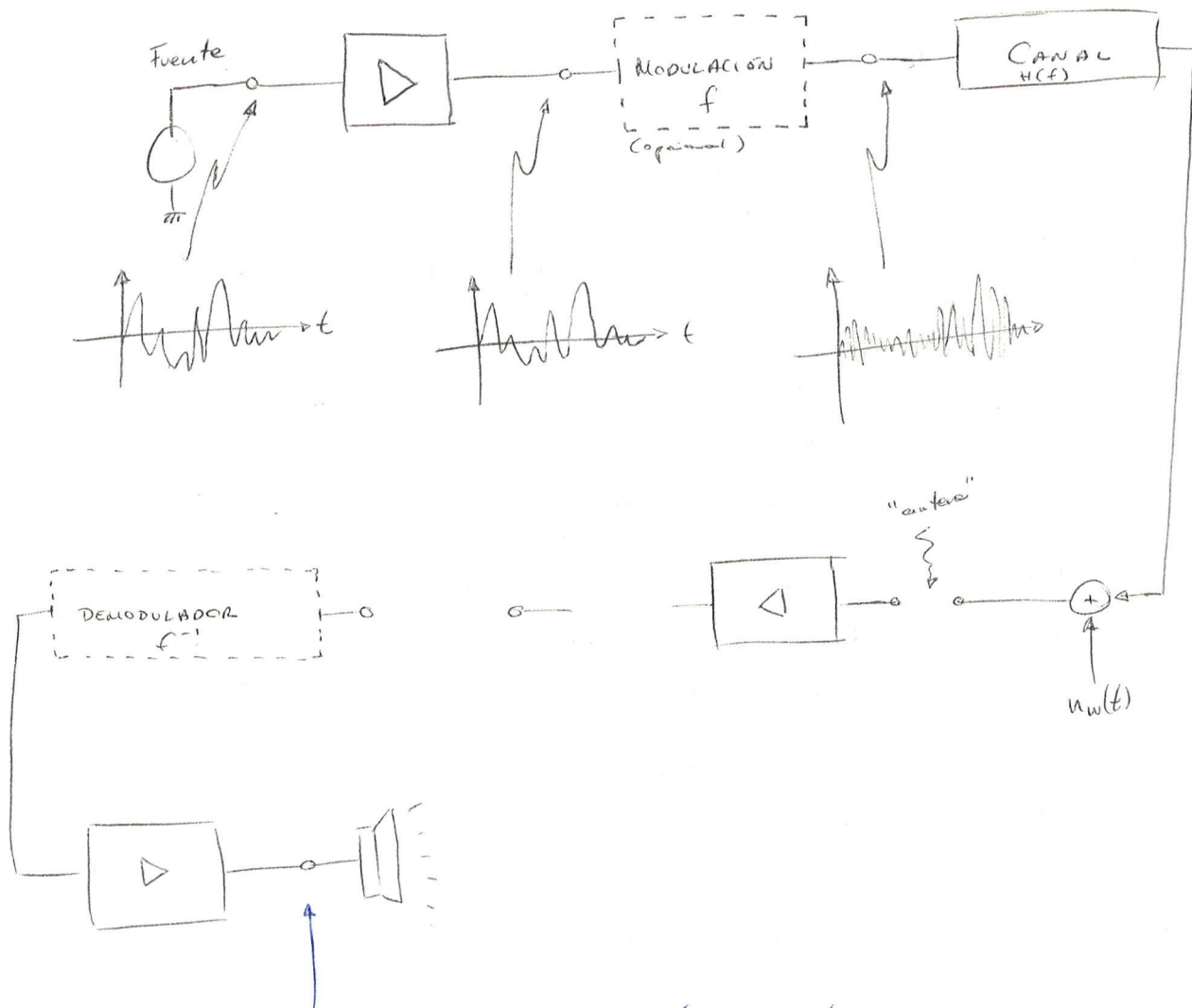
- 5.1- Planteamiento general
- 5.2- Canales con amplitud aleatoria
- 5.3- Canales con fase aleatoria
- 5.4- Canales con desvanecimientos

TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DIGITAL

- 1.1- MODELO DE SISTEMA DE TRANSMISIÓN DIGITAL
 - 1.2- RUDIMENTOS DE TEORÍA DE LA INFORMACIÓN
 - 1.2.1- Generalidades
 - 1.2.2- Entropía
 - 1.2.3- Capacidad. Límite de Shannon
 - 1.3- TRANSMISIÓN EN CANALES LIMITADOS EN BANDA
 - 1.3.1- Criterio de Nyquist
 - 1.3.2- Diagrama de ojos
 - 1.4- CODIFICACIÓN DE FUENTE
 - 1.4.1- Fuente analógica
 - 1.4.2- Codificación entrópica de una fuente digital
 - 1.5- CODIFICACIÓN DE CANAL
 - 1.5.1- Codificación de bloques
 - 1.5.2- Codificador convolucional
 - 1.5.3- Codificador en rejilla (Trellis)
 - 1.6- CODIFICACIÓN DE LÍNEA
 - 1.7- IGUALACIÓN. FILTRO TRANSVERSAL
-

1.1- MODELO DE SISTEMA DE TRANSMISIÓN DIGITAL

Sistema de transmisión analógico:



la versión recuperada nunca es la original
porque tenemos ruidos siempre.

Además hay:

- distorsión lineal
- distorsión no lineal
- atenuación
- interferencia
- modulaciones espúreas (productos de intermodulación)

CALIDAD:

- SNR
- BW
- distorsión no lineal

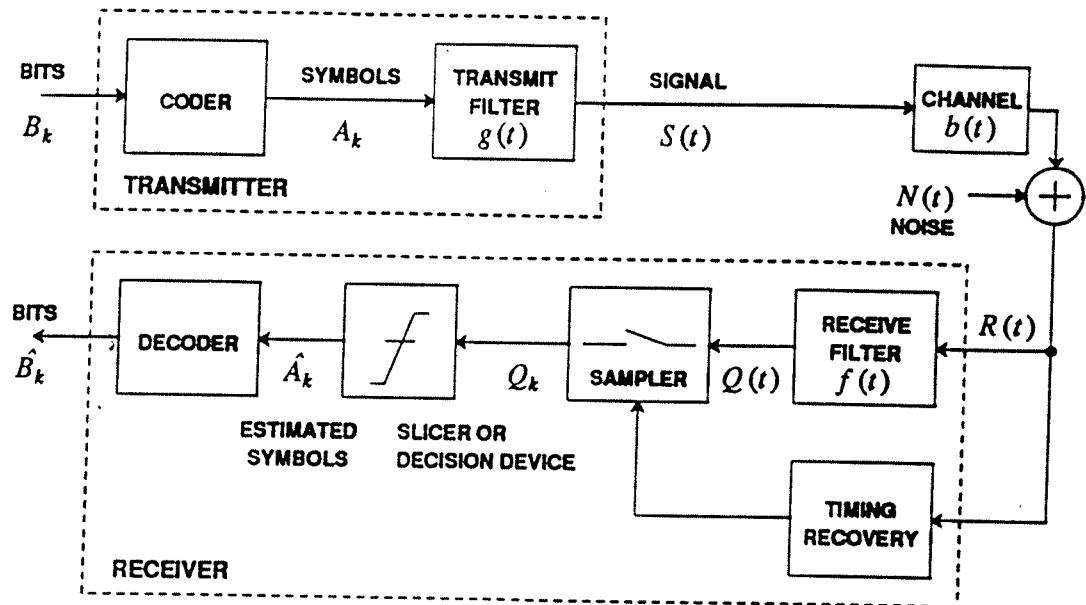


Figure 6-1. A baseband digital communication system, showing transmit coder, transmit filter, channel, receive filter, sampler and timing recovery, decision, and decoder.

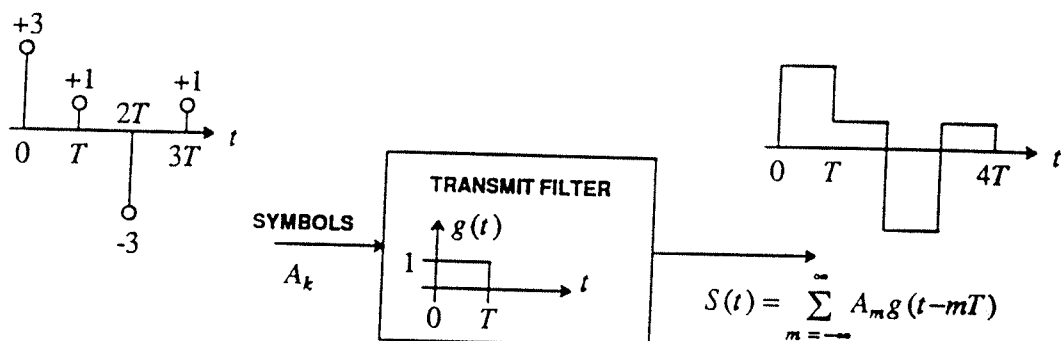


Figure 6-2. A transmit filter with a rectangular impulse response. The baud rate is $1/T$ symbols per second. A sample symbol sequence (with alphabet size of four) and corresponding continuous-time signal are also shown.

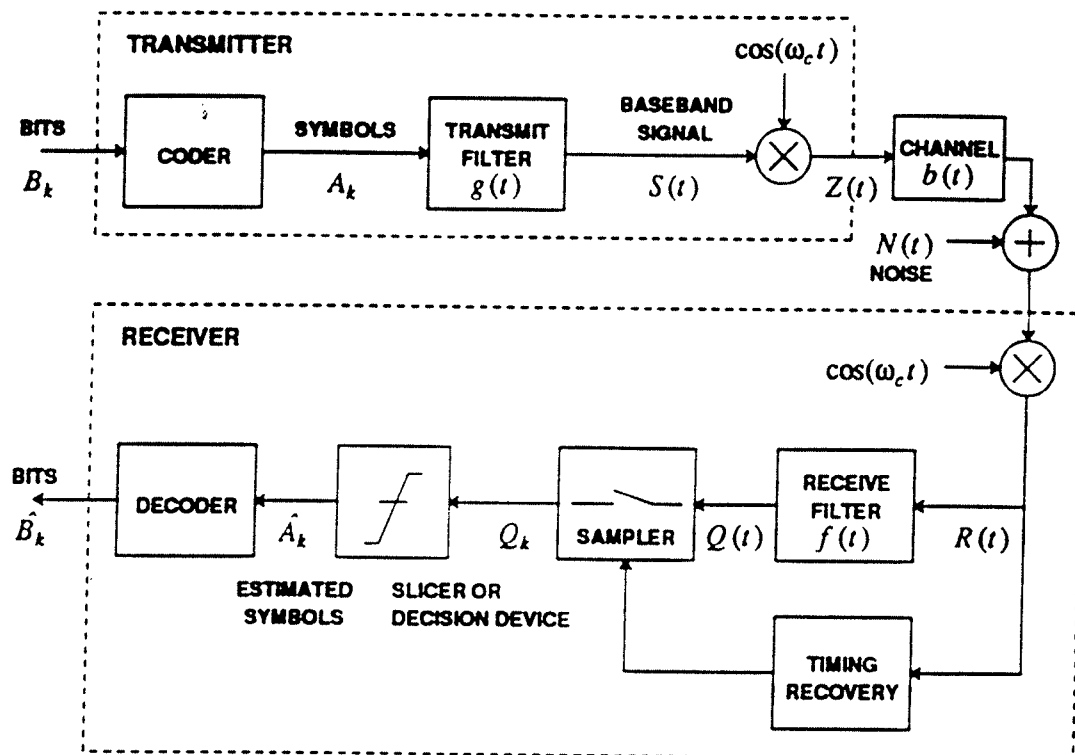
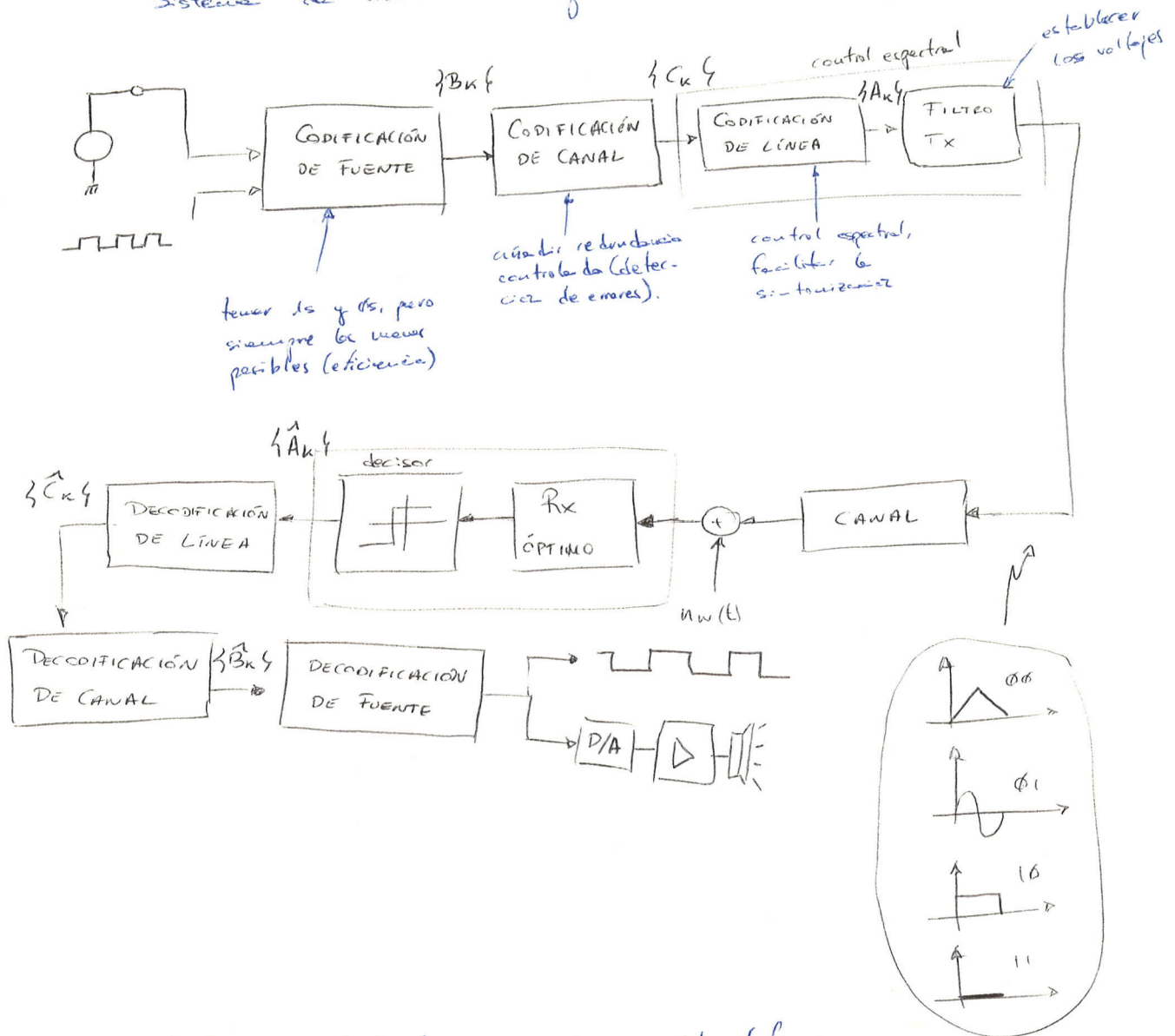


Figure 6-3. A naive passband PAM communications system using double-sideband AM modulation.

Sistema de transmisión digital:



El objetivo es distinto al anterior: identificar la información, no recuperar la forma exacta de la señal.

- Ventajas de los sistemas digitales:

- Con la codificación se permite la regeneración de señales, al hacerse de un alfabeto reducido
- El procesamiento es barato
- Permite encriptar la información

- Inconvenientes:

- Emplea más ancho de banda
- En principio, la circuitaría es más compleja, aunque cada vez es menos verdad.

- Medidas de Calidad:

- Velocidad de transmisión: V_t (baudios)

Tiene relación con el ancho de banda
baudio $\equiv$ símbolos por unidad de tiempo
(tipo francés, Baudot)

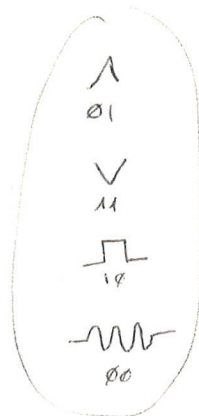
- Probabilidad de error: p_e

$\rightarrow$ viendo qué señales se reciben mal

$\rightarrow$ viendo qué bits se reciben mal

BER $\equiv$ Bit Error Rate

Tiene relación con la SNR y con el BW



1.2- rudimentos de Teoría de la Información

1.2.1- Generalidades

Shannon $\rightarrow I \sim \frac{1}{P}$ ($I \equiv$ información, $P \equiv$ probabilidad)

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{P_A} \\ I_B &= \frac{1}{P_B} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} I_{AB} &= \frac{1}{P_{AB}} \end{aligned} \right.$$

A, B independientes $\Rightarrow P_{AB} = P_A \cdot P_B$

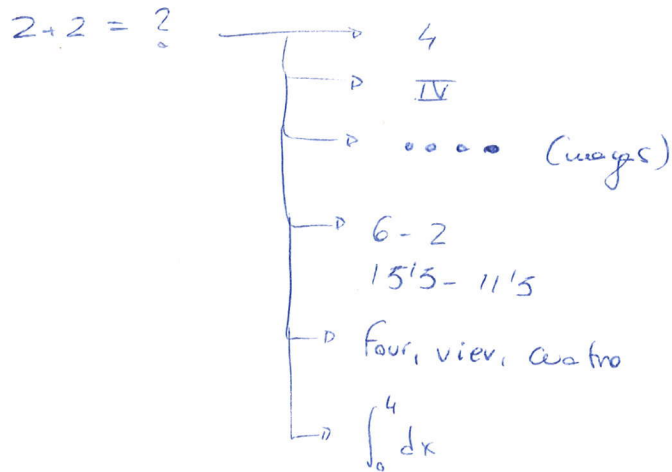
$$I_A + I_B \neq \frac{1}{P_{AB}} \Rightarrow \text{logarítmicos}$$

$$I = \log_2 \frac{1}{P}$$

C2? :
• entera más pequeño sobre el que se puede definir un logaritmo
• si $P_A = P_B = \frac{1}{2} \rightarrow$ información de un BIT cada proceso.

$$I = \left(\log_2 \frac{1}{p} \right) \text{ (bits)}$$

BINARY DIGIT $\sim$ BIT



bit = cantidad de información que proporciona un mensaje cuando sólo 2 sucesos son posibles y su probabilidad es $1/2$.

1.2.2 - Entropía

$\rightarrow$ información media (H)

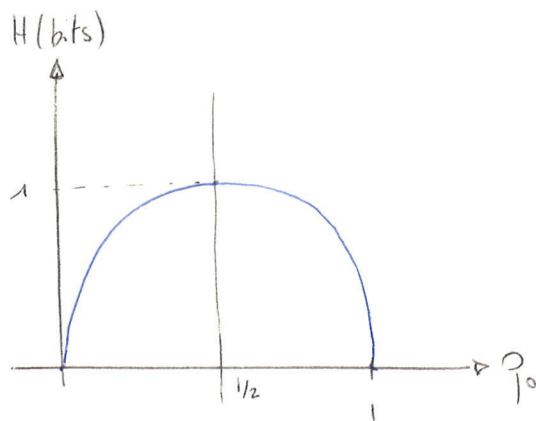
Mensajes $\sim \{p_i\}$

$$H = \sum_i p_i \cdot I_i = \sum_i p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \quad \text{(bits)}$$

$m_A \rightarrow "0" \quad p_0$

$m_B \rightarrow "1" \quad p_1 \quad p_0 + p_1 = 1$

$$H = H(p_0, p_1) \stackrel{p_1 = 1 - p_0}{=} H(p_0)$$



$$H = p_0 \log_2 \frac{1}{p_0} + p_1 \log_2 \frac{1}{p_1} = p_0 \log_2 \frac{1}{p_0} + (1-p_0) \log_2 \frac{1}{1-p_0}$$

Probabilidades "a priori"

Propiedad: dada una fuente, la entropía máxima se da cuando la distribución de probabilidades es equiprobable

1.2.3- Capacidad límite de Shannon

Queremos transmitir una secuencia de bits.

regimen binario →

$$R = \frac{\text{INFO}}{T} \text{ (bps)}$$

funciones } $0 \rightarrow -0V$
 $1 \rightarrow \overline{0V}$

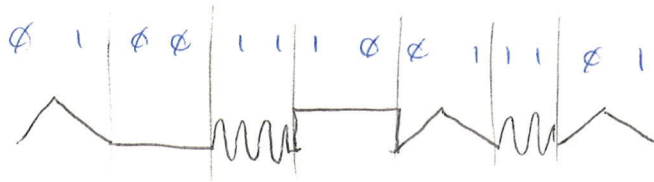


$$\text{funciones} \Rightarrow R = \frac{n^{\circ} \text{ FUNCIONES}}{T} \times \frac{n^{\circ} \text{ bits}}{\text{funcion}}$$

También podemos agrupar los bits de 2 en 2:

funciones } $00 \rightarrow -0V$
 $01 \rightarrow \wedge$
 $10 \rightarrow \text{square wave}$
 $11 \rightarrow \text{zigzag}$

Cuanto menos funciones hay que transmitir por el medio, menos restricciones hay de velocidad



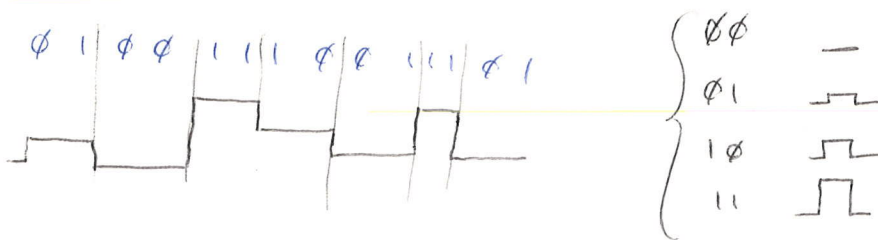
En vez de funciones se suele hablar de símbolos

$$r = \frac{n^{\circ} \text{ funciones}}{T} \text{ (baudios)}$$

$$= \frac{n^{\circ} \text{ símbolos}}{T}$$

$$R = r \text{ (baudios)} \cdot H \text{ (bits/símbolo)} \quad (\text{bps})$$

Las funciones que hemos visto son muy distintas. Nos acordamos serían símbolos que sólo cambian amplitud, frecuencia o fase de un tipo de onda.



El objetivo es transmitir a una velocidad R bps.

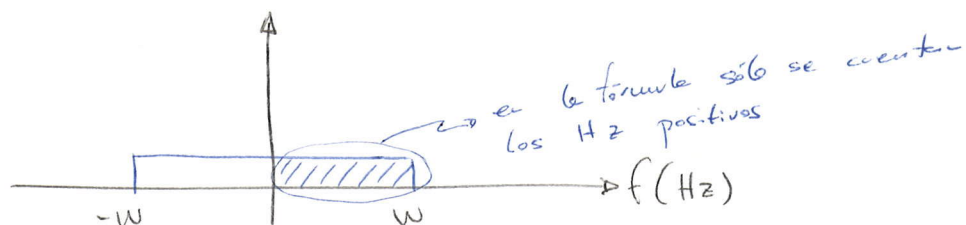
Por ejemplo, nos dan una banda W (Hz), una potencia de la fuente $S(W)$ y una intensidad de ruido $N_0(W/\text{Hz})$

¿Dónde está el límite? La capacidad máxima depende de la banda y de la SNR:

$$C \text{ (bps)} = W \cdot \log_2 (1 + \text{SNR}) \quad \text{Límite de Shannon}$$

$W \rightarrow \text{Hz}$

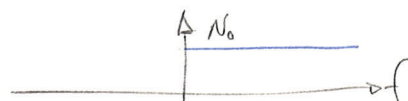
$\text{SNR} \rightarrow \text{veces (100 en dB!)}$



Para calcular el ruido hay 2 opciones:

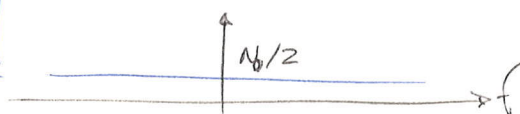
- Contar las frecuencias positivas

$$N = N_0 \cdot W$$



- Contar las frecuencias positivas y negativas

$$N = \frac{N_0}{2} \cdot 2W$$



• ¿Se puede hacer $C \rightarrow \infty$?

→ Si $SNR = \infty$, la capacidad se hace arbitrariamente grande.

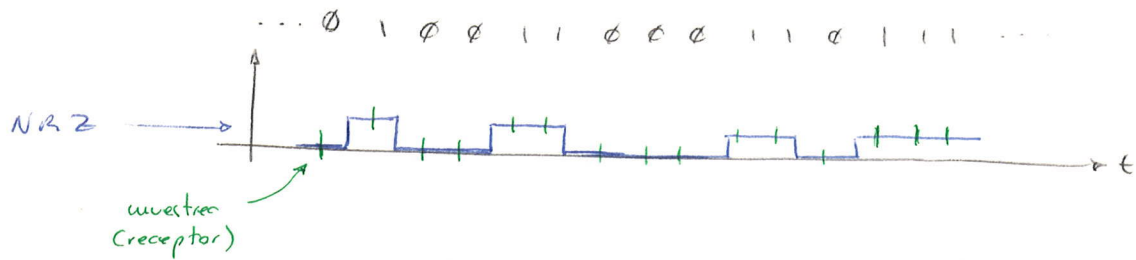
→ Si $W \uparrow \uparrow$ aumenta también el ruido:

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 \cdot W} \right)$$

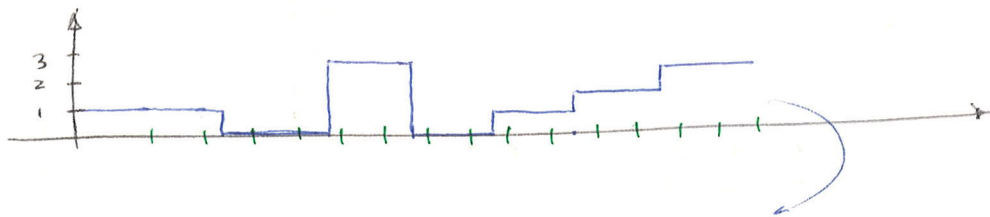
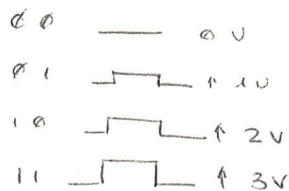
$$\lim_{W \rightarrow \infty} C = \lim_{W \rightarrow \infty} W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 \cdot W} \right) = \log_2 e \cdot \frac{S}{N_0}$$

Si se transmite por debajo de la capacidad, la probabilidad de error se puede hacer arbitrariamente baja o sea codificación adecuada. Si se transmite por encima, da igual cómo se codifique, siempre habrá error.

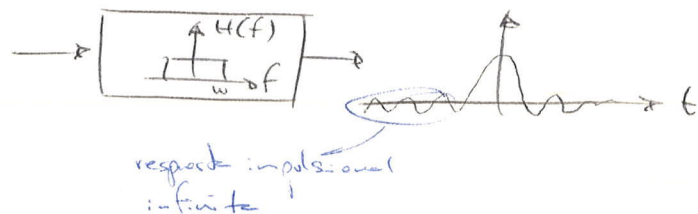
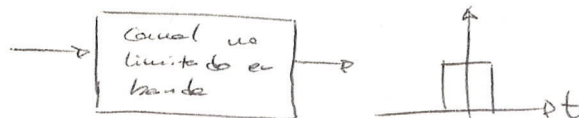
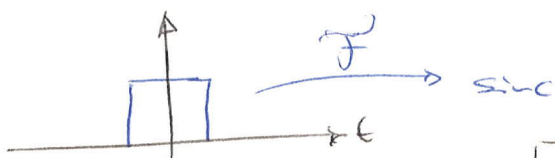
1.3 - TRANSMISIÓN EN CANALES LIMITADOS EN BANDA



Otra codificación:
multinivel

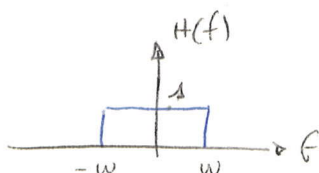


al receptor se
logra eso
(limitado en banda,
ruido, ...)

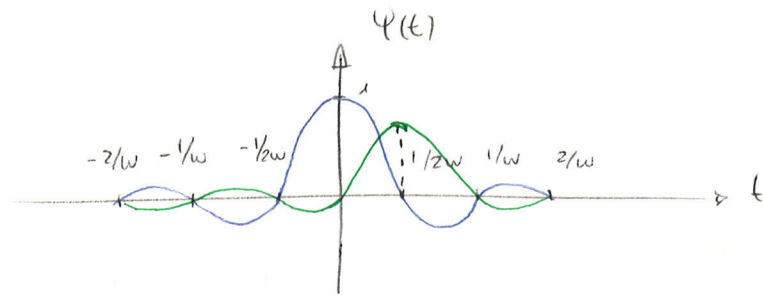


$\Rightarrow$ INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA: se solapan las colas de las señales y se suman. (ISI = InterSymbol Interference)

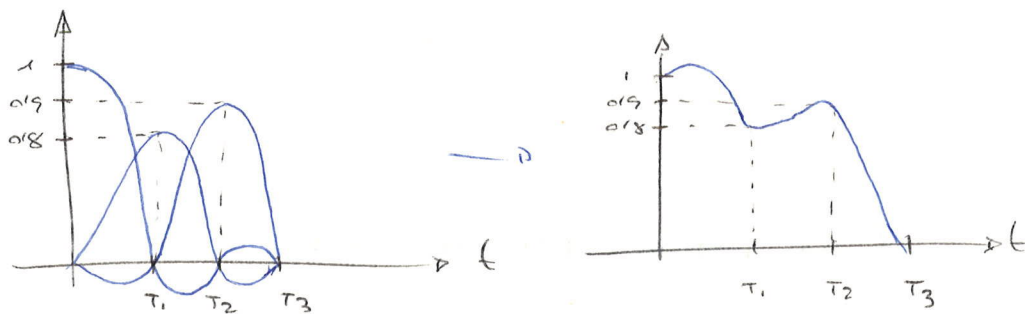
Supongamos un canal como filtro pasa bajos ideal y $|H(f)| = 1$



$$\xrightarrow{F^{-1}} \psi(t) = 2W \cdot \text{sinc } 2Wt$$



Se podrán transmitir los pulsos separados $1/2w$ de forma que en los picos de una señal, los ceros de las demás.



$$|f_{max} = 2w|$$

1.3.1 - Criterio de Nyquist:

$y(t) \rightarrow$ voltaje recibido = ruido + sincs desplazados y escalados

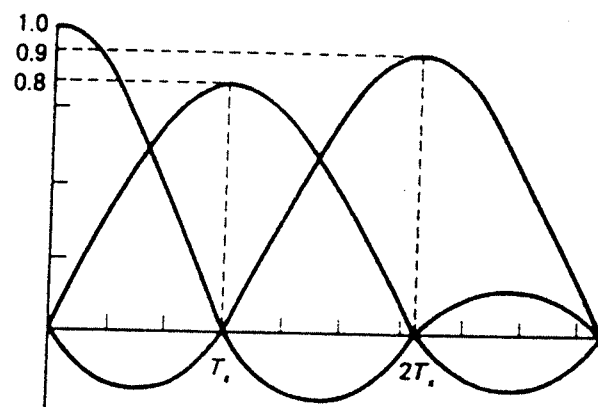
$$y(t) = \sum_k A_k \cdot \psi(t - kT_s) + u(t)$$

Leer la amplitud en el instante $t = m \cdot T_s$:

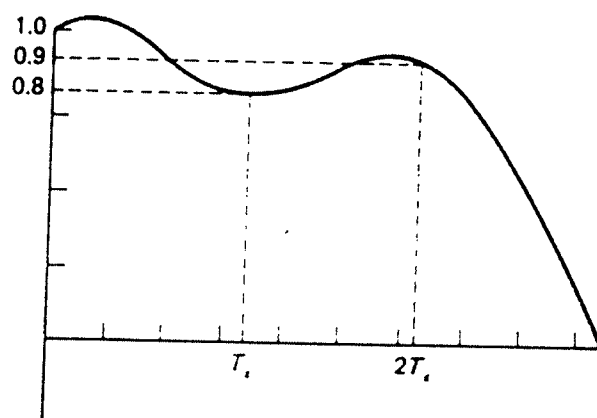
$$y(mT_s) = \sum_k A_k \psi((m-k)T_s) + u(mT_s)$$

$$= \underbrace{(A_m) \psi(0)}_{\text{La amplitud que queremos}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} A_k \psi((m-k)T_s)}_{\text{ISI}} + u(mT_s)$$

La amplitud
que queremos



(a)



(b)

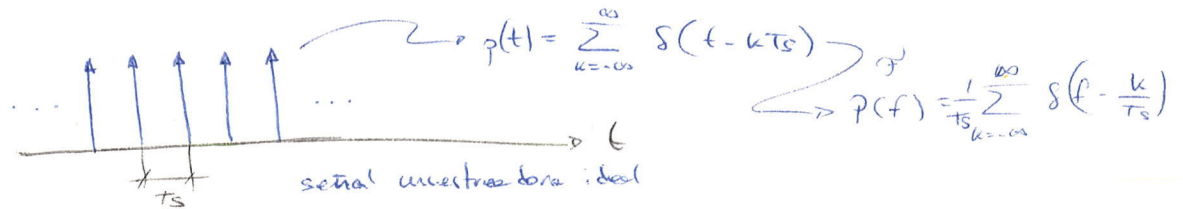
$$r_{max} = 2W$$

Figure 7.13 Sequence of pulses formed by ideal low-pass filter

Si $\psi(nT_s) = 0 \quad \forall n \neq 0 \Rightarrow ISI = 0$

↳ Criterio de Nyquist

→ nos lo llevamos al espectro



$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\psi(t) \cdot p(t) = \psi(0) \cdot \delta(t)$$



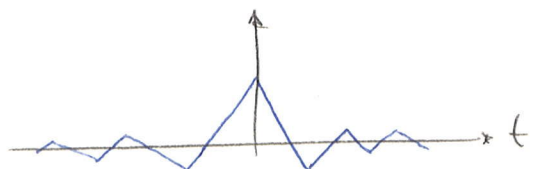
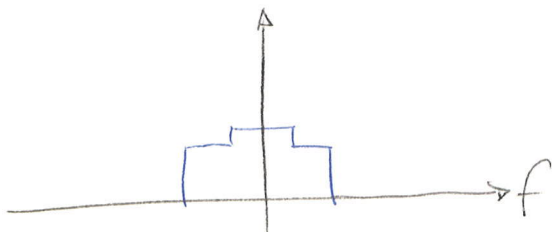
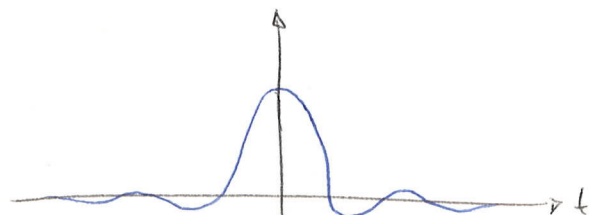
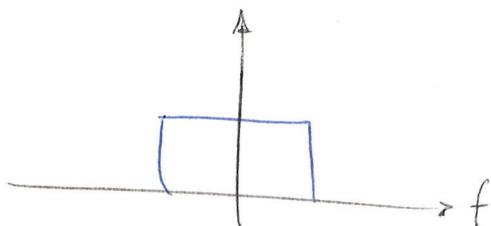
$$\psi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi(f)$$

$$\xi(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_s) = \psi(0)$$

$$f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi(f - kf_s) = \psi(0)$$

función periódica en la frecuencia de periodo f_s .
 podemos mirar un solo periodo.

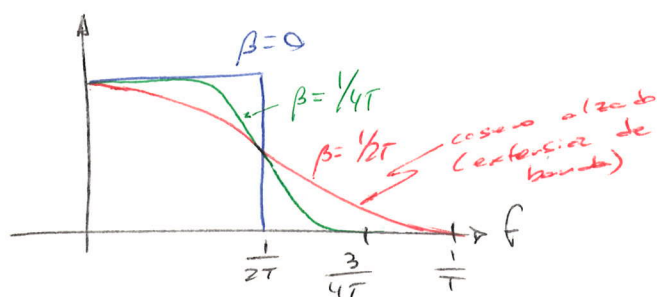
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi(f - kf_s) = T_s \cdot \psi(0) \quad |f| \leq 1/2T_s$$



Extender la banda $\Rightarrow$ más bits temporales en bits temporales más pequeños, por lo que, en caso de error de sincronismo, influyen menos.

El muestreo ideal tiene que dar una banda plana en frecuencia.

Coseno alzado $\Rightarrow$ respuesta en frecuencia parece un coseno



$$H(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq \frac{1}{2T_s} - \beta \\ \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \left(|f| - \frac{1}{2T_s} + \beta \right)}{2\beta} \right) & \frac{1}{2T_s} - \beta < |f| < \frac{1}{2T_s} + \beta \\ 0 & |f| > \frac{1}{2T_s} + \beta \end{cases}$$

β es lo que extendemos en frecuencia con respecto al caso ideal (exceso de ancho de banda $\equiv 2\beta T_s$)

$$\alpha = 2\beta T_s$$

Cuanto mayor sea, más banda hay disponible.

Exceso 50% $\Rightarrow \alpha = 50\% = 0.5$

$$W' = 1.5 \cdot W$$

NYQUIST CRITERION

$$p(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = p(0) \delta(t)$$

$$p(t) \xrightarrow{F} P(f)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f + \frac{k}{T}) = p(0) T \quad , \quad |f| \leq \frac{1}{2T}$$

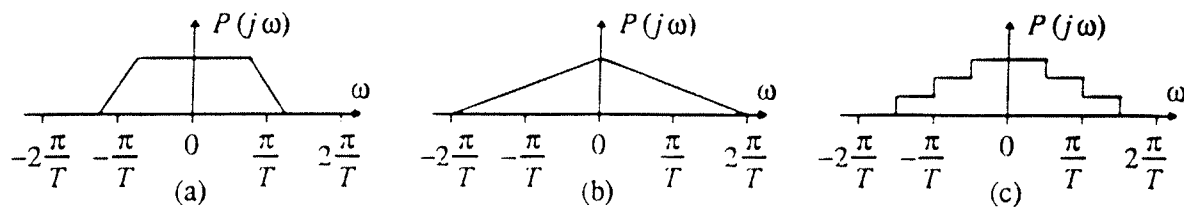


Figure 6-5. The Fourier transform of some pulses that satisfy the Nyquist criterion.

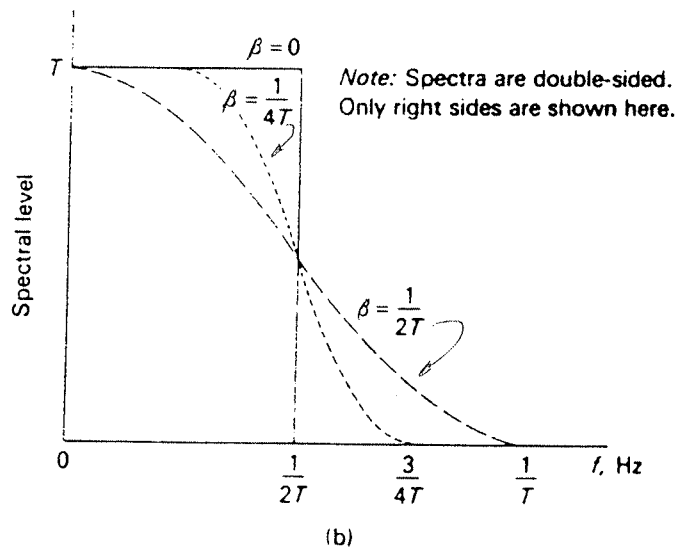
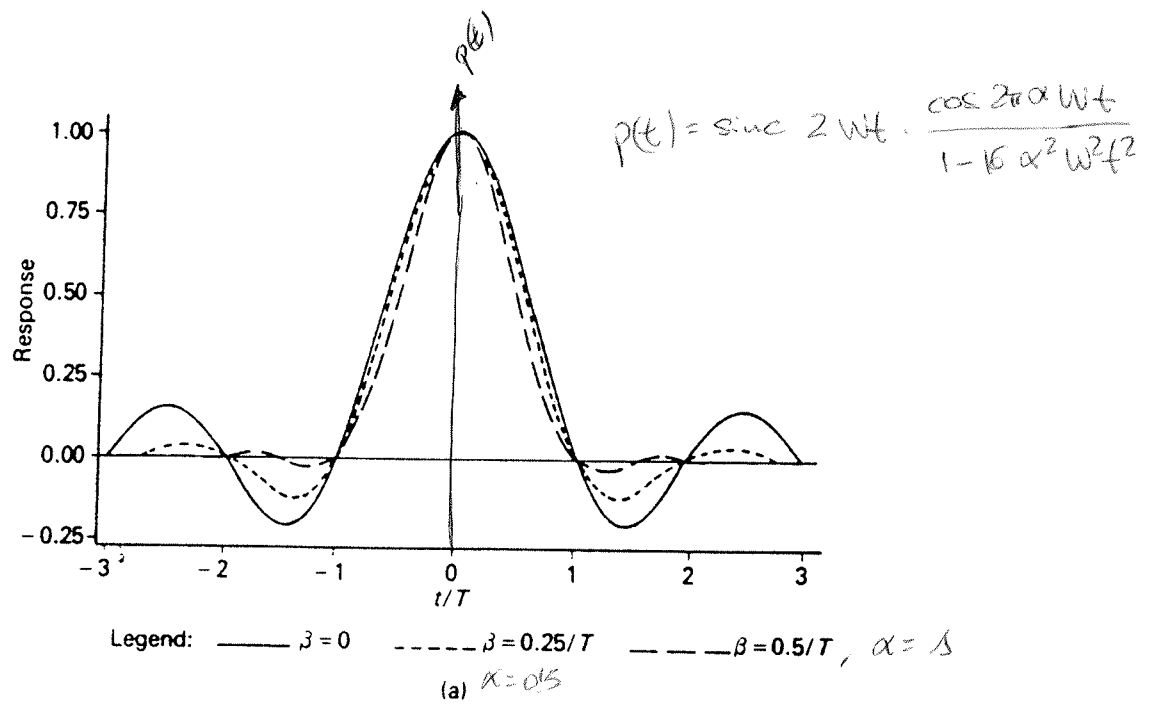


FIGURE 7.24 (a) Pulse response for the raised cosine spectra shown in (b)

1.3.2- DIAGRAMA DE OJOS

Método empírico de caracterización de sistemas de comunicaciones digitales desde el punto de vista de la frecuencia (o el tiempo) y de las amplitudes.

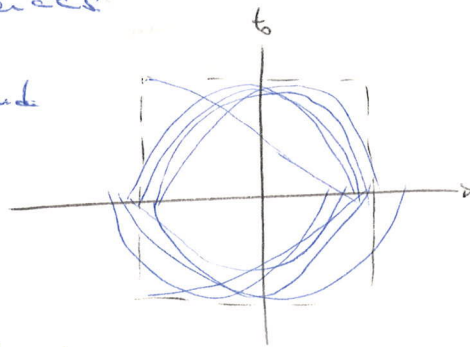
Introducir una secuencia aleatoria en el sistema.

Más bien pseudoraleatorias $\rightarrow$ a bits / palabra $n \cdot 2^n$ es la longitud de la secuencia.

Si la persistencia del osciloscopio es suficiente, se ven las trazas de todas las secuencias.

Sistema limitado en banda
 $\Rightarrow$ cuadrado

Limitar banda $\Rightarrow$ achicar el ojo

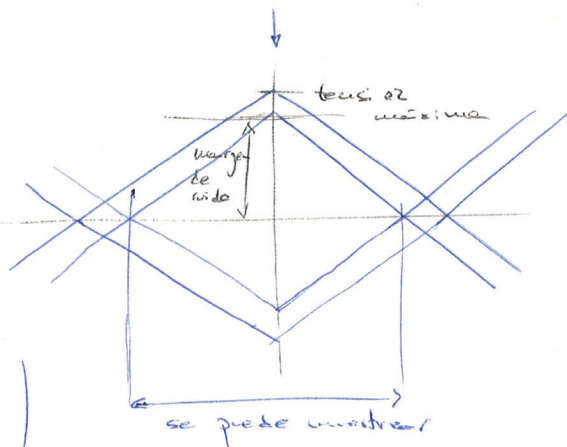


Cuanto más abierto es el ojo, mejor es el sistema.

Si lo es el que el ojo está más abierto $\rightarrow$ mejor para muestrear

• margin de ruido $\equiv$ valor de una traza de ruido para que los engañe.

umbral



Sistema lineal
 $\Rightarrow$ diagrama de ojos simétrico

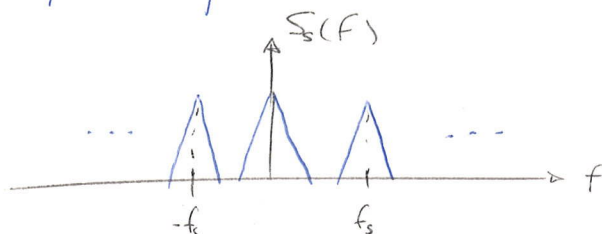
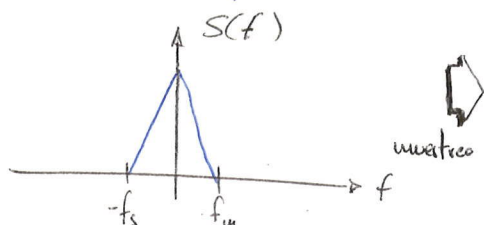
• Generación: aplicar la señal a las placas de desviación vertical del osciloscopio y una onda de diente de sierra con $R = 1/T$ a las de desviación horizontal.

1.4 - CODIFICACIÓN DE FUENTE

1.4.1. Fuente analógica

- MUESTREO:

No hace falta ninguna forma de onda específica (cuadrada, triangular, delta, ...), sólo que sea periódica.

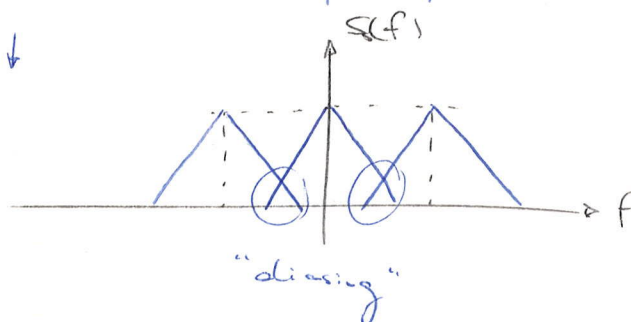


Operación contraria $\rightarrow$ interpolación = observar funciones sinc en cada muestra. (filtro paso bajo)

Solape de espectros:

$\Rightarrow$ error

$f_s \downarrow$



Otra fuente de error: se muestra en tiempo finito $\Rightarrow$ señal de muestreo no periódica. En la práctica no es igual, pero en teoría viola el resultado del Teorema de Muestreo.

- CUANTIFICACIÓN:

• Cuantificador de cuenta

• Cuantificador serie: toma valor de muestra y compara con intervalos, con tantos niveles como bits por muestra

• Cuantificador paralelo: se toma la muestra y se compara con todos los valores umbrales a la vez.

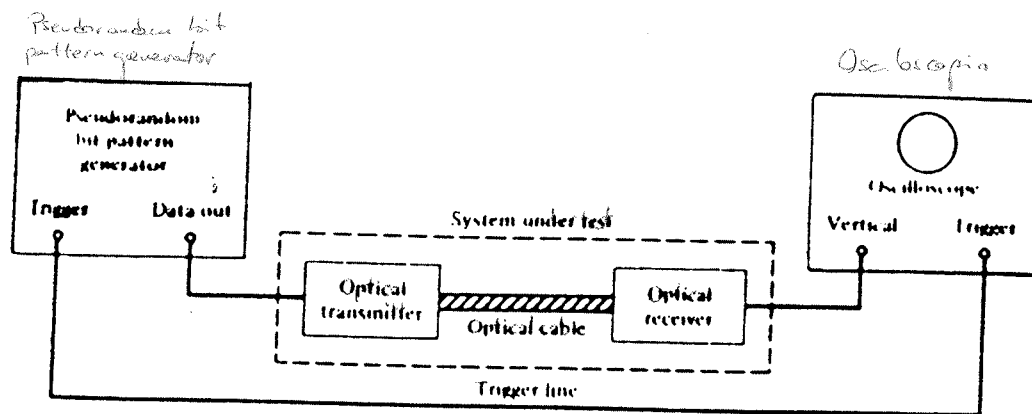


FIGURE 8-10
Basic equipment used for eye-pattern generation.

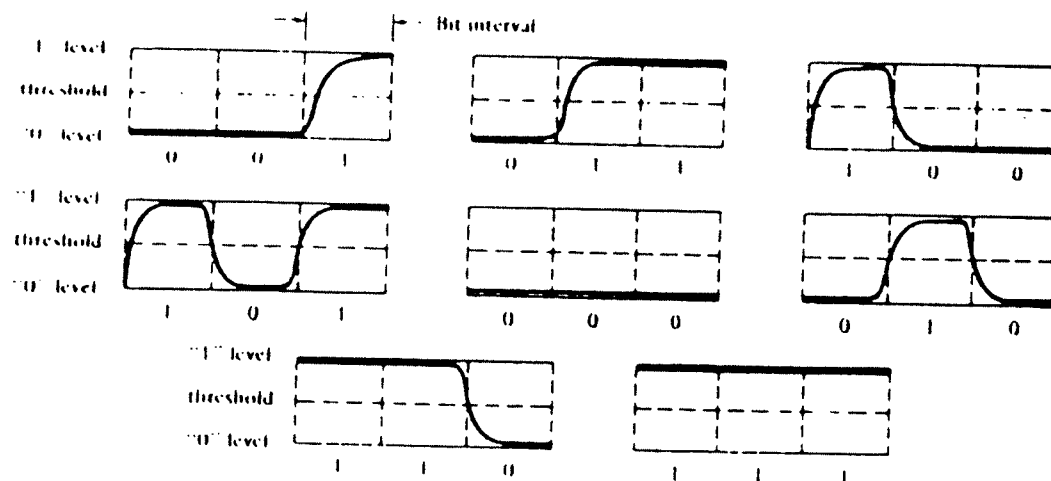


FIGURE 8-12
Eight possible 3-bit-long NRZ combinations.

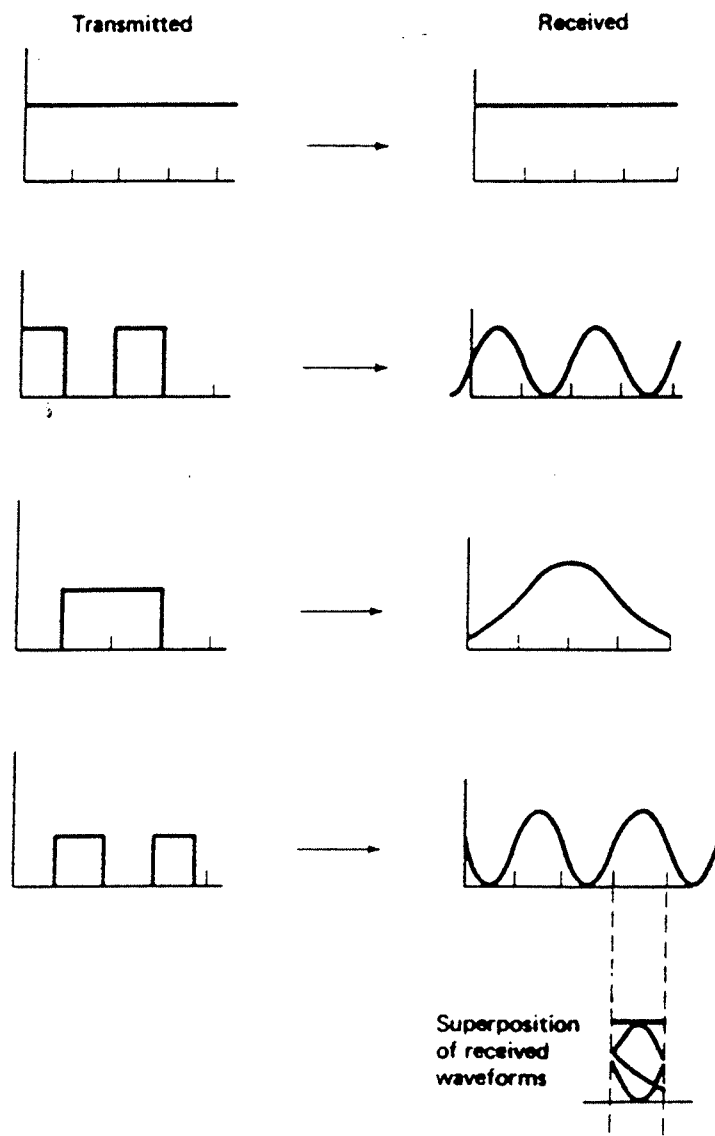


Figure 7.10 Generation of eye pattern

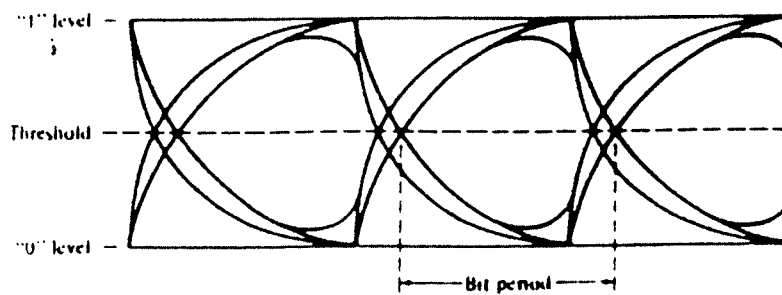


FIGURE 8-11
Sample of an eye-pattern diagram

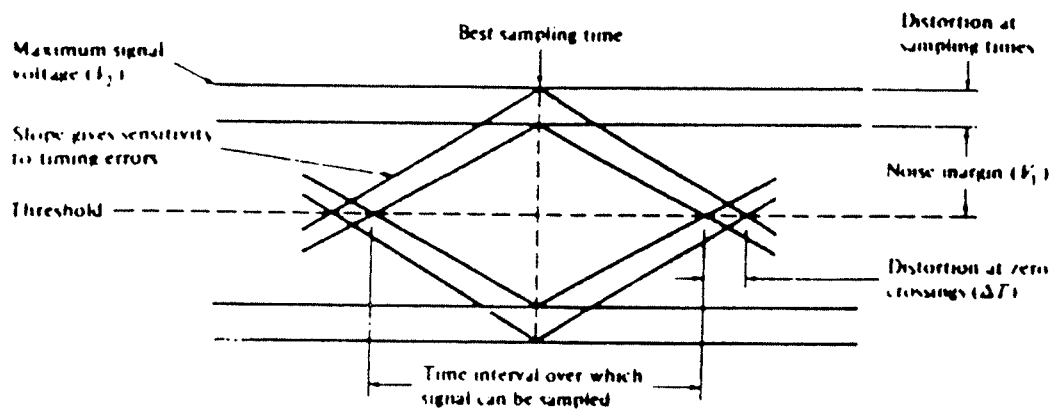


FIGURE 8-13
Simplified eye-pattern diagram and its interpretation.

- CODIFICACIÓN:

a) PCM (Pulse Code Modulation)

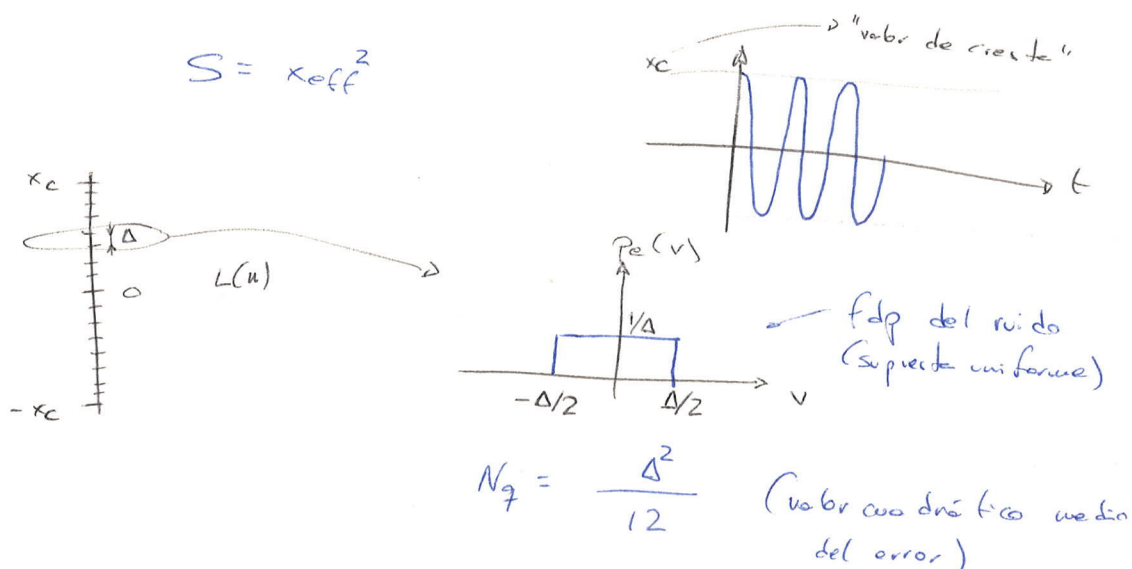
Codificar "tal cual"

Ejemplo:

Señal de audio, $s(t) = 3 \cos 500t$

a) SNR de cuantificación para PCM 10 bits

b) Bits necesarios para $SNR = 40 \text{ dB}$



$$SNR = \frac{x_{\text{eff}}^2}{\frac{\Delta^2}{12}}$$

factor de cresta: $\varphi_c = \frac{x_c}{x_{\text{eff}}}$

$$\Delta = \frac{2x_c}{L} = \frac{2x_c}{2^n} = \frac{x_c}{2^{n-1}}$$

$$SNR = \frac{\frac{x_c^2}{\varphi_c^2}}{\frac{x_c^2}{3 \cdot 2^{2n}}} = \frac{3 \cdot 2^{2n}}{\varphi_c^2} = (\text{dB}) = 4.77 + 6n - 20 \log \varphi_c$$

a) $SNR(\text{dB}, n=10) = 61.77 \text{ dB}$

b) $n = \frac{40 - 4.77 + 3}{6} = 6.37 \dots \Rightarrow n = 7$

Otro ejemplo:

Señal vocal 3 kHz

PCM L niveles

Error de cuantificación $< 1\%$ valor p. a p. a

Código de línea multinivel con 16 niveles de tensión

a) n mínimo

$$\Delta \leq 1\% \cdot 2x_c$$

$$\Delta = \frac{2x_c}{L} \leq 0.01 \cdot 2x_c \Rightarrow L \geq 100$$

$$2^n \geq 100 \Rightarrow \underline{n \geq 7}$$

b) Sinusoidal $\rightarrow$ ¿SNR?

$$q_c = \sqrt{2} \Rightarrow \text{SNR} = 43.77 \text{ dB}$$

c) Velocidad mínima de muestreo

$$f_s \geq 6 \text{ kHz} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sampler} \\ \text{KS/s} \end{array} \right)$$

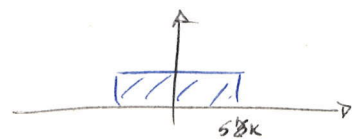
$$\text{Velocidad binaria: } V = 7 \cdot 6000 = 42 \text{ Kbps}$$

¿Códigos? Codificación multinivel $\Rightarrow$ 4 bits/nivel

$$\boxed{r = \frac{42}{4} = 10.5 \text{ Kbaudios}}$$

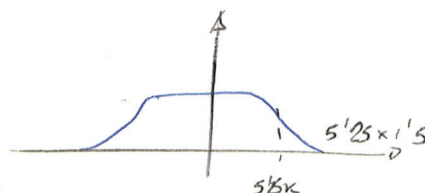
d) BW mínima para enviar ISI

$$r_{\text{max}} = 2W \Rightarrow \underline{W = 5.25 \text{ kHz}}$$



e) ¿Y si se usa coseno alzado con exceso 50%?

$$\underline{5.25 \text{ kHz} \cdot 1.5 = 7.875 \text{ kHz}}$$



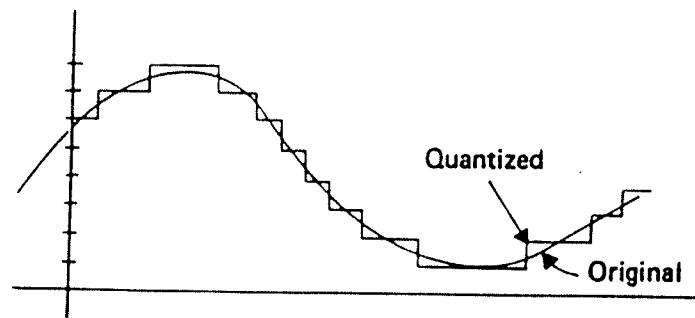


Figure 3.8 Staircase approximation to analog signal

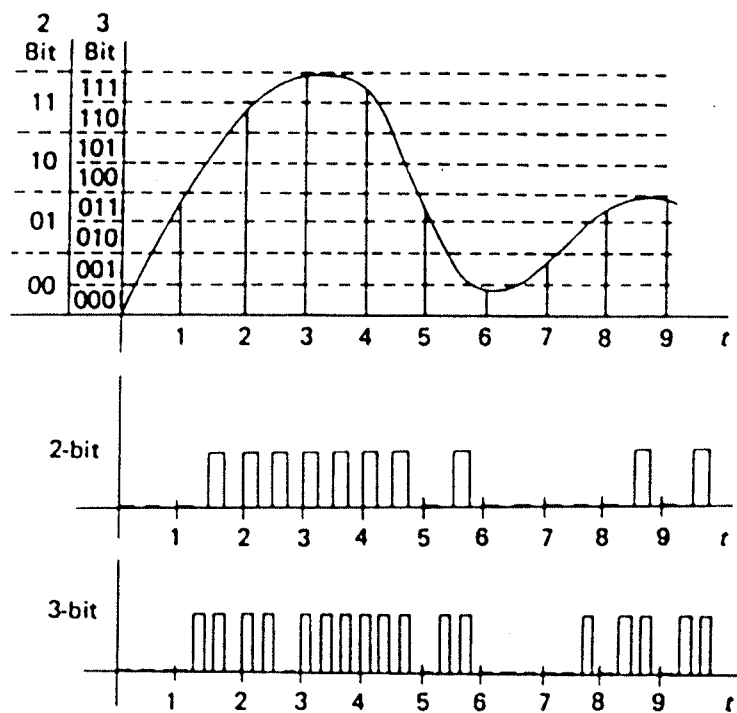
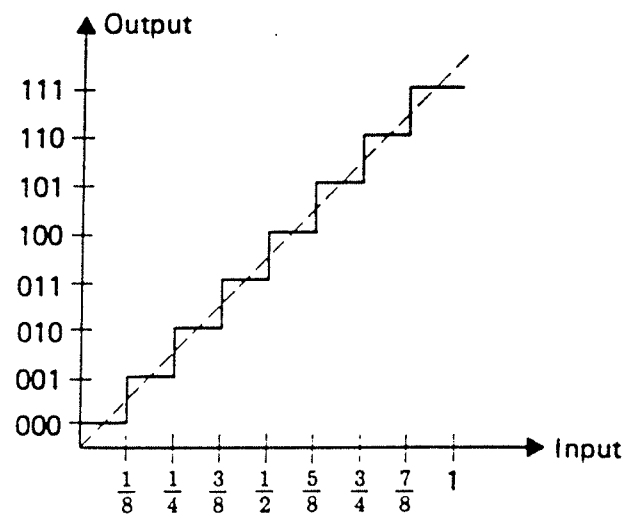


Figure 3.9 Analog-to-digital conversion

	1
111	$\frac{7}{8}$
110	$\frac{3}{4}$
101	$\frac{5}{8}$
100	$\frac{1}{2}$
011	$\frac{3}{8}$
010	$\frac{1}{4}$
001	$\frac{1}{8}$
000	0

(a)



(b)

Figure 3.10 Three-bit PCM

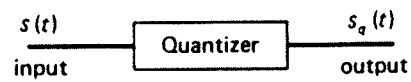
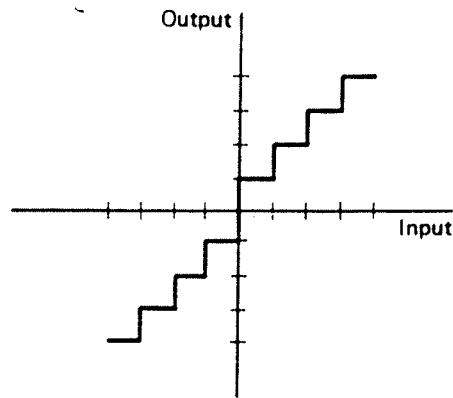


Figure 3.21 Input-output function for uniform quantizer

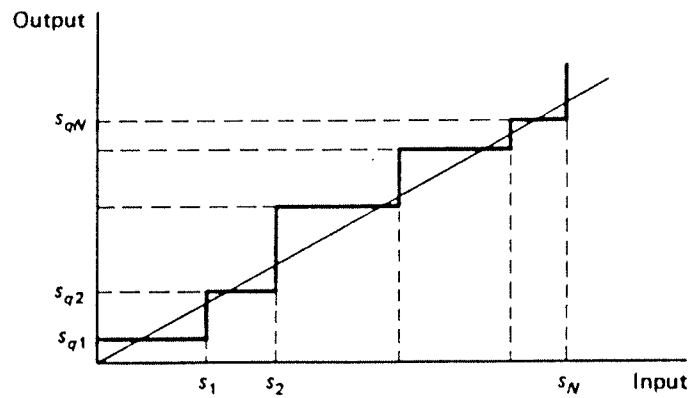


Figure 3.22 Input-output function for nonuniform quantizer

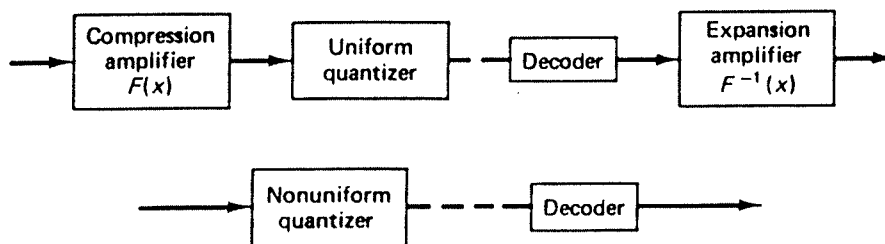


Figure 3.24 The concept of companding

Nonuniform Quantization

$$F(s) = \operatorname{sgn}(s) \frac{\ln(1 + \mu|s|)}{\ln(1 + \mu)}$$

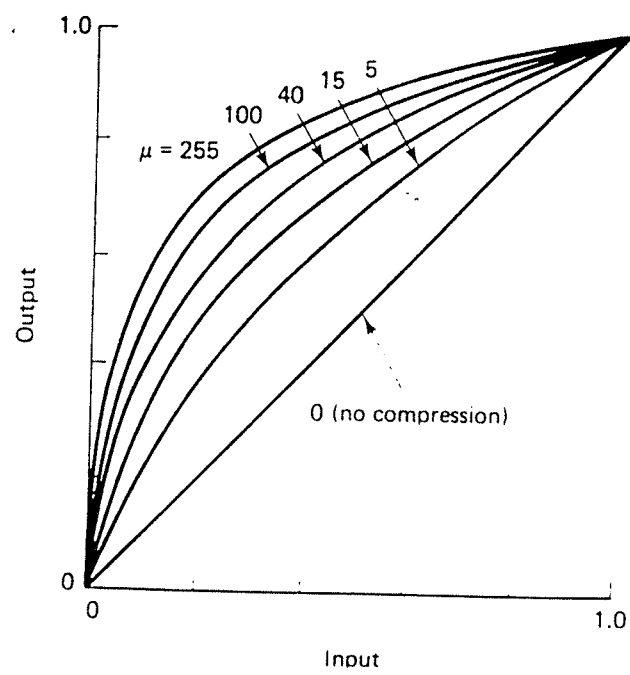


Figure 3.26 u-law compression curves

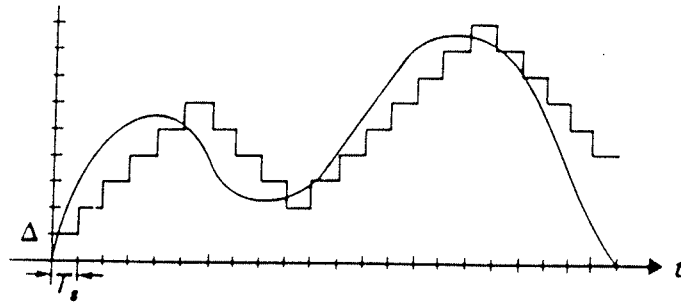


Figure 3.37 Analog waveform and staircase approximation

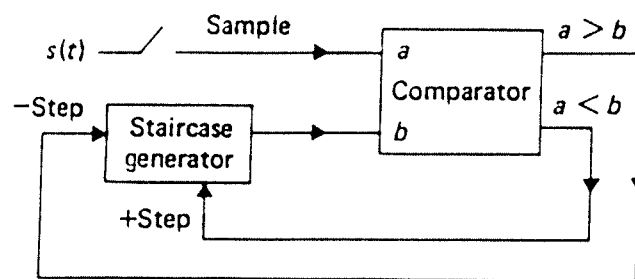


Figure 3.38 Delta A/D converter

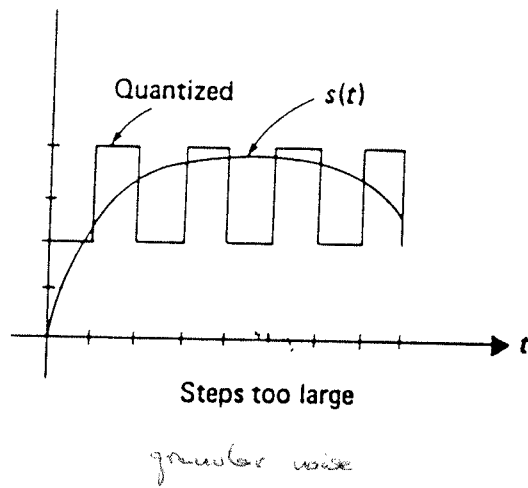
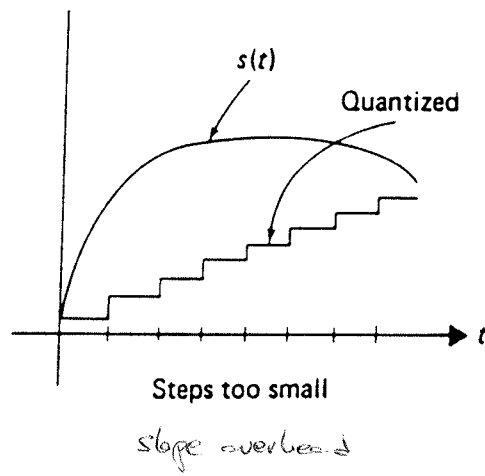


Figure 3.39 Consequences of poor choice of delta step size

Vale, también hay cuantificación no uniforme.

Codificar la diferencia entre 2 muestras consecutivas $\Rightarrow$ más resolución

$\rightarrow$ MODULACION DELTA

Parámetros críticos:

- frecuencia de muestreo
 - tamaño del escalor, $\Delta \Rightarrow$ problemas
- } shape overload ($\Delta \downarrow$)
 granular noise ($\Delta \uparrow$)

$\rightarrow$ solución: MODULACION DELTA ADAPTATIVA

Se incrementa el tamaño del escalor hasta que cambie el signo de la diferencia

$\rightarrow$ song algorithm

$\rightarrow$ space shuttle algorithm: se vuelve al tamaño de paso inicial cuando cambia el signo

1.4.2- Codificación entropica de una fuente digital

Fuente digital $\rightarrow$ genera mensajes de un alfabeto finito

$P_0 = 1/2$ $u_0 \rightarrow 00$

$P_1 = 1/4$ $u_1 \rightarrow 01$

$P_2 = 1/8$ $u_2 \rightarrow 010$

$P_3 = 1/8$ $u_3 \rightarrow 11$

ejemplo: $u_0 u_1 u_2 u_3 u_0 u_1 \dots$

$00 01 00 11 00 00 \dots$



Longitud media = 2 bits / símbolo

Se puede mejorar

Ejemplo:

$u_0 \rightarrow 1$

$P_0 = 1/2$

$u_1 \rightarrow 10$

$P_1 = 1/4$

$u_2 \rightarrow 01$

$P_2 = 1/8$

$u_3 \rightarrow 101$

$P_3 = 1/8$

$u_0 u_2 \rightarrow 101$

$u_3 \rightarrow 101$

{ no es único (Cm. Analógicas)

$\Rightarrow$ no vale

Otra codificación:

$$\begin{array}{l} u_0 \rightarrow 1 \\ u_1 \rightarrow 01 \\ u_2 \rightarrow 001 \\ u_3 \rightarrow 0001 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}} \right\} \text{instantáneos}$$

Otra vez:

$$\begin{array}{l} u_0 \rightarrow 0 \\ u_1 \rightarrow 01 \\ u_2 \rightarrow 011 \\ u_3 \rightarrow 0110111 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}} \right\} \text{no instantáneos!}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 11 & 0 & 111 & \\ \hline u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \\ \hline \end{array}$$

Propiedades:

- Unicidad (necesaria)
- Inmediatez (conveniente)

Ejemplo:

- $0, 01, 001, 0011, 101$: no unívoco
- $110, 111, 101, 01$: unívoco, inmediato
- $0, 01, 011, 0110111$: unívoco, e inmediato

Propiedad:

La entropía de una fuente digital mínima la longitud media de cualquier codificación digital posible.

$$\boxed{L(\text{bits}) \geq H}$$

Adaptive Delta Modulation

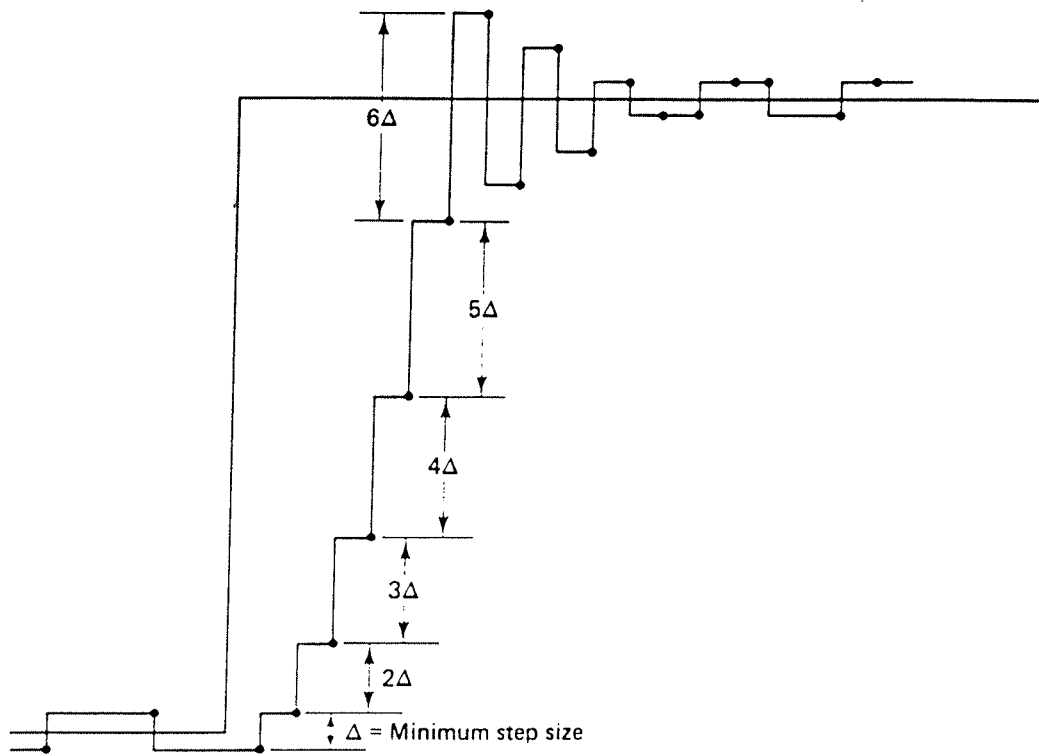


Figure 3.40 Song algorithm

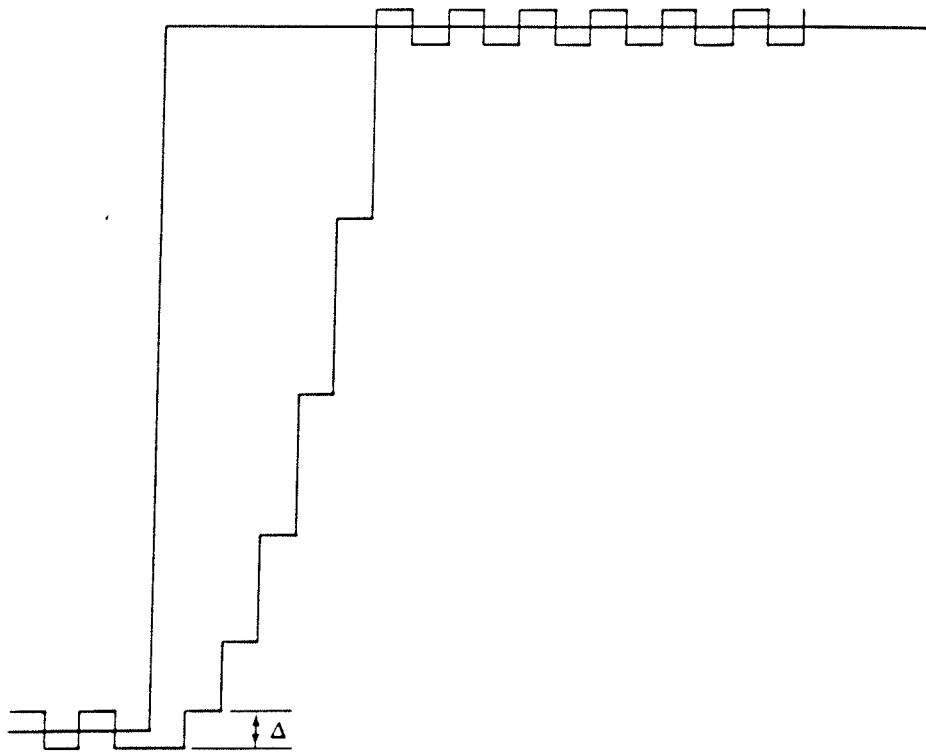


Figure 3.41 Space Shuttle algorithm

a) HUFFMAN

- Se ordenan los mensajes por orden decreciente de probabilidades

$$\begin{array}{l}
 u_0 \quad \overset{(\emptyset)}{1/2} \text{ --- } \overset{(\emptyset)}{1/2} \text{ --- } 1/2 (\emptyset) \\
 u_1 \quad 1/4 (\emptyset) \text{ --- } 1/4 (\emptyset) \\
 u_2 \quad 1/8 (\emptyset\emptyset) \quad > \quad 1/2 (1) \\
 \quad \quad \quad > \quad 1/4 (11) \\
 u_3 \quad 1/8 (111)
 \end{array}$$

- Se toman los 2 menores y se suman. Se ordenan otra vez.

Se hace hasta que quedan 2 terminos.

- Se asignan unos y ceros, volviendo hacia atras, dejando el tal cual si es la mitad variaciones y bifurcando si se la suma.

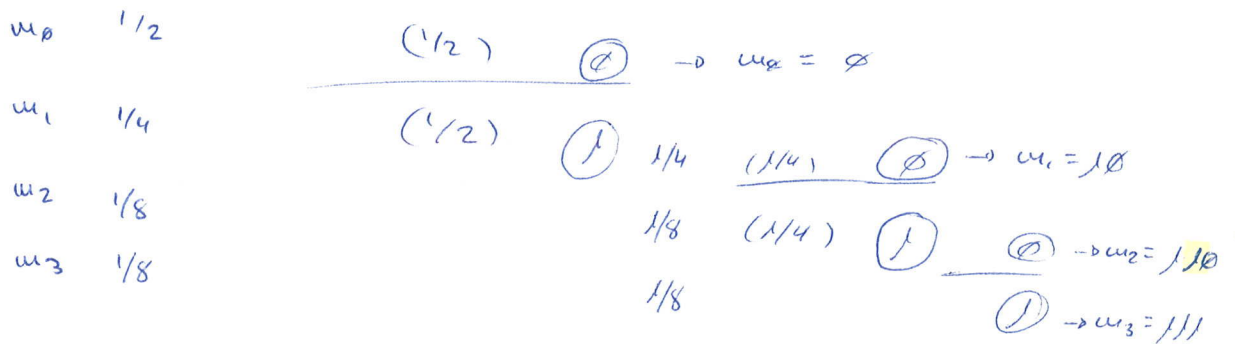
$$\left[\begin{array}{l}
 u_0 \rightarrow \emptyset \\
 u_1 \rightarrow \emptyset\emptyset \\
 u_2 \rightarrow \emptyset\emptyset\emptyset \\
 u_3 \rightarrow \emptyset\emptyset\emptyset\emptyset
 \end{array} \right.$$

$$\text{Longitud media} = \sum p_i \cdot l_i = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1.75 \text{ bits}$$

$$H = \sum p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1.75$$

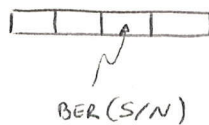
Es la mejor codificación posible.

b) SHANNON-FANO



Es igual que Huffman

1.5 - CODIFICACIÓN DE CANAL



Queremos reducir el BER

Alternativas:

- Incrementar S/N
- Codificar

A: igual probabilidad de error:

$$G(\text{dB}) = \text{SNR}(\text{sin codif.}) - \text{SNR}(\text{con codif.})$$

Ganancia del código $\rightarrow$

Word	Prob.	Prob.	Prob.	Prob.
s_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \underline{0}$
s_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \underline{10}$	$\frac{1}{2} 1$
s_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \underline{110}$	$\frac{1}{4} 11$	
s_1	$\frac{1}{16} \underline{1110}$	$\frac{1}{8} 111$		
s_4	$\frac{1}{16} \underline{1111}$			

$$s_1 \rightarrow 1110$$

$$s_2 \rightarrow 110$$

$$s_3 \rightarrow 10$$

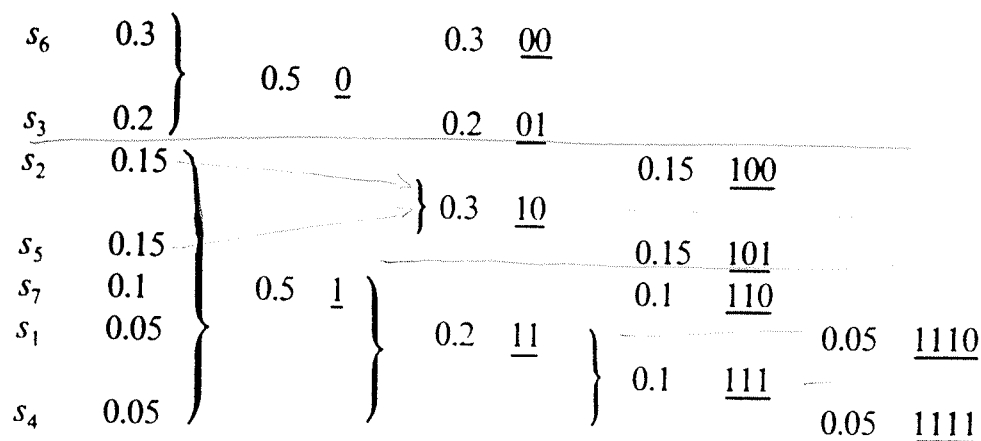
$$s_4 \rightarrow 1111$$

$$s_5 \rightarrow 0$$

Find the Shannon-Fano code for the following seven messages with probabilities as indicated:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
0.05	0.15	0.2	0.05	0.15	0.3	0.1

Solution. We order these and subdivide as follows. The code words are underlined.



The resulting code is

s_1	1110
s_2	100
s_3	01
s_4	1111
s_5	101
s_6	00
s_7	110

1.5.1- Códigos de bloques

Control de paridad.

u_0 000

u_1 001

u_2 010

u_3 011

u_4 100

u_5 101

u_6 110

u_7 111

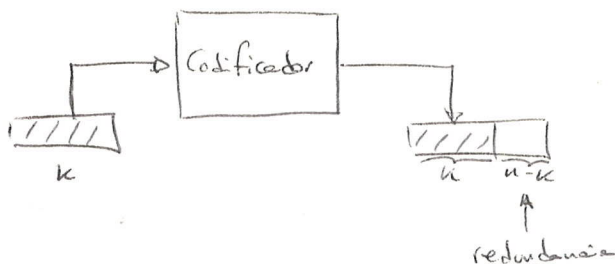
Si se produce un error, en esta codificación, no nos enteramos, ya que la palabra cambia de pertenencia al código.

Si la distancia mínima es 1, no se pueden detectar errores

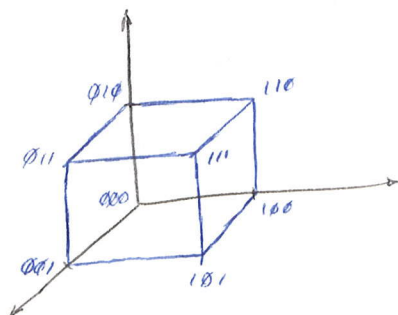
- Distancia de Hamming entre 2 palabras: número de bits que difieren entre 2 palabras. (d_H)

ej: 01001
01100 $\rightarrow d_H = 2$

Código de bloques: $B(n, k)$



2^k palabras $\rightarrow 2^n$



u	R
000	0
001	1
010	1
011	0
100	1
101	0
110	0
111	1

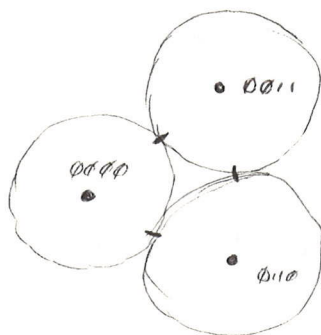
1 bit de paridad (par)

$\Rightarrow$ distancia mínima = 2

detectar para no corregir

detectar errores solo en 1 bit

Si la distancia mínima de un código es d_H , se pueden detectar errores en hasta $d_H - 1$ bits



$$\text{Corregir} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d_H - 1}{2} & (d_H \text{ impar}) \\ \frac{d_H}{2} - 1 & (d_H \text{ par}) \end{array} \right.$$

Demasiada redundancia ↘

Hay que transmitir más rápido $\Rightarrow$ señal más corta $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ menos energía $\Rightarrow$ menos SNR $\Rightarrow$ más p_e

Ejemplo:

Supongamos un código de bloques capaz de corregir E bits y longitud n bits. ¿De cuántas palabras como máximo contamos?

2^n palabras de n bits

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{E} = \text{todas las palabras que difieren de la original hasta en } E \text{ bits}$$

Corregir E errores en palabras de n bits

$$N \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^E \binom{n}{i}}$$

teorema de Hamming sobre compactación de las esferas
 $(N = \text{número de palabras código})$

Son códigos muy malos para sistemas limitados en banda.

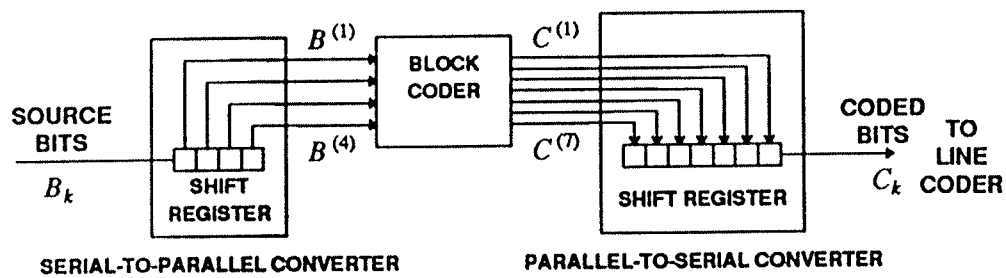


Figure 11-5. A block coder collects k incoming bits in a shift register, codes them, and shifts them out serially to the line coder. The example shown is a $(n, k) = (7, 4)$ block code.

Ejemp:

- Distancia mínima
- ¿Errores de bit que pueden detectar y corregir?

Código 1: u_1 u_2 u_3 u_4
 0 1 1 0 0 1, 1 1 0 0 1 0 1, 0 0 1 0 1 1 1, 1 0 1 1 0 0 0

Código 2: 0 1 1 0 0 1, 1 0 0 1 0 1, 0 0 1 0 1 1, 0 1 0 1 0 0 1

$$\left. \begin{array}{l} d_H(u_1, u_2) = 4 \\ d_H(u_1, u_3) = 4 \\ d_H(u_1, u_4) = 4 \\ d_H(u_2, u_3) = 4 \\ d_H(u_2, u_4) = 4 \\ d_H(u_3, u_4) = 4 \end{array} \right\} \text{Código 1}$$

$$d_{\min} = 4$$

detectar 3 bits erróneos
 corregir 1 bit erróneo

$$\left. \begin{array}{l} d_H(u_1, u_2) = 4 \\ d_H(u_1, u_3) = 4 \\ d_H(u_1, u_4) = 1 \\ d_H(u_2, u_3) = 4 \\ d_H(u_2, u_4) = 3 \\ d_H(u_3, u_4) = 5 \end{array} \right\} \text{Código 2}$$

$$d_{\min} = 1$$

detectar 0 bits erróneos
 corregir 0 bits erróneos

Ejemp:

Código de bloques de n bits en paridad par
 $B(n, k)$

Calcular la probabilidad de aceptación de una palabra (throughput) teniendo en cuenta que la probabilidad de error por bit es BER

P_{CA} ("Code Acceptance")

¿Tendría sentido usar n arbitrariamente grande?



$$P_{ca} = (1 - \text{BER})^n + \underbrace{\binom{n}{2} (1 - \text{BER})^{n-2} (\text{BER})^2 + C_{n,4} (1 - \text{BER})^{n-4} \text{BER}^4 + \dots}_{\substack{\uparrow \\ \text{muy pequeño}}}$$

$$\approx (1 - \text{BER})^n$$

Si n se hace muy grande, disminuye la probabilidad de aceptar una palabra.

$\text{BER} = f(\text{SNR}) \rightarrow$ si $n \uparrow$, la duración de los bits es menor (igual régimen binario) $\rightarrow \text{SNR} \downarrow \Rightarrow \text{BER} \uparrow$

Ejemplo:

$$B(4, 3)$$

$$\text{BER} = 5 \cdot 10^{-3}$$

a) Hallar la probabilidad de falsa alarma (hay errores pero no me enteré), P_{FA}

b) Probabilidad de detección $\rightarrow$ al revés: no hay errores y crea que sí

$$P_{FA} = C_{n,2} (1 - \text{BER})^{n-2} \cdot \text{BER}^2 + C_{n,4} (1 - \text{BER})^{n-4} \cdot \text{BER}^4$$

$$= \binom{4}{2} (1 - \text{BER})^2 \cdot \text{BER}^2 + \binom{4}{4} (1 - \text{BER})^0 \cdot \text{BER}^4$$

$$= 6 \cdot (1 - \text{BER})^2 \cdot \text{BER}^2 + \text{BER}^4$$

$$\approx 6 \cdot \text{BER}^2 = 150 \cdot 10^{-6} = 15 \cdot 10^{-4}$$

$$P_{\text{detección}} = \binom{4}{1} (1 - \text{BER})^3 \cdot \text{BER} + \binom{4}{3} (1 - \text{BER}) \cdot \text{BER}^3$$

$$= 4 \cdot (1 - \text{BER})^3 \cdot \text{BER} + 4 \cdot (1 - \text{BER}) \cdot \text{BER}^3$$

$$\approx 4 \cdot \text{BER} = 2 \cdot 10^{-2}$$

Ejemplo:

Imagen de TV en blanco y negro $\rightarrow$ 211.000 píxeles

(PIXEL = Picture Element)

8 niveles de brillo (equiprobables)

a) ¿Contenido en información de la imagen?

b) ¿Régimen binario si se envían 30 cuadros/s?

c) Si el espinal consta de 50.000 entradas de diccionario (1111) equiprobables, calcular la información de 1000 palabras

d) ¿Es verdad que una imagen vale más que 1.000 palabras? (111111)

a) 8 niveles $\Rightarrow$ 3 bits (son equiprobables)

$$I(\text{bits}) = 211.000 \cdot 3 \text{ bits/píxel} = 633.000 \text{ bits}$$

$$b) R = 633.000 \cdot 30 = 18.990.000 \text{ bps}$$

$$c) p = \frac{1}{50.000} \rightarrow I(\text{palabra}) = \log_2 50.000 = 15,61 \text{ bits/palabra}$$

$$I_{1000} = 15,61 \text{ kbits}$$

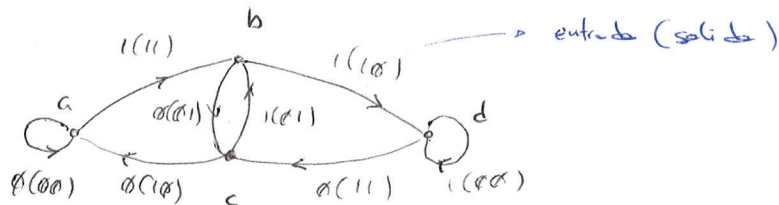
d) Porzi

1.5.2- Códigos Convolucionales

Incorporar memoria para corrección

No implican necesariamente añadir bits adicionales

Autómatas:



no sería posible obtener la secuencia "1111"

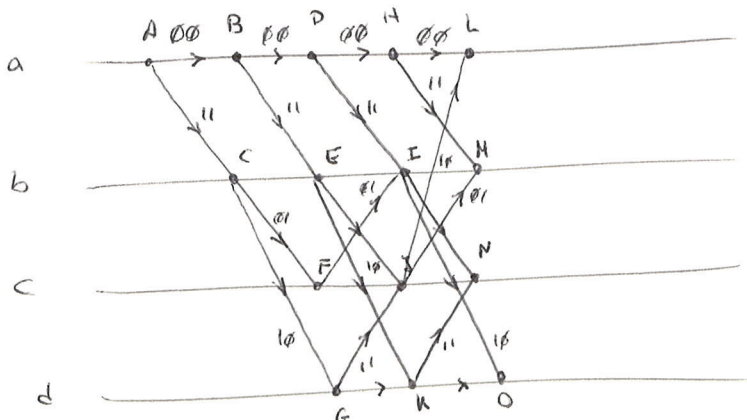
Se miden las distancias de Hamming entre la secuencia recibida y todas las secuencias posibles.

Cada camino de una distancia $\rightarrow$ coger la más corta (algoritmo de Viterbi)

Se puede combinar codificadores de bloques y convolucional $\rightarrow$ Trellis

1.5.3- Trellis (Modulador Codificado)

Diagrama de rejilla

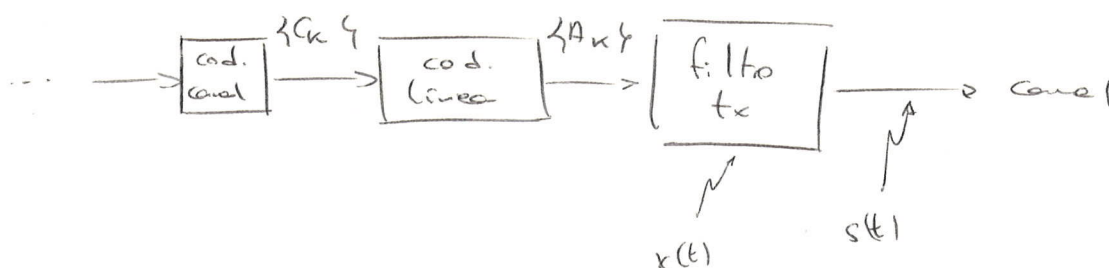


el número de ramas crece de forma exponencial (de un punto a otro siempre aparecen 2 ramas nuevas)

Trellis $\rightarrow$ codificación convolucional sobre algunos bits y bloques para otros

1.6- CODIFICACIÓN DE LÍNEA

Persigue facilitar el sincronismo con el receptor y darle a la señal una conformación espectral independiente de la fuente de transmisión.

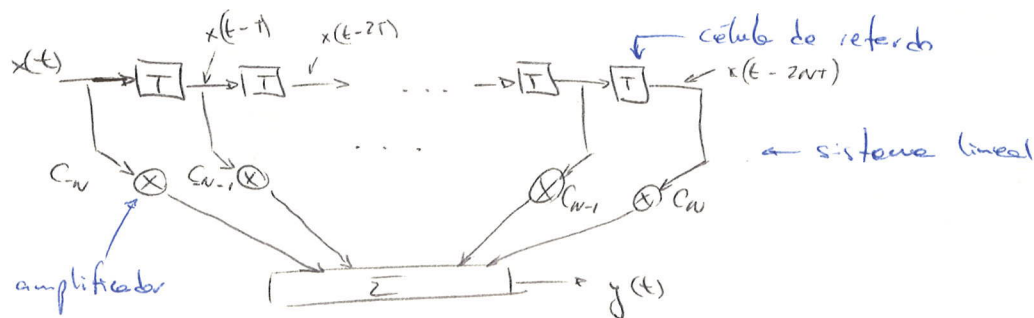


$$S_{ss}(f) = S_{xx}(f) \cdot C(f)$$

(transparencias)

1.7- IGUALACIÓN. FILTRO TRANSVERSAL

Hacer que la salida cumpla algo (como el criterio de Nyquist)



$$h(t) = C_{-N} \delta(t) + C_{-N-1} \delta(t-T) + \dots + C_N \delta(t-2NT)$$

$$= \sum_{-N}^N C_n \cdot \delta(t - (n+N)T)$$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \sum_{-N}^N C_n \cdot e^{-j\omega(n+N)T} = e^{-j\omega NT} \sum_{-N}^N C_n \cdot e^{-j\omega nT}$$

conseguir la función de la frecuencia que se quiere

Es muy sencillo, lineal y adaptativo (cambiando los C_n , si se es automático).

Problema: sincronización → símbolo
→ palabra
→ trama

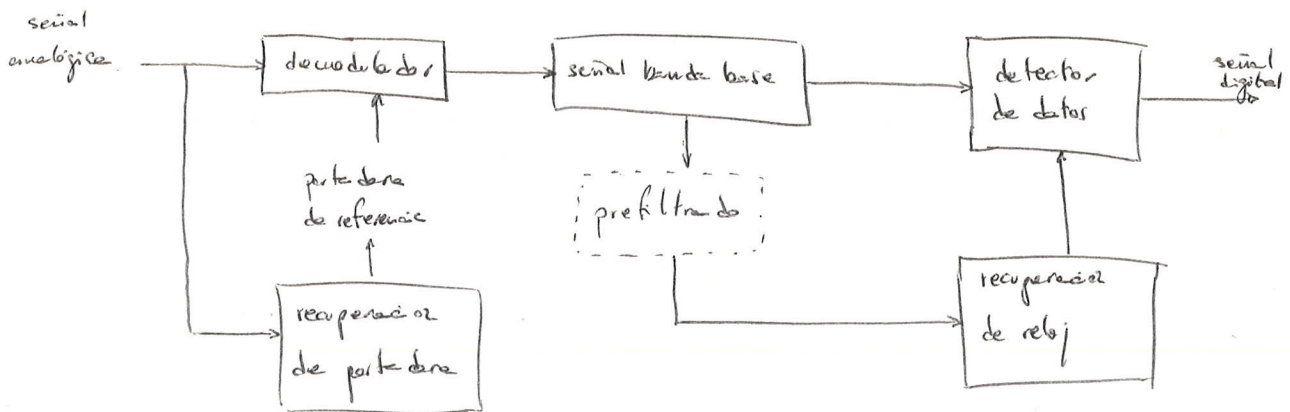
crítico en comunicaciones digitales

- averiguar la frecuencia de la modulación
(sincronización física).

Con circuitos PLL

- sincronización de símbolo → sincronización de palabra
→ sincronización de bit

Los códigos RZ permiten transmitir el reloj original



Notificación de los C_n :

- automática: una vez por comunicación
- adaptativa: minimizando el error, notifiando los coeficientes constantemente.

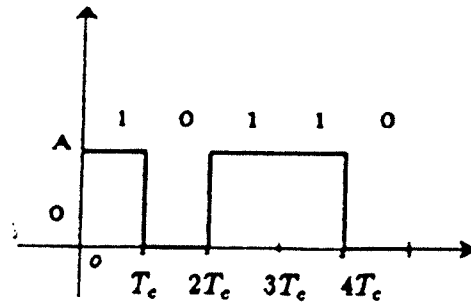


Figura 1.3: Código UNIPOLAR-NRZ

Componente continua $A/2$

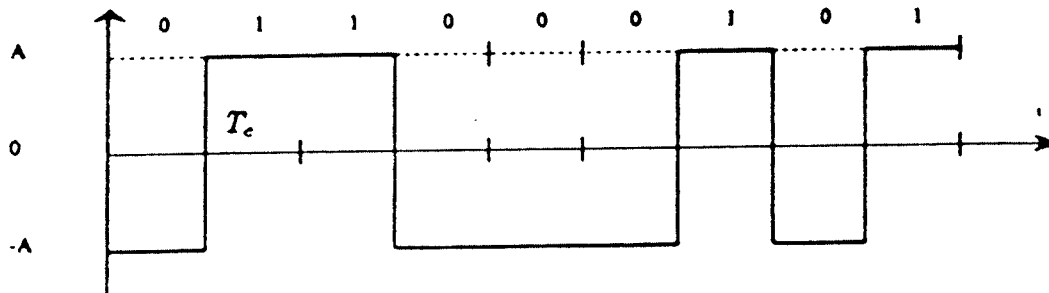


Figura 1.4: Código POLAR-NRZ

Componente continua nula

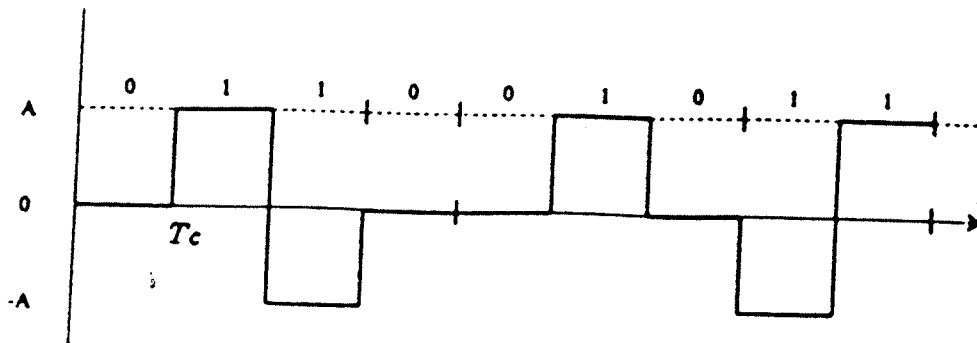


Figura 1.5: Código BIPOLAR *componente continua = 0*
→ tiene un nivel: se alterna entre
A y -A por cada 1.

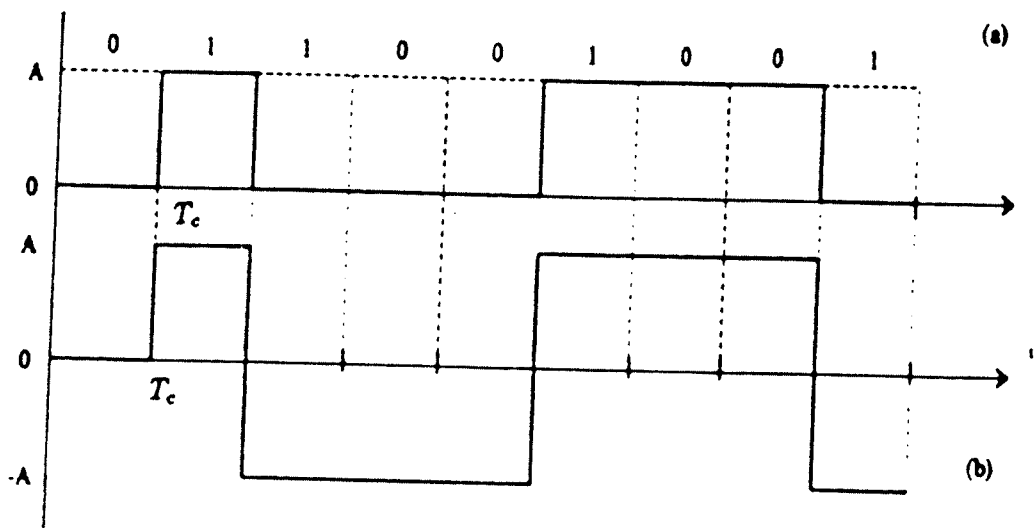


Figura 1.6: Código DIFERENCIAL-NRZ.

(a) Unipolar;

(b) Polar

Cuando llega un 1 cambia el nivel

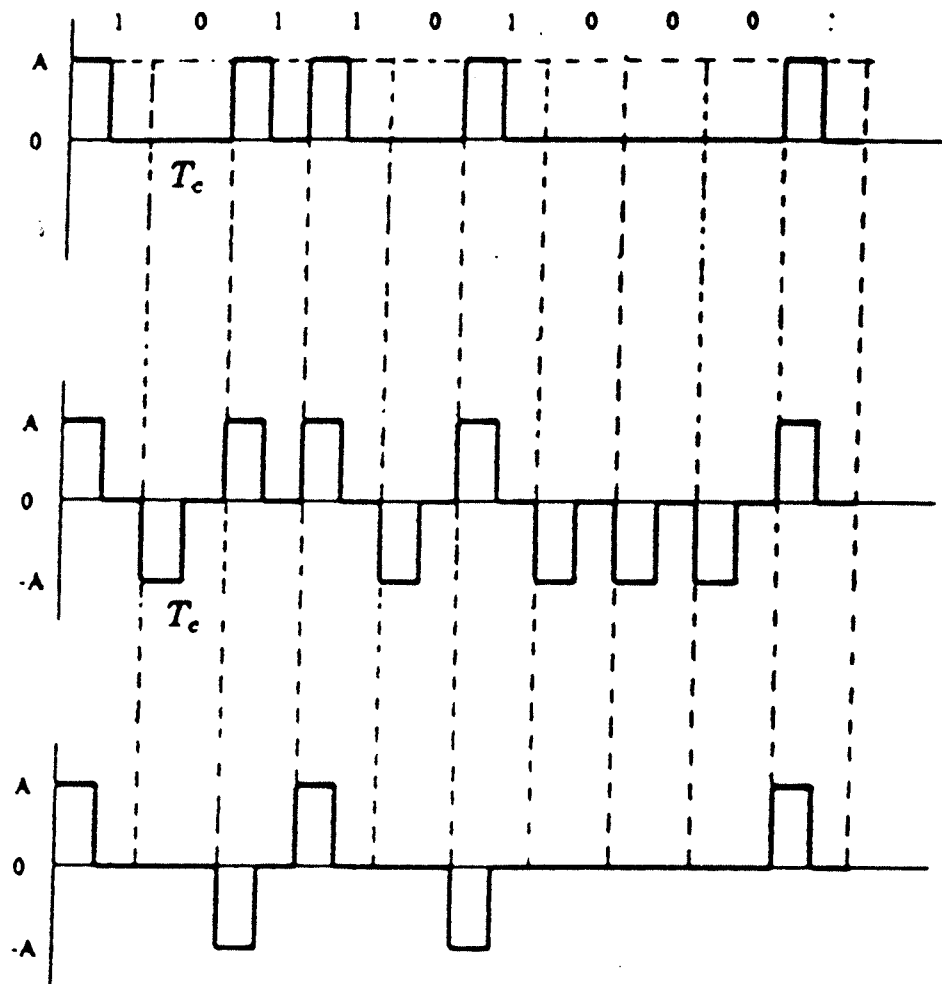


Figura 1.7: Código RZ.

- (a) Unipolar
- (b) Polar
- (c) Bipolar-RZ o AMI

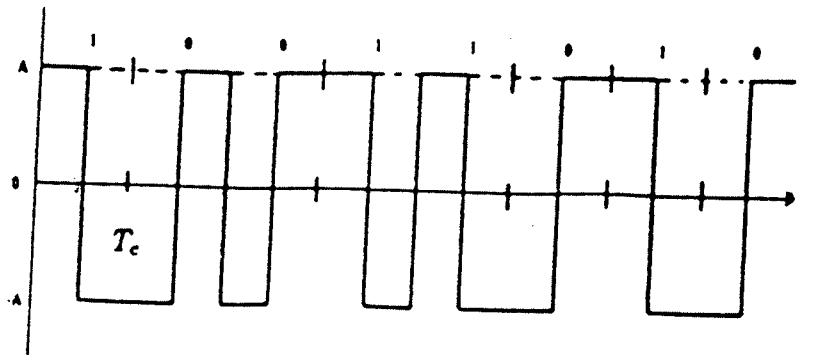


Figura 1.8: Código Manchester

$\lambda = 7$
 $\phi = 5$

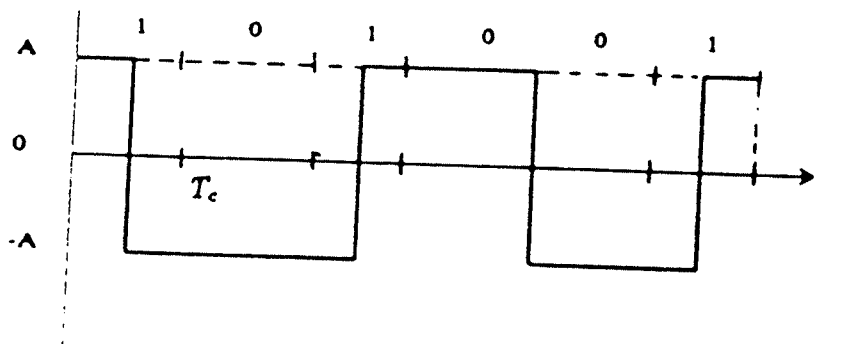


Figura 1.9: Código MILLER o de modulación por retardo

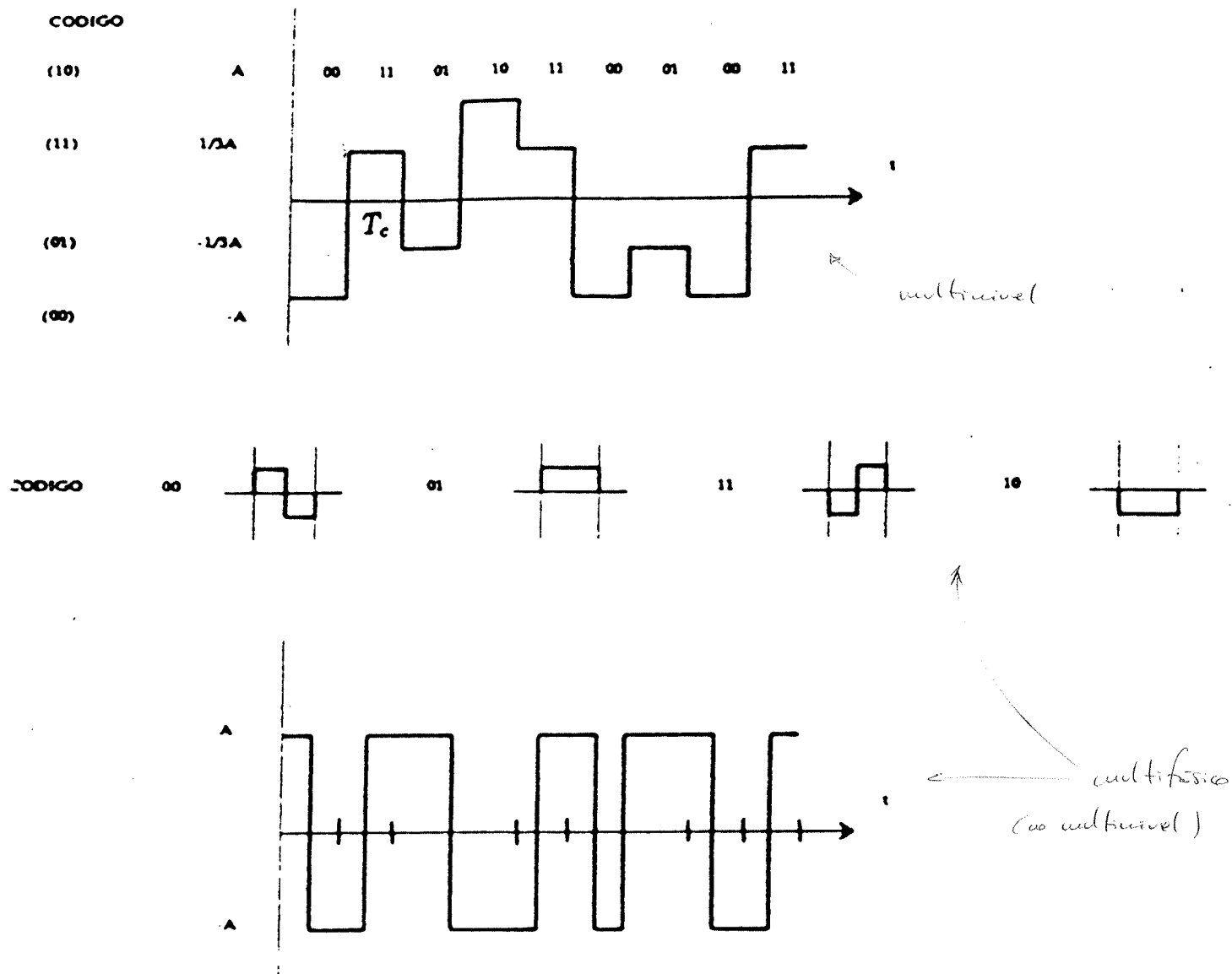
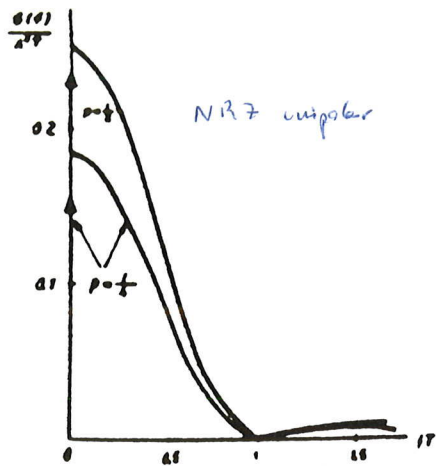
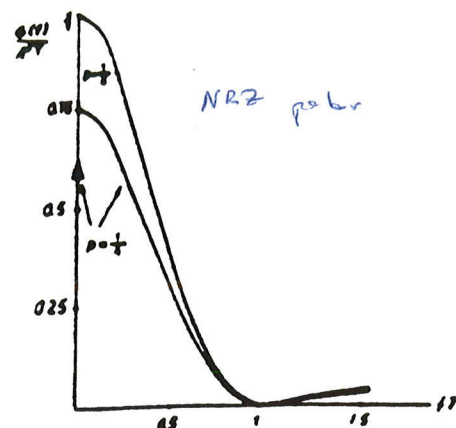


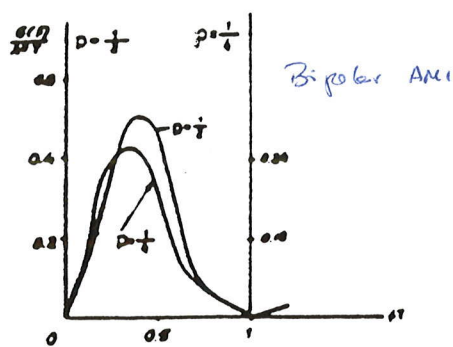
Figura 1.10: Ejemplos de codificación multinivel



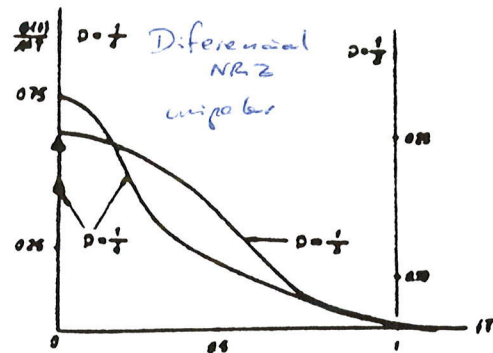
DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA PARA EL CODIGO NRZ-NEUTRAL CON $p = 1/4$ y $p = 1/2$.



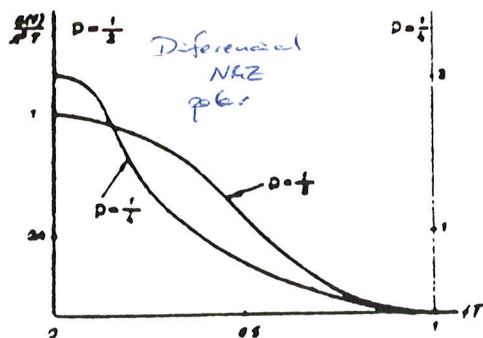
DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO NRZ-POLAR PARA $p = 1/2$ y $p = 1/4$.



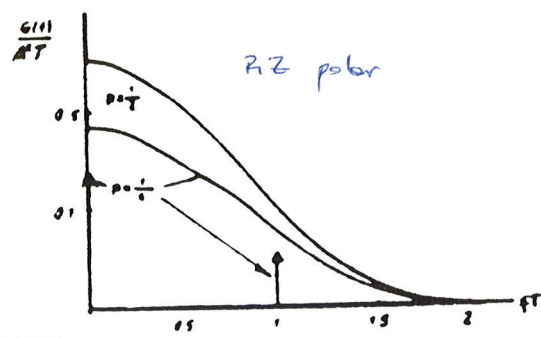
DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO NRZ-BIPOLAR PARA $p = 1/2$ y $p = 1/4$.



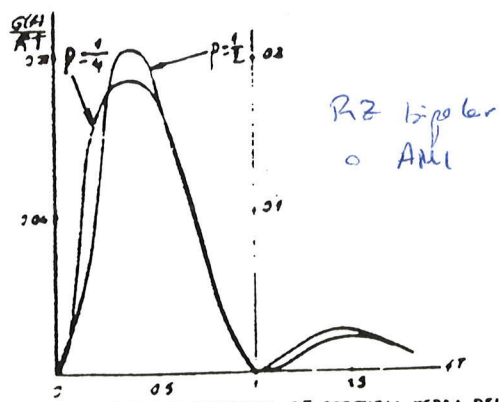
DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO DIFERENCIAL NRZ-M NEUTRAL PARA $p = 1/2$ y $p = 1/4$.



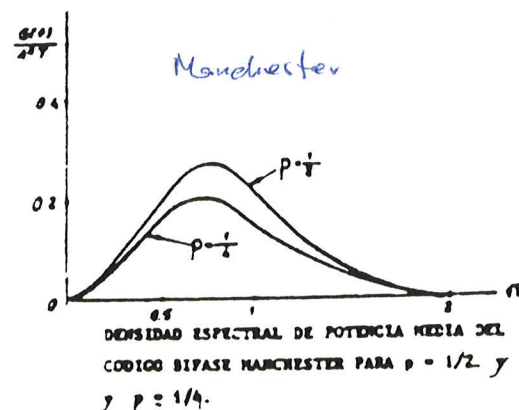
DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO DIFERENCIAL NRZ-M POLAR PARA $p=1/2$ y $p=1/4$.



DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO RZ-POLAR PARA $p=1/2$ y $p=1/4$.



DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO RZ-BIPOLAR O AMI PARA $p=1/2$ y $p=1/4$.



DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIA DEL CODIGO BIFASE MANCHESTER PARA $p = 1/2$ y $p = 1/4$.

Figura 1.11: Espectros de diferentes códigos

