

TEMA 2: TEORÍA DE LA DECISIÓN

2.1. INTRODUCCIÓN

2.2. TEORÍA DE LA DECISIÓN. TEST DE HIPÓTESIS

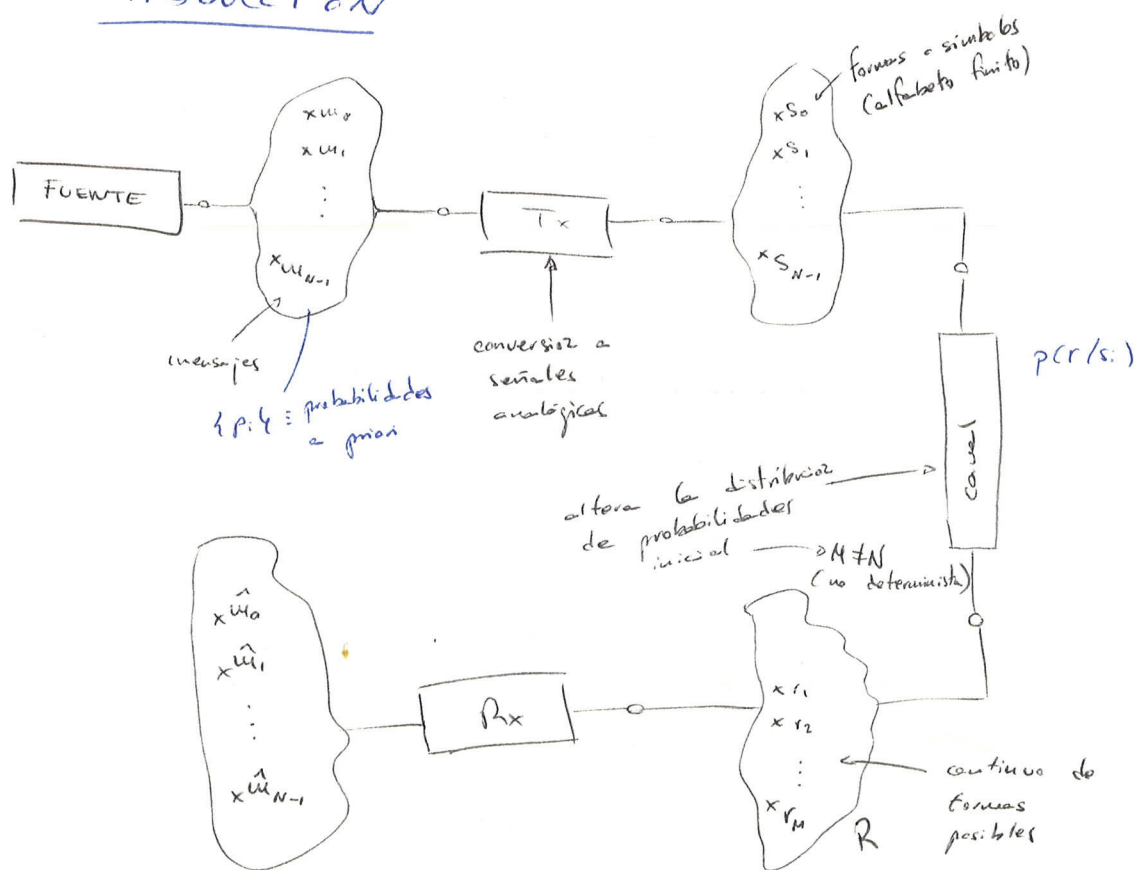
2.3. CRITERIOS DE DECISIÓN

2.3.1. CASO BINARIO

2.3.2. GENERALIZACIÓN A "N" HIPÓTESIS

2.4. SUFICIENCIA E IRRELEVANCIA ESTADÍSTICA. "OPTIMALIDAD"

2.1 - INTRODUCCIÓN



$u_i \rightarrow \hat{u}_i \Rightarrow \text{certidumbre}$

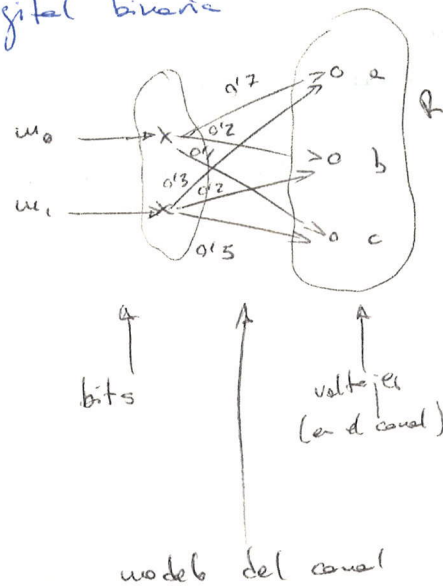
Objetivos:

- construir el receptor (regla de decisión)
- evaluación de prestaciones (probabilidad de error) → criterio de "óptimalidad"

Necesitamos conocimiento de: - frente
- canal

Ejemplo:

frente digital binario



$p(r/s) \equiv$ probabilidades parciales / condicionales

bits → probabilidades a priori: $\{p_0, p_1\}$

→ canal: modelo probabilístico, $\{p(a/u_0), p(b/u_0), p(c/u_0), p(a/u_1), p(b/u_1), p(c/u_1)\}$

Dado un voltaje (a, b, c), decidir si se transmitió u 1 o u 0 ⇒ hay error (evaluado)

8 receptores posibles → 1 óptimo

$$\begin{cases} p(u_0, a) \geq p(u_1, a) \\ p(u_0, b) \geq p(u_1, b) \\ p(u_0, c) \geq p(u_1, c) \end{cases}$$

primera aproximación intuitiva

Hay que tener en cuenta las probabilidades de w_0 y w_i .

Dados 2 sucesos A, B :

$$P(A, B) = P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(a/w_0) \cdot p_0 \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(a/w_i) \cdot p_i$$

esto admite otra versión:

$$P(w_0/a) \cdot \cancel{p(a)} \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(w_i/a) \cdot \cancel{p(a)}$$

$$\Rightarrow \left[P(w_0/a) \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(w_i/a) \right]$$

Criterio del máximo posteriori (MAP)

$$\begin{cases} P(w_0/b) \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(w_i/b) \\ P(w_0/c) \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(w_i/c) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(a/w_0) \cdot p_0 \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(a/w_i) \cdot p_i \\ P(b/w_0) \cdot p_0 \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(b/w_i) \cdot p_i \\ P(c/w_0) \cdot p_0 \stackrel{\hat{w}_0}{\underset{\hat{w}_i}{\geq}} P(c/w_i) \cdot p_i \end{cases}$$

$$a \rightarrow \hat{w}_0$$

$$b \rightarrow \hat{w}_0$$

$$c \rightarrow \hat{w}_i$$

dfe?

Suponiendo $b \rightarrow \hat{u}_1$,

• si genero el mensaje u_0 , y se recibe a , este bien,
pero si se recibe b o c , me equivoco:

$$P_e = \underbrace{p(e/u_0)}_{\substack{p(b/u_0) + p(c/u_0) \\ 0.3}} \cdot p_0 + \underbrace{p(e/u_1)}_{0.3} \cdot p_1$$

$$P_e = 0.3(p_0 + p_1) \stackrel{\uparrow}{=} 0.3$$

$$p_0 = p_1 = 1/2$$

Si $b \rightarrow \hat{u}_0$

$$P_e = 0.1 \cdot p_0 + 0.5 p_1 \stackrel{\uparrow}{=} 0.3$$

$$p_0 = p_1 = 1/2$$

$$\text{Si } p_0 = 0.1$$

$$p_1 = 0.9$$

$$\begin{aligned} b \rightarrow \hat{u}_1 &\Rightarrow P_e = 0.3 \\ b \rightarrow \hat{u}_0 &\Rightarrow P_e = 0.46 \end{aligned} \left\{ \rightarrow \text{no sería correcta} \right.$$

$$p(a/u_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} p(a/u_1) \cdot p_1 \rightarrow 0.7 \cdot 0.1 \stackrel{?}{>} 0.3 \cdot 0.9 \rightarrow 0.07 < 0.27$$

$a \rightarrow u_1$

$$p(b/u_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} p(b/u_1) \cdot p_1 \rightarrow 0.02 < 0.18 \Rightarrow b \rightarrow u_1$$

$$p(c/u_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} p(c/u_1) \cdot p_1 \rightarrow 0.01 < 0.45 \Rightarrow c \rightarrow u_1$$

Sólo hay falsas alarmas: $P_e = p(e/u_0)p_0 + p(e/u_1)p_1 = p_0 = 0.1$ /

2.2 - TEORÍA DE LA DECISIÓN. TEST DE HIPÓTESIS

$\{u_0, u_1\} \rightarrow \{p_0, p_1\}$ $\{ \equiv \text{probabilidades a priori}$
 $r \in R$

$\hookrightarrow$ conjunto de señales recibidas, continuo

$u_0 \rightarrow \hat{u}_1$

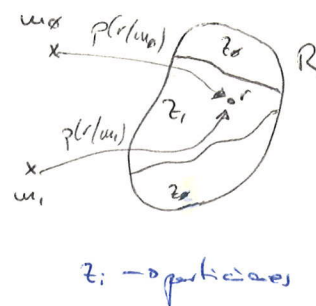
FALSA ALARMA (α)

(guerra $\Rightarrow$ enemigo $\rightarrow$ civil?)

$u_1 \rightarrow \hat{u}_0$

PÉRDIDA (β)

Cuando el enemigo y
no es un civil)



$Z_i \rightarrow$ particiones

$\{Z_i\} \quad R = \bigcup_i Z_i$

$\begin{cases} \alpha \equiv \text{probabilidad de falsa alarma} \\ \beta \equiv \text{probabilidad de pérdida} \end{cases}$

$$\alpha = \int_{Z_1} p(r/u_0) dr$$

$$\beta = \int_{Z_0} p(r/u_1) dr$$

Dada r , obtener $\hat{u}_i$

$r \rightarrow \hat{u}_i ? \Rightarrow$ criterios de decisión

2.3- CRITERIOS DE DECISIÓN

2.3.1- Caso binario

Coste asociado a decidir u_i cuando se ha transmitido u_j :

$$C_{ij} \rightarrow C[\hat{u}_i, u_j]$$

$$\underline{C_{00}}, C_{01}, C_{10}, \underline{C_{11}}$$

$\rightarrow$ coste medio: $E[C]$

decisión óptima para coste medio mínimo

$$E[C] = C_{00} \cdot (1-\alpha) \cdot p_0 + C_{01} \cdot \alpha \cdot p_0 + C_{11} \cdot (1-\beta) \cdot p_1 + C_{10} \cdot \beta \cdot p_1$$

$$p[\hat{u}_0, u_0] = p(\hat{u}_0/u_0) \cdot p_0 = (1-\alpha) p_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \int_{z_1} p(r/u_0) dr = 1 - \int_{z_0} p(r/u_0) dr \\ \beta = \int_{z_0} p(r/u_1) dr \end{array} \right.$$

$$E[C] = \underbrace{C_{11} p_1 + C_{00} p_0}_{\text{no se puede variar (todo de las)}}$$

$+ \int_{z_0} \left((C_{01} - C_{11}) p(r/u_0) p_0 - (C_{10} - C_{00}) p(r/u_0) p_0 \right) dr$
 definir z_0 para minimizar el valor de la integral

$\Downarrow$
minimizar el coste medio

$$\begin{aligned}
 c_{01} - c_{11} > 0 &\rightarrow r \in Z_0 / \text{integrando negativo} \\
 c_{10} - c_{00} > 0 &r \in Z_1 / \text{integrando positivo}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c_{01} - c_{11}) p(r/w_0) p_0 - (c_{10} - c_{00}) p(r/w_1) p_1 &\stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} 0 \\
 (c_{01} - c_{11}) p(r/w_0) p_0 &\stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} (c_{10} - c_{00}) p(r/w_1)
 \end{aligned}$$

$$\Lambda(r) = \frac{p(r/w_0)}{p(r/w_1)} \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \frac{(c_{01} - c_{11}) p_0}{(c_{10} - c_{00}) p_1}$$

receptor en el coste medio mínimo

CRITERIO DE BAYES

Si se hay costes asociados: $(c_{01} = c_{10}, c_{00} = c_{11})$

$$\Lambda(r) = \frac{p(r/w_0)}{p(r/w_1)} \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \frac{p_0}{p_1} \quad \text{cociente de probabilidad}$$

$$p(r/w_0) \cdot p_0 = p(w_0/r) \cdot p(r)$$

$$\frac{p(w_0/r)}{p(w_1/r)} \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} 1 \rightarrow p(w_0/r) \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} p(w_1/r)$$

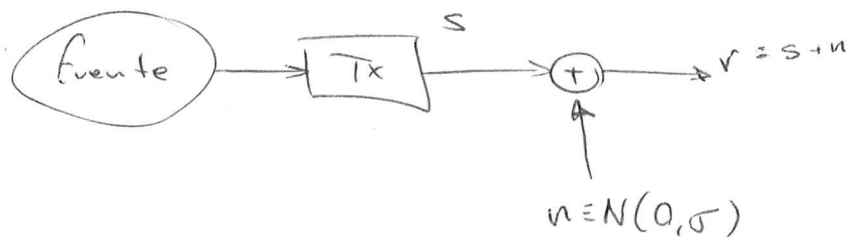
criterio de maximum a posteriori (MAP)

$$\left[p(r/w_0) \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} p(r/w_1) \right] \quad \text{Criterio de "maximum likelihood"} \\
 \text{(máxima probabilidad)}$$

Ejemplo:

transmisor binario $\begin{cases} u_0, p_0, S_0 = 0V \\ u_1, p_1, S_1 = EV \end{cases}$

efecto del canal $\rightarrow$ ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ^2



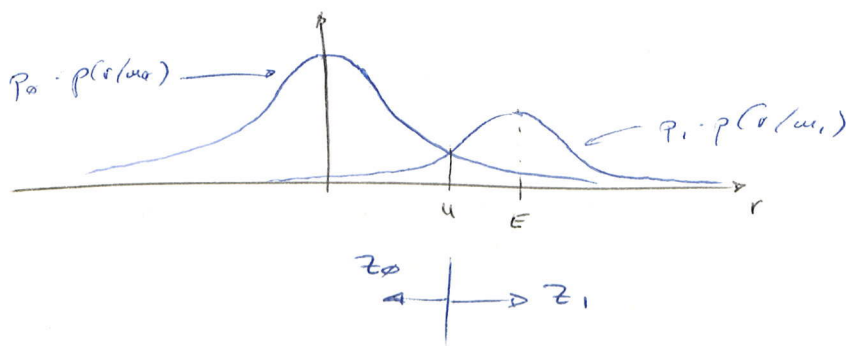
- Donar el criterio de decisión y calcular la P_e .
- Lo mismo si el receptor toma N muestras estadísticamente independientes entre sí y de la señal.

a) $\rightarrow$ maximum a posteriori

$$\frac{p(r/u_0)}{p(r/u_1)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{p_1}{p_0}$$

$$p(r/u_0) \cdot p_0 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} p(r/u_1) \cdot p_1$$

$$\begin{cases} p(r/u_0) = p_n(r - 0) \\ p(r/u_1) = p_n(r - E) \end{cases}$$



$u \equiv$ umbral

Por tanto el criterio de decisión es:

$$\begin{cases} r > u \Rightarrow \hat{u}_i = z_1 \\ r < u \Rightarrow \hat{u}_i = z_0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} p(r/u_0) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ p(r/u_1) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-E)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \right.$$

$$p(u/u_0) \cdot p_0 = p(u/u_1) \cdot p_1$$

$$e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cdot p_0 = e^{-\frac{(u-E)^2}{2\sigma^2}} \cdot p_1 \rightarrow \ln p_0 - \frac{u^2}{2\sigma^2} = \ln p_1 - \frac{(u-E)^2}{2\sigma^2}$$

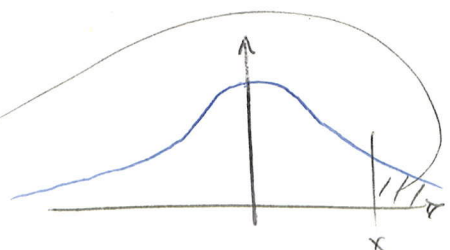
$$\rightarrow u^2 = \cancel{u^2} + E^2 - 2uE - 2\sigma^2 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

$$\hookrightarrow u = \frac{E}{2} - \frac{\sigma^2}{E} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

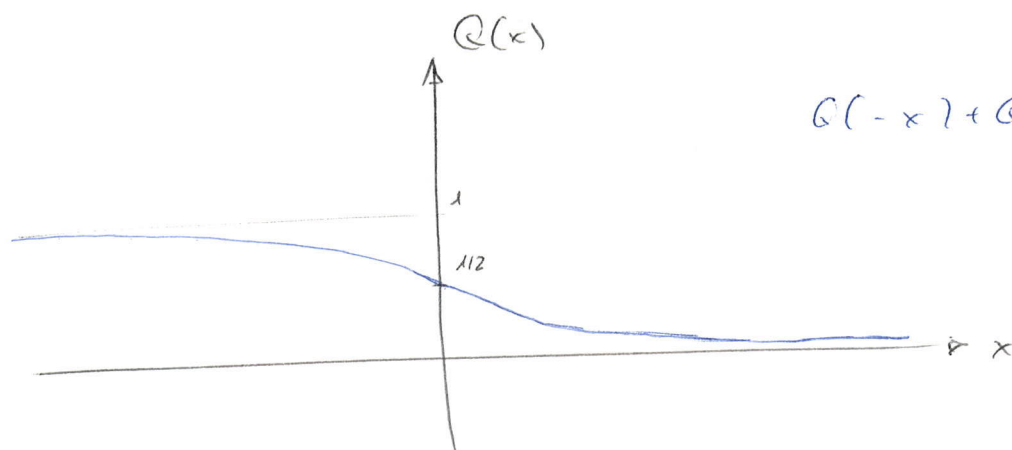
$$\boxed{\begin{matrix} H_1 \\ r \geq u \\ H_0 \end{matrix}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_u^\infty p(r/u_0) dr = p(e/u_0) \\ \beta &= \int_{-\infty}^u p(r/u_1) dr = p(e/u_1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} p_e &= \alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 \end{aligned} \right.$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du$$



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = 1 - Q(x)$$



$$Q(-x) + Q(x) = 1$$

$$P_e = P_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-r^2/2\sigma^2} dr + P_1 \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-E)^2}{2\sigma^2}} dr$$

$r \rightarrow \xi = \frac{r-E}{\sigma}$

Change: $N(0, 1)$

$$r \rightarrow \xi = \frac{r}{\sigma}, \quad d\xi = \frac{dr}{\sigma}$$

$$P_e = P_0 \underbrace{\int_{u/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi}_{Q\left(\frac{u}{\sigma}\right)} + P_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{u/\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi}_{1 - Q\left(\frac{u-E}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{E-u}{\sigma}\right)}$$

$$P_e = P_0 \cdot Q\left(\frac{u}{\sigma}\right) + P_1 \cdot Q\left(\frac{E-u}{\sigma}\right)$$

$$\text{Si } P_0 = P_1 = 1/2, \quad u = E/2 : P_e = Q\left(\frac{E}{2\sigma}\right)$$

17

3° TEL. SUP.

0,09€

$$\Lambda(\mathbf{R}) \triangleq \frac{p_{\mathbf{r}|H_1}(\mathbf{R}|H_1)}{p_{\mathbf{r}|H_0}(\mathbf{R}|H_0)}$$

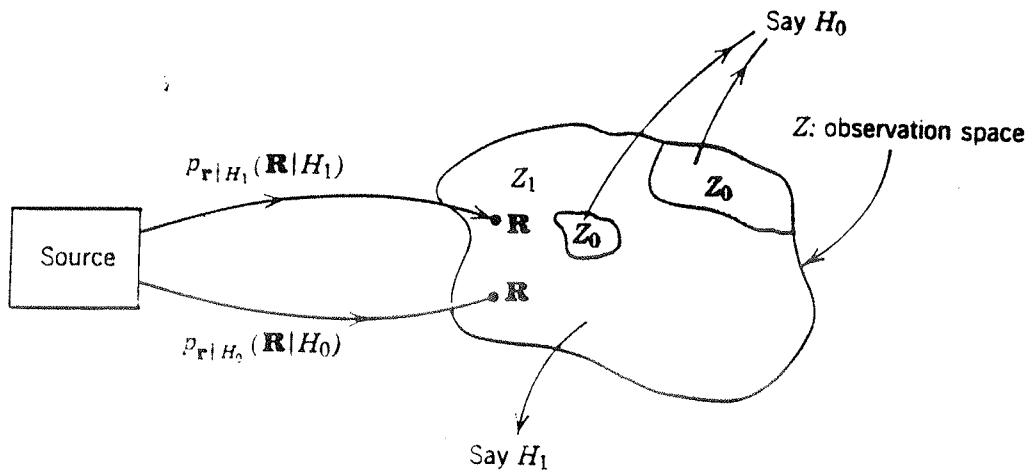


Fig. 2.4 Decision regions.

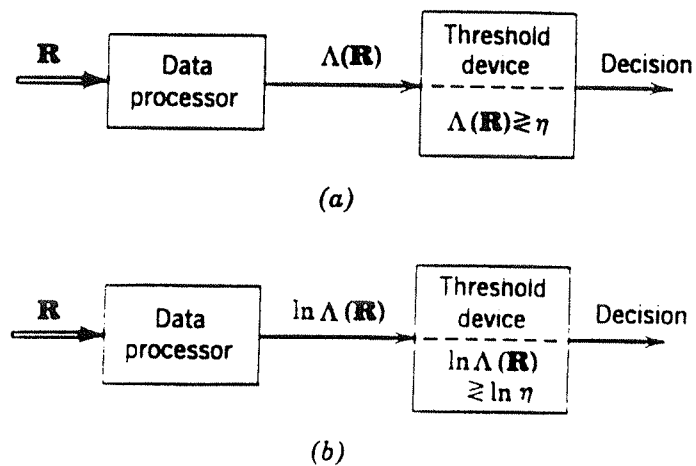


Fig. 2.5 Likelihood ratio processors.

Tabla de la Función $Q(\alpha)$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

0,0	5,000 E-1	3,0	1,350	4,5	3,398	6,0	9,868 E-10
0,1	4,602	3,05	1,144 E-3	4,55	2,682	6,1	5,304
0,2	4,207	3,1	9,676 E-4	4,6	2,113	6,2	2,824
0,3	3,821	3,15	8,164	4,65	1,659	6,3	1,489 E-10
0,4	3,446	3,2	6,872	4,7	1,301	6,4	7,770 E-11
0,5	3,085	3,25	5,770	4,75	1,017 E-6	6,5	4,017
0,6	2,743	3,3	4,834	4,8	7,934 E-7	6,6	2,056
0,7	2,420	3,35	4,040	4,85	6,173	6,7	1,042 E-11
0,8	2,119	3,4	3,369	4,9	4,792	6,8	5,232 E-12
0,9	1,841	3,45	2,803	4,95	3,710	6,9	2,601 E-12
1,0	1,587	3,5	2,326	5,0	2,867	7,0	1,280 E-12
1,1	1,357	3,55	1,927	5,05	2,209	7,1	6,239 E-13
1,2	1,151 E-1	3,6	1,591	5,1	1,698	7,2	3,011 E-13
1,3	9,680 E-2	3,65	1,311	5,15	1,302 E-7	7,3	1,439 E-13
1,4	8,076	3,7	1,078 E-4	5,2	9,966 E-8	7,4	6,811 E-14
1,5	6,681	3,75	8,842 E-5	5,25	7,581	7,5	3,192 E-14
1,6	5,480	3,8	7,235	5,3	5,791	7,6	1,481 E-14
1,7	4,457	3,85	5,906	5,35	4,396	7,7	6,805 E-15
1,8	3,593	3,9	4,810	5,4	3,333	7,8	3,096 E-15
1,9	2,872	3,95	3,907	5,45	2,520	7,9	1,395 E-15
2,0	2,275	4,0	3,167	5,5	1,899	8,0	6,223 E-16
2,1	1,786	4,05	2,561	5,55	1,428	8,1	2,749 E-16
2,2	1,390	4,1	2,066	5,6	1,072 E-8	8,2	1,202 E-16
2,3	1,072 E-2	4,15	1,663	5,65	8,025 E-9	8,3	5,207 E-17
2,4	8,198 E-3	4,2	1,335	5,7	5,991	8,4	2,233 E-17
2,5	6,210	4,25	1,069 E-5	5,75	4,461	8,5	9,483 E-18
2,6	4,661	4,3	8,541 E-6	5,8	3,316	8,6	3,987 E-18
2,7	3,467	4,35	6,817	5,85	2,459	8,7	1,660 E-18
2,8	2,555	4,4	5,413	5,9	1,818	8,8	6,864 E-19
2,9	1,866	4,45	4,293	5,95	1,341 E-9	8,9	2,793 E-19

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

donde

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

Aproximación

$$Q(\alpha) = \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha} \left[1 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1 \cdot 3}{\alpha^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{\alpha^6} + \dots \right]$$

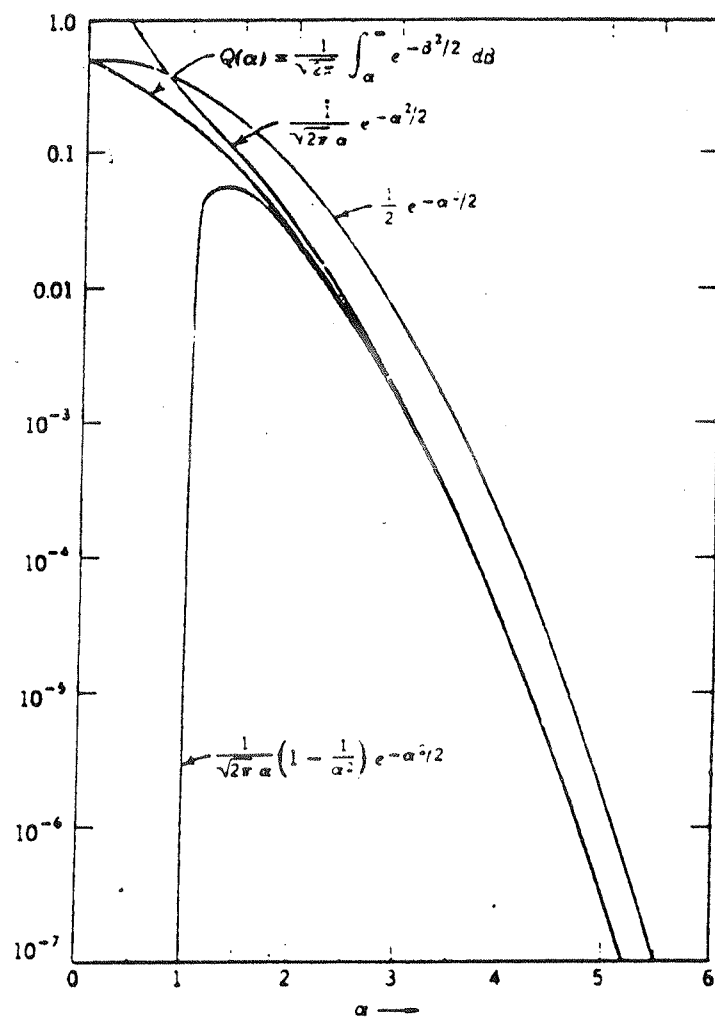


Fig. 1.5. - La función $Q(\alpha)$ y sus tres límites

b) Se toma un vector de muestras

$$\bar{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T$$

MAP:
$$P(\bar{r}/u_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} P(\bar{r}/u_1) \cdot p_1$$

$$P(r_1, r_2, \dots, r_N / u_0) p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} P(r_1, r_2, \dots, r_N / u_1) \cdot p_1$$

$$P(r_1 / u_0) \cdot P(r_2 / u_0) \cdot \dots \cdot P(r_N / u_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} P(r_1 / u_1) \cdot \dots \cdot P(r_N / u_1) \cdot p_1$$

El tipo es el mismo para todas las r_k , pero el ruido w es el mismo.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}} \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_1-E)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_N-E)^2}{2\sigma^2}} \cdot p_1$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_k r_k^2} \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_k (r_k - E)^2} \cdot p_1$$

logaritmo

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_k r_k^2 + \ln p_0 \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_k (r_k - E)^2 + \ln p_1$$

$$\sum_k r_k^2 - 2\sigma^2 \ln \frac{p_0}{p_1} \stackrel{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \sum_k (r_k - E)^2 = \sum_k (r_k^2 - 2Er_k + E^2)$$

$$= \sum_k r_k^2 - 2E \sum_k r_k + N \cdot E^2$$

$$\sum_k r_k \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \frac{N \cdot E}{2} + \frac{\sigma^2}{E} \ln \frac{p_0}{p_1}$$

Haciendo la media:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_k r_k \sum_{H_0}^{H_1} \frac{E}{2} + \frac{\sigma^2}{N \cdot E} \ln \frac{P_1}{P_0} \right| \text{ muy parecido al caso unidimensional.}$$

Definimos una v.a.: $\rho = \frac{1}{N} \sum_k r_k$

es gaussiana (r_k es gaussiana)

$$\begin{cases} r_k \equiv N(0, \sigma) \\ \sum r_k \equiv N(0, \sigma \cdot \sqrt{N}) \\ \rho \equiv N(0, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) \end{cases}$$

$$p(\rho | \omega_0) = \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2 \cdot N}{2\sigma^2}}$$

$$p(\rho | \omega_1) = \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho - E)^2}{2\sigma^2} \cdot N}$$

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_k r_k \sum_{H_0}^{H_1} \frac{E}{2} + \frac{\sigma^2}{N \cdot E} \ln \frac{P_0}{P_1} = \tilde{u}$$

$$\Rightarrow \rho \sum_{H_0}^{H_1} \tilde{u}$$

$$P_e = p(e | \omega_0) \cdot P_0 + p(e | \omega_1) \cdot P_1$$

$$= P_0 Q\left(\frac{\tilde{u}}{\sigma \sqrt{N}}\right) + P_1 \cdot Q\left(\frac{E - \tilde{u}}{\sigma \sqrt{N}}\right)$$

Los argumentos son mayores $\Rightarrow p_e$ es menor

Por tanto, tomando un vector de muestras arbitrariamente grande, se consigue una p_e arbitrariamente pequeña.

2.3.2- Generalización a N hipótesis

Bayes

$$\hat{w} = \min_i \left(\sum_j c_{ij} \cdot p(w_j/r) \right)$$

$$c_{ij} \equiv C(\hat{w}_i, w_j)$$

$\hookrightarrow$ los costes son iguales para todos los casos posibles (simetría de costes):

Máximo a Posteriori:

$$\hat{w} = \max_i (p(w_i/r))$$

$$\hat{w} = \max_i (p(r/w_i) \cdot p_i)$$

$$\downarrow p_i = 1/N$$

Máxima Probabilidad
(Likelihood)

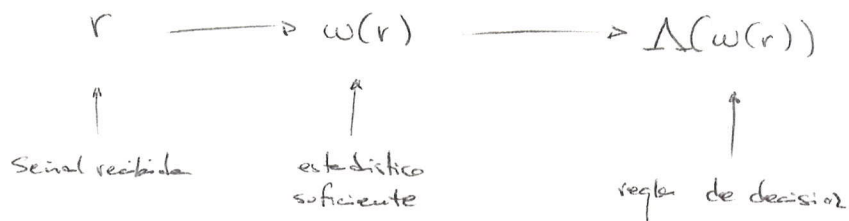
$$\hat{w} = \max_i (p(r/w_i))$$

2.4 - SUFICIENCIA E IRRELEVANCIA ESTADÍSTICA.

"OPTIMALIDAD"

Vale, si, eso...

De Luis:



Si podemos encontrar una parte de los datos recibidos que sean suficientes para decisión, sobran otros

datos $\rightarrow$ se puede simplificar el sistema

El estadístico suficiente será la expresión sencilla a la que podremos llevar a cabo una decisión.

Ejemplo:

Sistema de comunicaciones binario

$$p(r/u_0) = \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 1 \\ 2-r & 1 < r \leq 2 \end{cases}$$

$$p(r/u_1) = 1/4 \quad -1 \leq r \leq 3$$

Calcular la regla de decisión óptima y la p_e bajo la hipótesis de $p_0 = p_1$

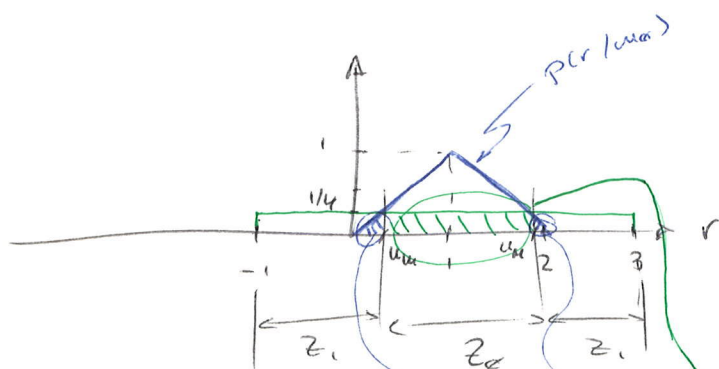
Costes { mejor receptor $\rightarrow$ Bayes

Simetría de costes $\rightarrow$ MAP

$$p_0 = p_1 \rightarrow \text{ML}$$

$$p(r/u_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} p(r/u_1)$$

- Regla de decisión:



$u_m \equiv$ umbral menor
 $u_M \equiv$ umbral mayor

$$u_m = 1/4$$

$$u_M = 7/4$$

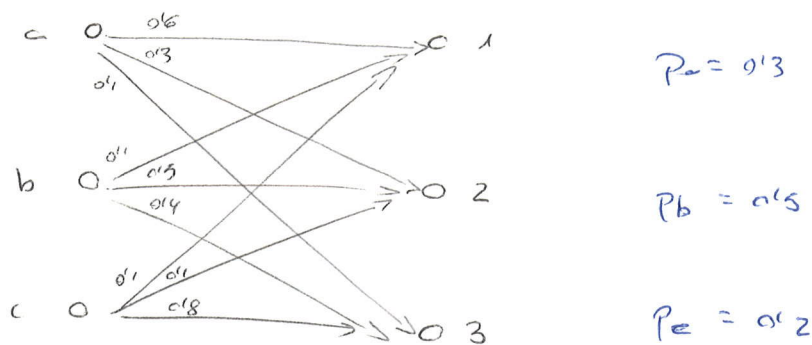
- Probabilidad de error:

$$p(e/u_0) = 1/16$$

$$p(e/u_1) = 3/8$$

$$p_e = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$$

Ejemplo:



- Regla de decisión óptima
- P_e
- ¿pe mínima sin utilizar el canal?

a) MAP

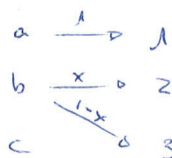
$$\hat{w} = \max_i (p(r/w_i) \cdot p_i)$$

$$\begin{cases} p(1/a) \cdot p_a = \text{0.18} \rightarrow \underline{\underline{1}} \\ p(1/b) \cdot p_b = 0.05 \\ p(1/c) \cdot p_c = 0.02 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow \underline{\underline{b}} \\ 3 &\rightarrow \underline{\underline{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P_e &= p(e/a) \cdot p_a + p(e/b) \cdot p_b + p(e/c) \cdot p_c \\ &= 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 = 0.37 \end{aligned}$$

c) Sin canal $\Rightarrow$



$P_e = 0.2$ (Cuando genera c siempre dig que es 'b')

De la résolution de problèmes:

1- Quel doit être:

$$p(r/w_0) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{0.5}}$$

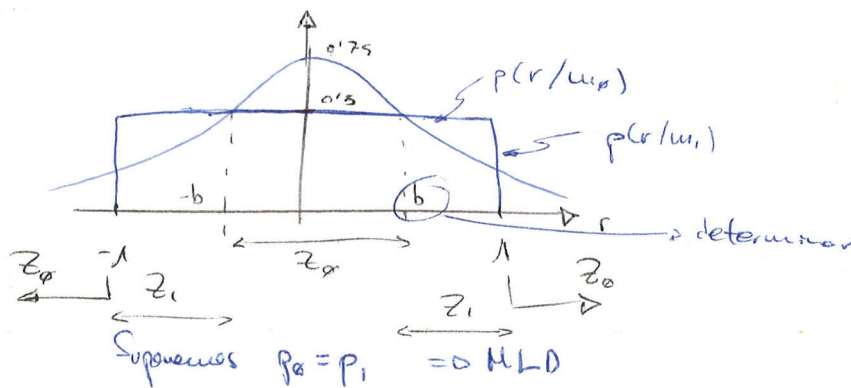
$$p(r/w_1) = 1/2 \quad |r| \leq 1$$

a) règle de décision

b) q_e ?

a) Minimum a posteriori:

$$p(r/w_0) \cdot p_0 \stackrel{H_0}{\geq} p(r/w_1) \cdot p_1$$



$$b \rightarrow \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{0.5}} = 1/2 \Rightarrow b = \pm$$

En general: ($p_0 \neq p_1$)

$$b = \sqrt{2\sigma^2 \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p_0}{p_1}\right)}$$

$$b) p_e = p(e/u_0) p_0 + p(e/u_1) p_1$$

$$p(e/u_0) = 2 \int_b^1 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr =$$

$$= 2 \left(Q\left(-\frac{b}{\sigma}\right) - Q\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \right)$$

$$p(e/u_1) = \int_{-b}^b \frac{1}{2} dr = b$$

$$p_e = Q\left(\frac{b}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + b/2$$

2 - Sistema óptico. Receptor base de decisión en la cuenta de fotones recibidos (más bien potencia).

$$p(u/u_0) = \frac{\lambda_0^n}{n!} e^{-\lambda_0}$$

$$p(u/u_1) = \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1}$$

Criterio óptimo de decisión si $p_0 = p_1$.

¿Estadístico suficiente?

$\Rightarrow u$

$$\Rightarrow \text{MLD} : p(u/u_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} p(u/u_1)$$

$$\frac{\lambda_0^n}{n!} e^{-\lambda_0} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1} \Rightarrow n \ln \lambda_0 - \lambda_0 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} n \ln \lambda_1 - \lambda_1$$

$$n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \lambda_0 - \lambda_1 \Rightarrow \boxed{n \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}}} \quad \lambda_0 > \lambda_1$$

3- Observable en un detector digital binario consiste en tomar N muestras del voltaje recibido r .

$$u_0 \rightarrow \sigma_0^2$$

$$u_1 \rightarrow \sigma_1^2$$

Mensajes equiprobables a priori. Demostrar

$$\rho = \sum_{i=1}^N r_i^2$$

es un estadístico suficiente

$$r_1 \dots r_N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(r_k | u_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_k^2}{2\sigma_0^2}} \\ p(r_k | u_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_k^2}{2\sigma_1^2}} \end{array} \right.$$

$$p(r_1 \dots r_N | u_0) \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} p(r_1 \dots r_N | u_1)$$



$$p(r_1 | u_0) \dots p(r_N | u_0) \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} \prod_{i=1}^N p(r_i | u_i)$$

$$\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_0^2}} \dots \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_N^2}{2\sigma_0^2}} \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} \left(\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^N r_i^2}$$

$$-N \ln \sigma_0 - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^N r_k^2 \stackrel{H_0}{\sum_{H_1}} -N \ln \sigma_1 - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{k=1}^N r_k^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sum_{k=1}^N r_k^2 \stackrel{H_1}{\sum_{H_0}} 2N \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \sum_{t_0}^{t_1}}{\frac{2N \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}}$$

$$\sigma_0 < \sigma_1$$

