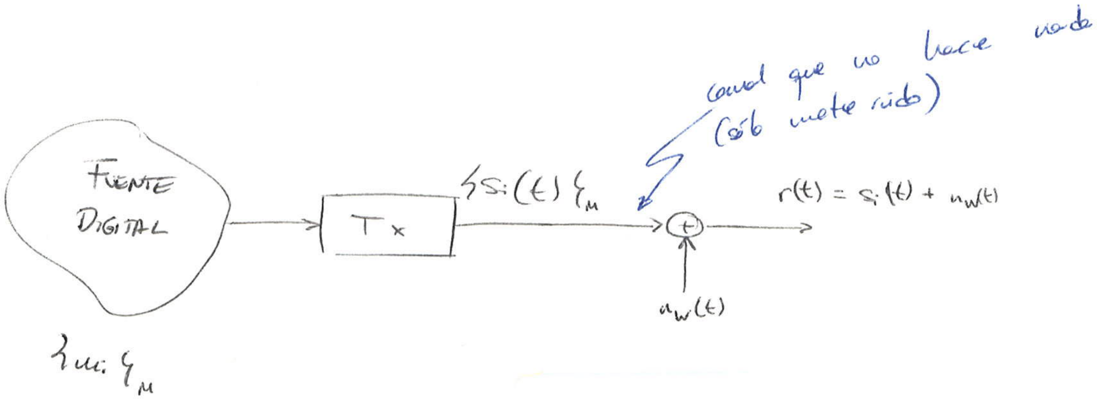
Tema 3: Transmisión Digital en la Banda de Base

3.1- Introducción



Additive White Gaussian Noise = AWGN (Norbert Wiener)

Blanco ⟹ autoincorrelado ⟹ el conocimiento estadístico en un instante del tiempo no dice nada de otros instantes de tiempo.

Objetivos:

1- Construir el receptor, o lo que es lo mismo, definir la regla de decisión.

2.- Dar las prestaciones (p_e) del receptor

Todo esto con el sistema simplificado anterior. Luego veremos qué ocurre con distorsión del canal y con ruido que no sea blanco.

3.2- DETERMINACIÓN DEL RECEPTOR ÓPTIMO: FILTRO ADAPTADO

Suponemos funciones del tiempo tales que $t \in [0, T]$

Construimos la fdp en cada muestra que tome al muestrear para llegar a la fdp conjunta.

Esto lo tenemos en el tema anterior para una sola muestra.

Muestreamos con espaciado ΔT y tomando N muestras.
Usamos el criterio MAP.

$$\{t_k\}_{k=0:N-1} \rightarrow \begin{cases} r(t_k) = r_k \\ s_i(t_k) = s_{ik} \\ n_w(t_k) = n_k \end{cases} \quad r_k = s_{ik} + n_k \;\; (s_i \;\; m_i)$$

$$p_{n_k}(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2\sigma^2} \qquad (s_i \quad m_i) \longrightarrow p(r_k/m_i)$$

$$p_{r_k}(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s_{ik})^2}{2\sigma^2}}$$

Inciso metafísico:

$f(x)$ no es una función sino un número:

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

Y eso, este se lo acaba y me perdió

Pasos:

[1] $p(r_k/m_i)$

$\longrightarrow \bar{r} = [r_1 \ldots r_N]^T$

[2] $p(\bar{r}/m_i)$

[3] MAP $\quad \hat{m} = \max_i (p(r/m_i) \cdot p_i)$

[4] $\Delta t \to 0$

$$p(r_k/m_i) \longrightarrow p(\bar{r}/m_i) = p(r_1 \ldots r_N/m_i)$$

r_k independientes

$$\Rightarrow p(\bar{r}/m_i) = p(r_1/m_i) \cdots p(r_N/m_i)$$

$$p(r_1/m_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_1-s_{i1})^2}{2\sigma^2}}$$

$$\vdots$$

$$p(r_N/m_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_N-s_{iN})^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{p(\bar{r}/m_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(r_k - s_{ik})^2\right)}$$

$$\hat{m} = \max_i \left(\cancel{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(r_k - s_{ik})^2} \cdot p_i \right)$$

aumento constante

Ln

$$= \max_i \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_k (r_k - s_{ik})^2 + \ln p_i \right)$$

$$= \max_i \left(-\sum_k (r_k^2 + s_{ik}^2 - 2 r_k s_{ik}) + 2\sigma^2 . \ln p_i \right)$$

$$= \max_i \left(\sum_k (2 r_k s_{ik} - s_{ik}^2) + 2\sigma^2 \ln p_i \right)$$

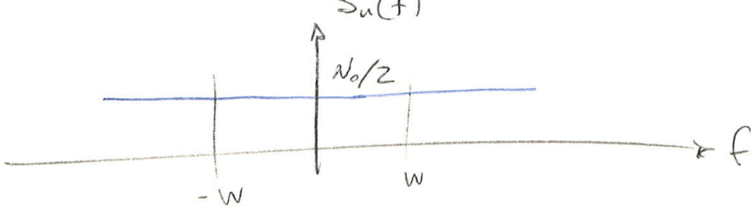
$$\boxed{\hat{m} = \max_i \left(\sum_{k=1}^{N} r_k s_{ik} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} s_{ik}^2 + \sigma^2 \ln p_i \right)}$$

$\Delta t > 0$ suficientemente pequeño:

$$\hat{m} = \max_i \left(\sum_{k=1}^{N} r_k s_{ik} \Delta t - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} s_{ik}^2 \Delta t + \sigma^2 \ln p_i \Delta t \right)$$

$$= \max_i \left(\int_0^T r(\tau) \cdot s_i(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^T s_i^2(\tau)\, d\tau + \sigma^2 \Delta t \ln p_i \right)$$

energía



$$\sigma^2 \longrightarrow N_0 W$$

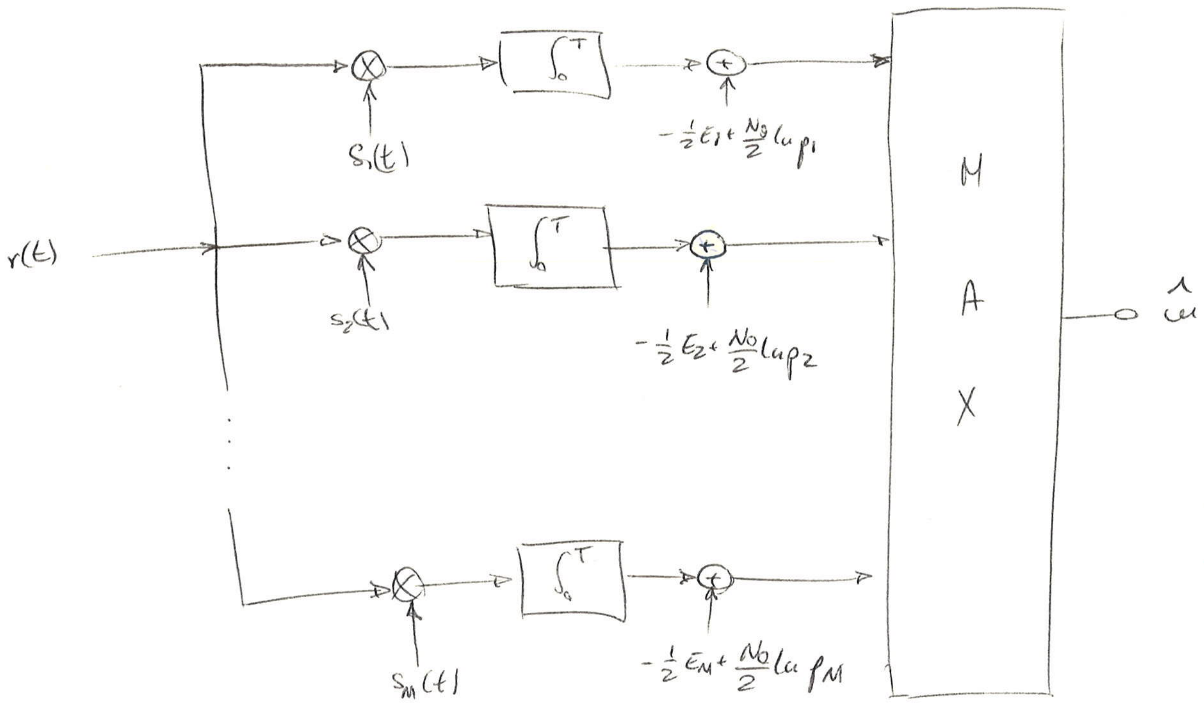
$$\sigma^2 \Delta t \longrightarrow N_0/2 \qquad (W \cdot \Delta t \leq 1/2)$$

$$\boxed{\hat{m} = \max_i \left(\int_0^T r(\tau)\, s_i(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)}$$

Formas de implementación:

- Correladores
- Filtro adaptado

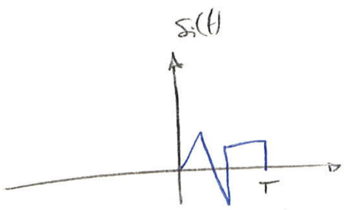
Ojo: { N = nº señales recibidas; M = nº señales de la fuente (posibles)



→ Filtro adaptado:

$$\int_0^T r(\tau) \cdot s_i(\tau)\, d\tau$$

$$\rho_i(t) = r(t) * s_i(-t)$$



Causal

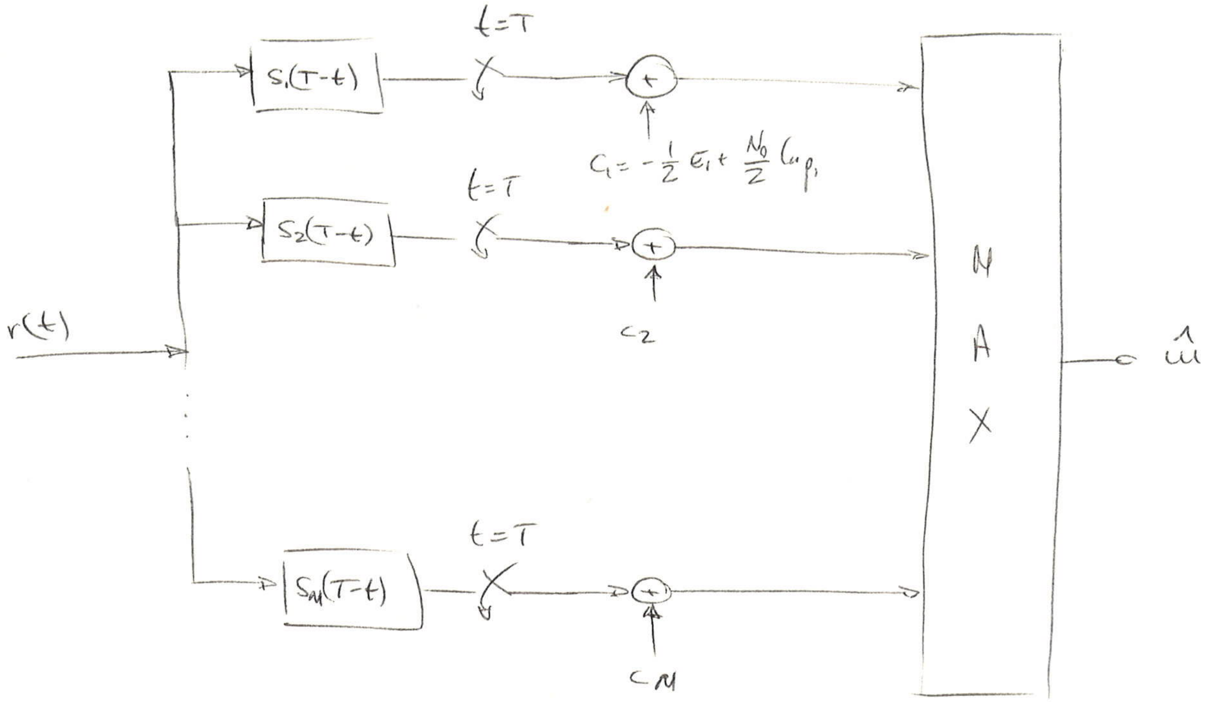
⇒ $s_i(-t)$ no causal

⇒ desplazar

$$\rho_i(t) = r(t) * s_i(\varphi - t)$$

$$\varphi \geq T$$

Si $\varphi = T$, averiguas el mensaje recibido en $t = T$



Ejemplo:

$t \in [0, T]$

alfabetos de señales ≡ constelaciones

① $\begin{cases} s_0(t) = 0 \\ s_1(t) = A\cos\omega t \end{cases}$

③ $\begin{cases} s_0(t) = \Pi\left(\frac{t - T/3}{2T/3}\right) \\ s_1(t) = \Pi\left(\frac{t - 2T/3}{2T/3}\right) \end{cases}$

② $\begin{cases} s_0(t) = A\cos\omega t \\ s_1(t) = -A\cos\omega t \end{cases}$

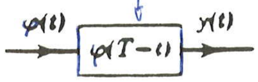
④ $\begin{cases} s_0(t) = A\cos\omega_0 t \\ s_1(t) = A\cos\omega_1 t \end{cases}$

Para todos los tonos, $\omega_i T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Construir los receptores óptimos

Con señales equiprobables, $\frac{N_0}{2}\ln p_i$ se puede despreciar.
Si además las señales son equienergéticas, también se puede quitar $-\frac{1}{2}E_i$

Suponemos que son equiprobables (habitual en comunicaciones) filtro causal adaptado con el menor retardo posible



paso de φ(t) por un filtro adaptado

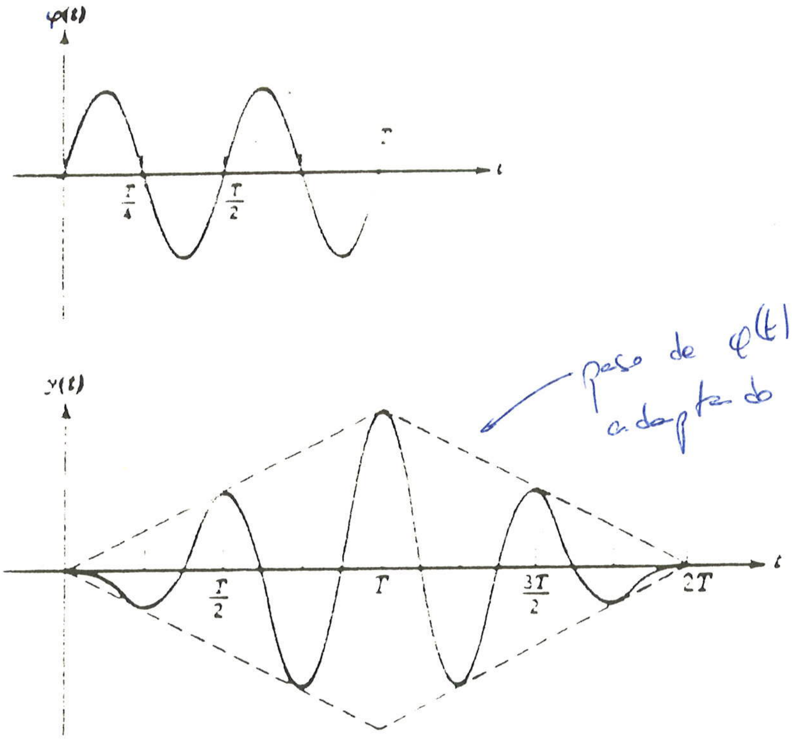


Figure 4.24 An example illustrating that the output of the matched filter is maximum at the instant $t = T$.

Si al filtro adaptado a φ(t) le pasamos otra señal, el pico de y(t) tendrá menor amplitud (tipe)

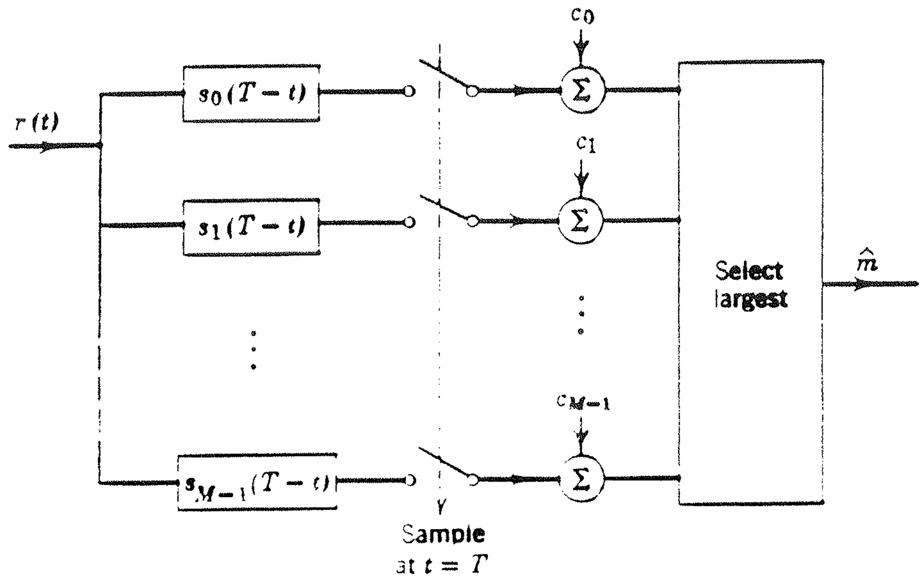
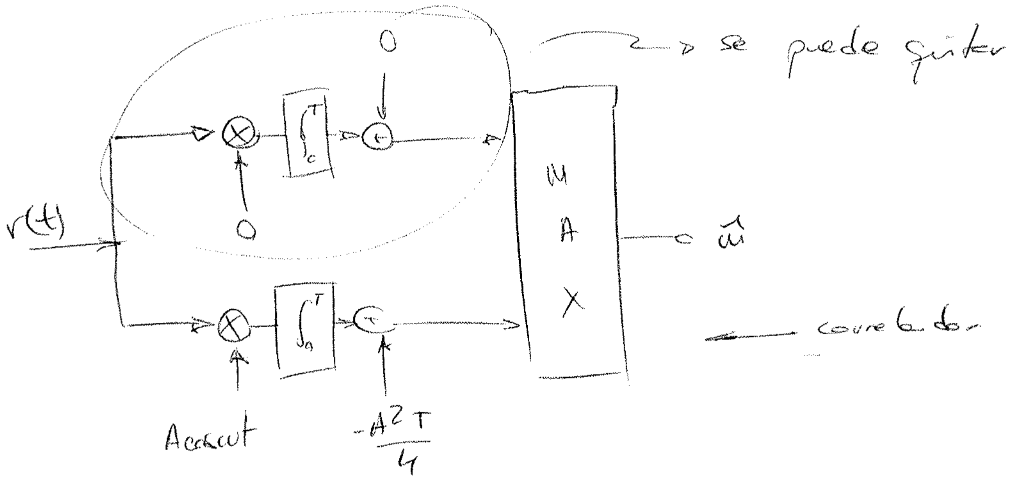


Figure 4.21 An optimum receiver with M filters matched directly to the signals $\{s_i(t)\}$, which are assumed to have duration T.

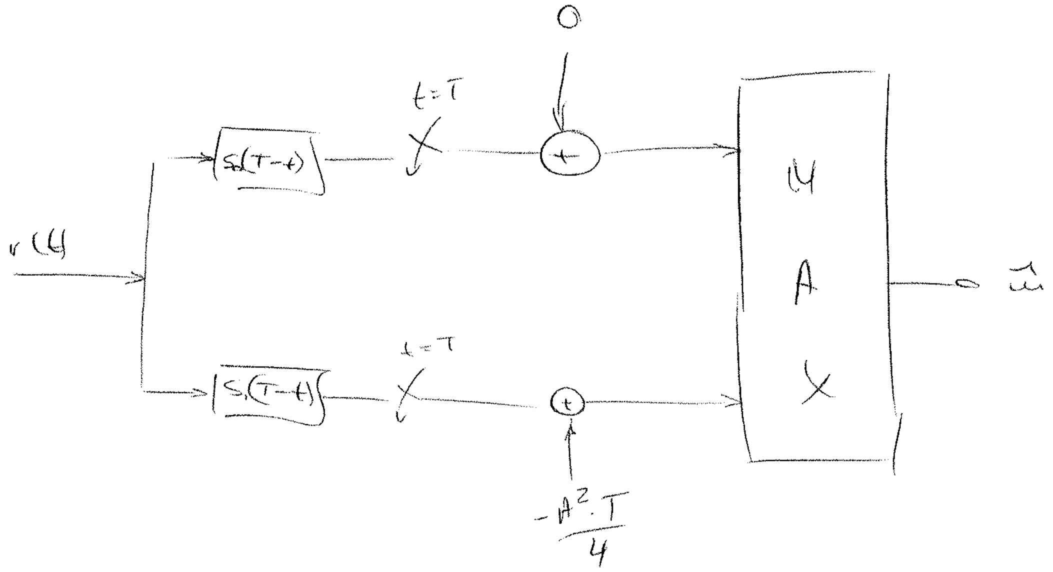
(1) $E_0 = 0$

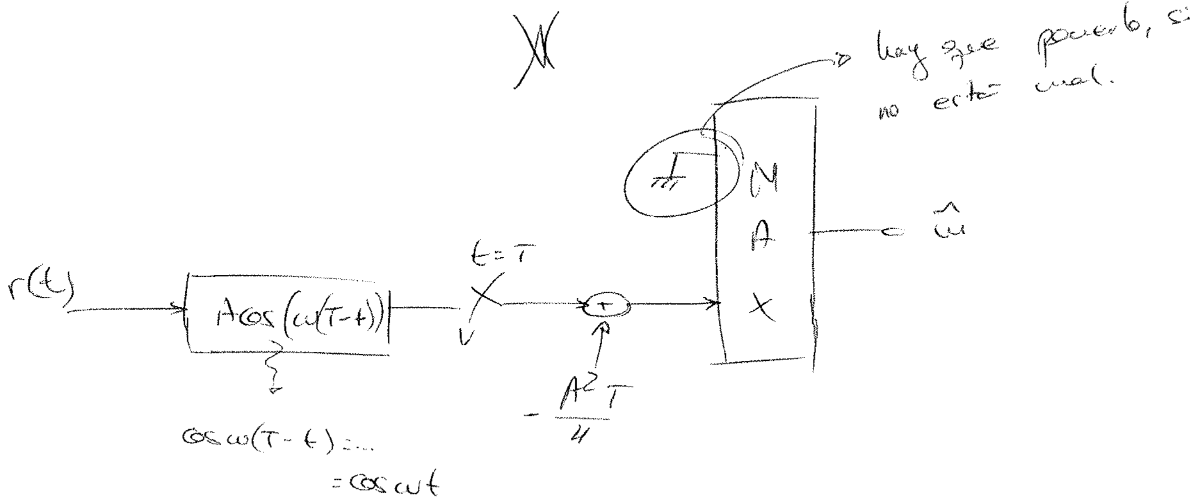
$$E_1 = \int_0^T A^2 \cos^2 \omega \tau \, d\tau = \frac{A^2}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega\tau)\, d\tau = \frac{A^2}{2} \cdot T$$

$(\omega_i T = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z})$

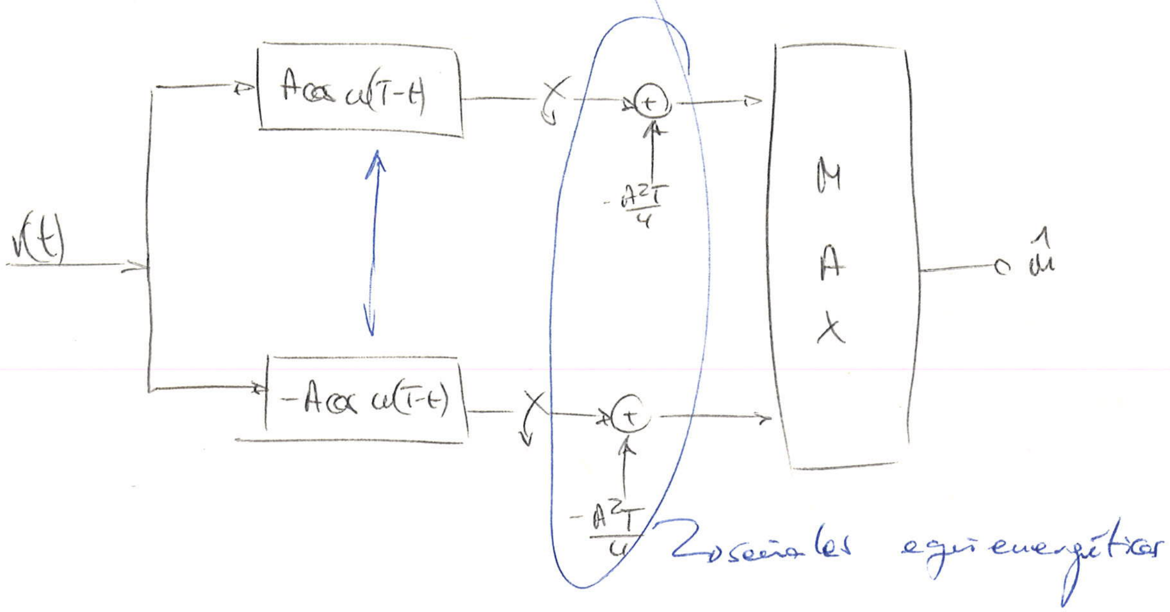


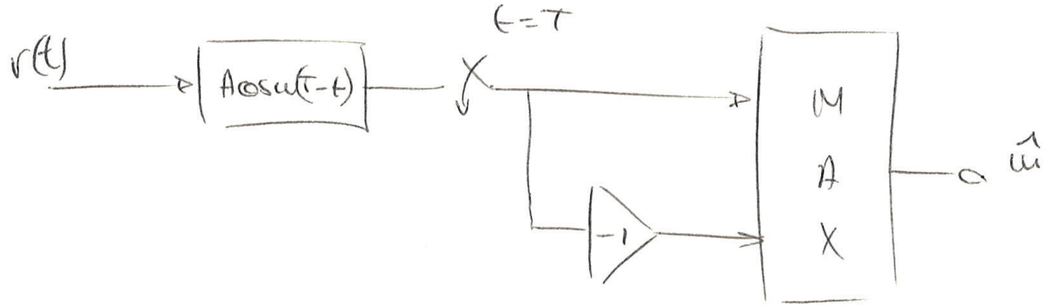
Filtro adaptado:



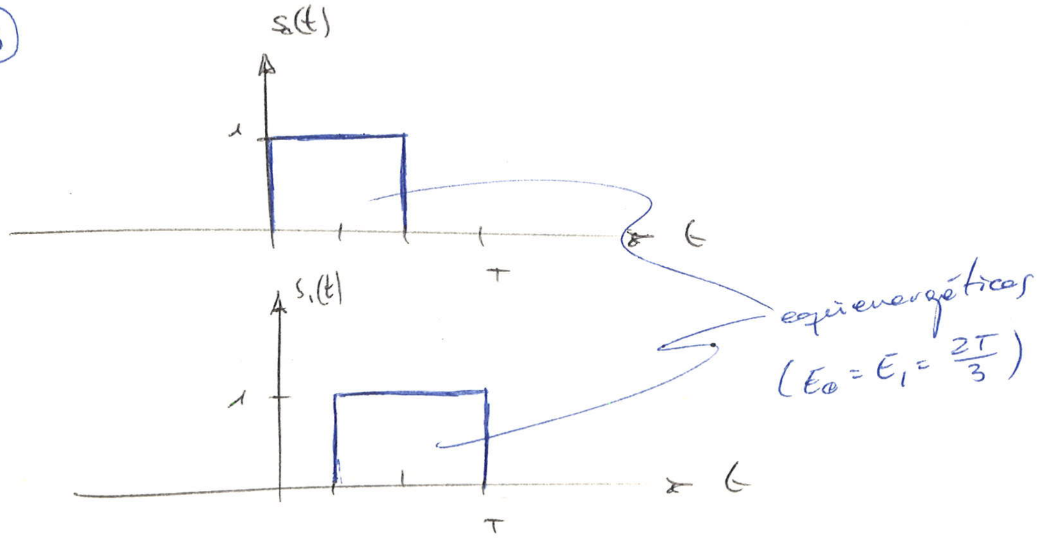


2

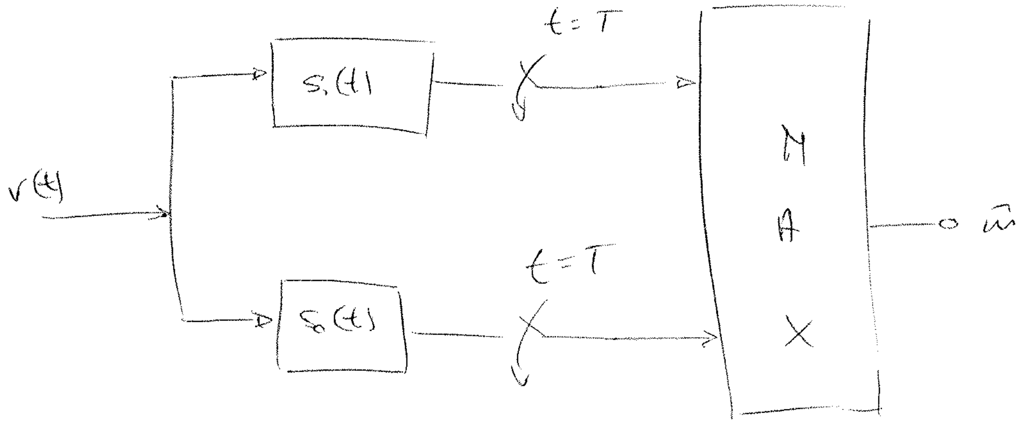




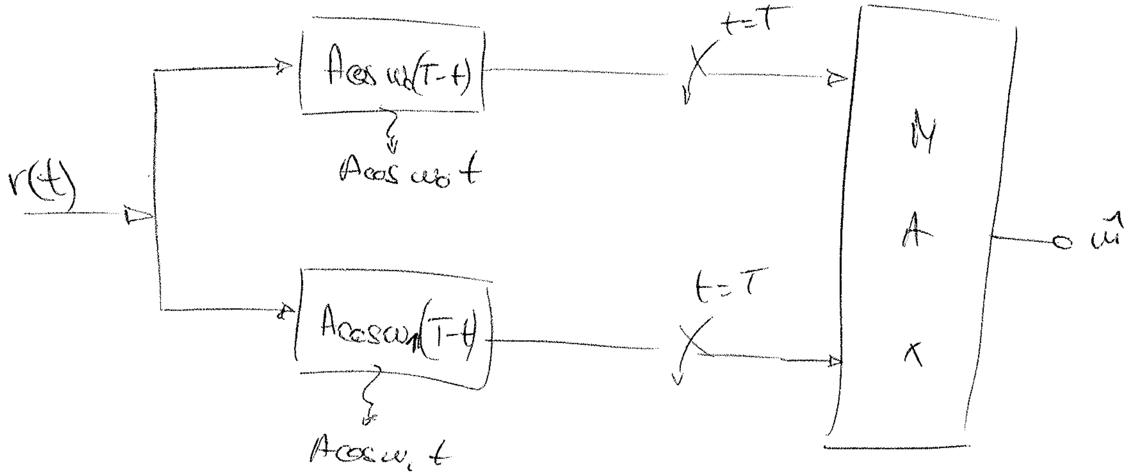
3



$$\begin{cases} s_0(T-t) = s_1(t) \\ s_1(T-t) = s_0(t) \end{cases}$$



(4) Equienergéticos $\left(\frac{A^2T}{2}\right)$



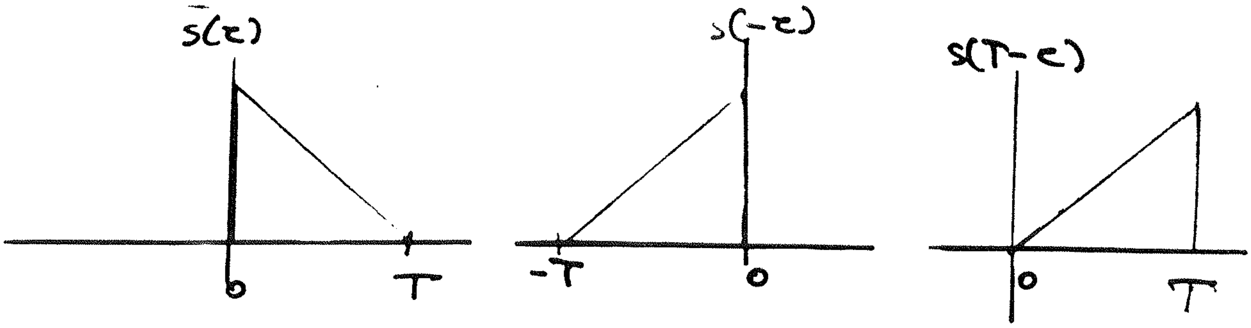
Otro día no te olvides los apuntes en casa

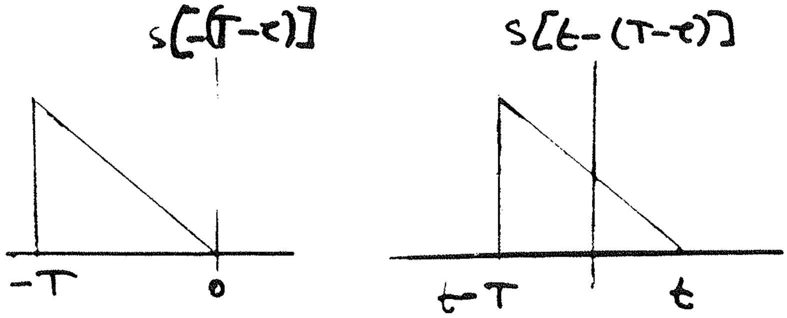
22

Filtro adaptado

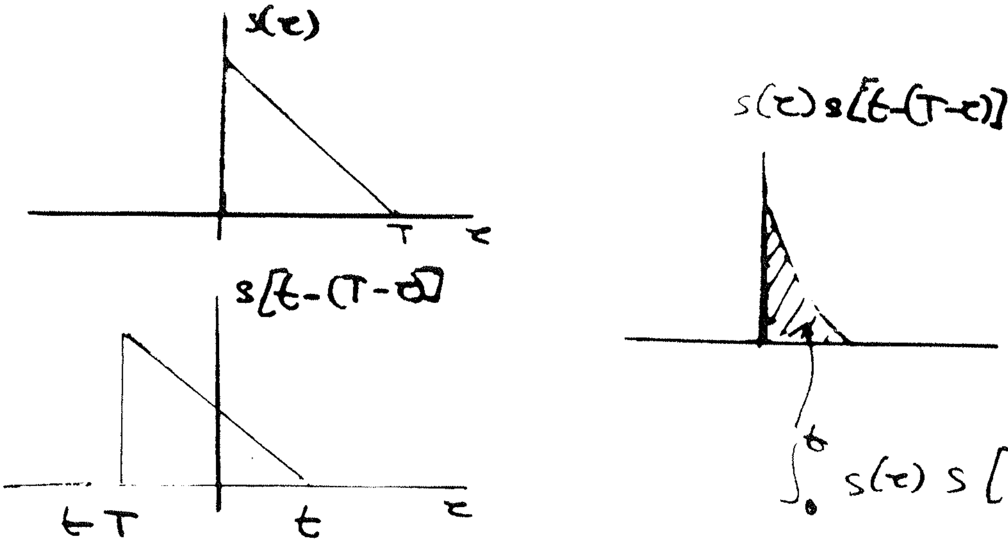
3º TEL. SUP.

O, NE
10.4.02



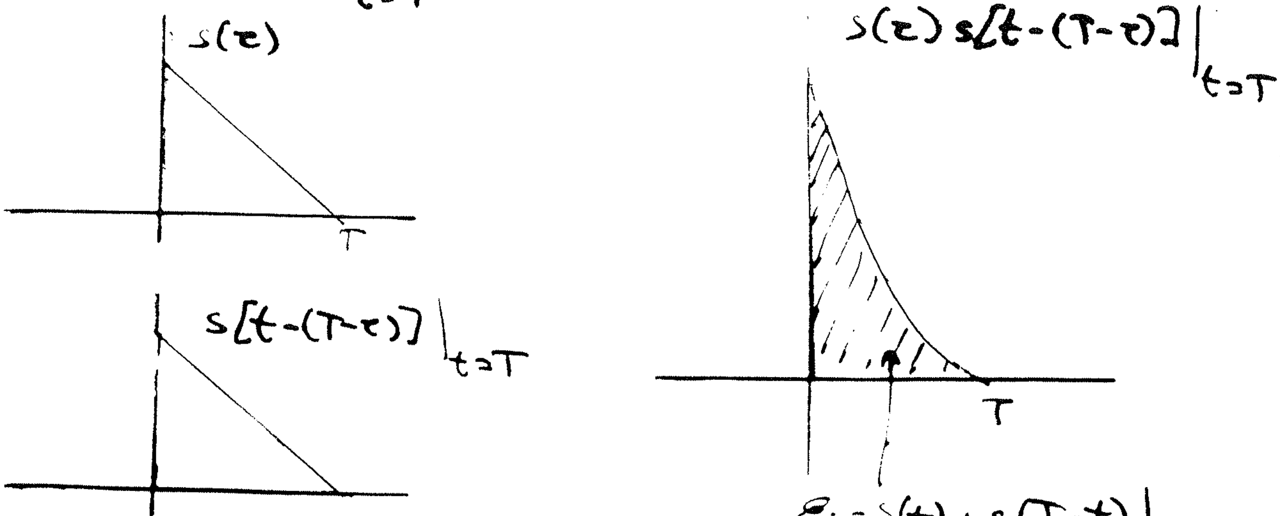


$t<T \qquad s(t) * s(T-t) = \int_0^t s(\tau)\, s[t-(T-\tau)]\, d\tau$



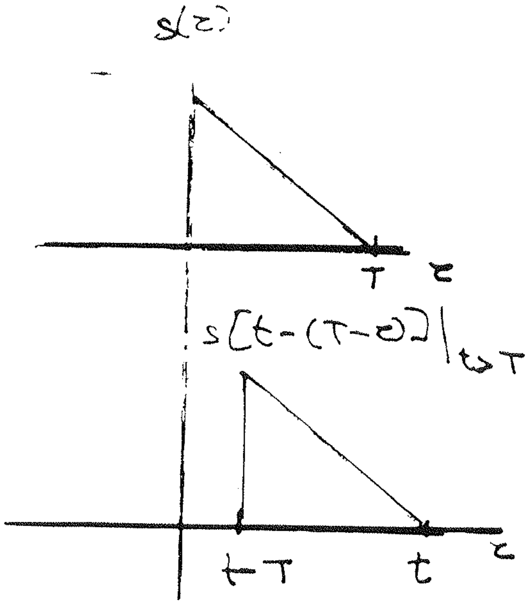
$\int_0^t s(\tau)\, s[t-(T-\tau)]\, d\tau$

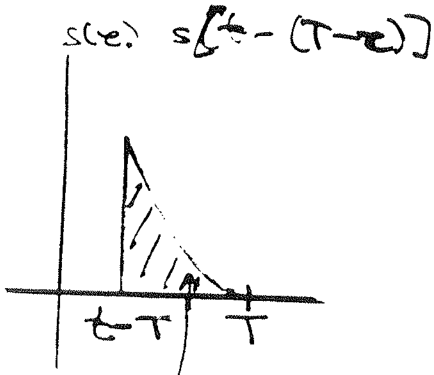
$t=T \qquad s(t) * s(T-t)\Big|_{t=T}$



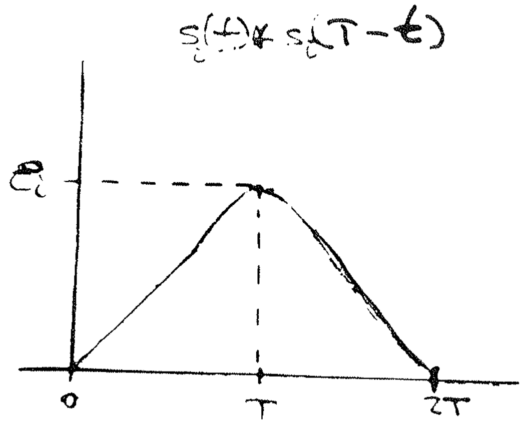
$E_i = s(t) * s(T-t)\Big|_{t=T}$

$t > T$





$$\int_0^t s(\tau)\, s\left(t-(T-\tau)\right) d\tau$$



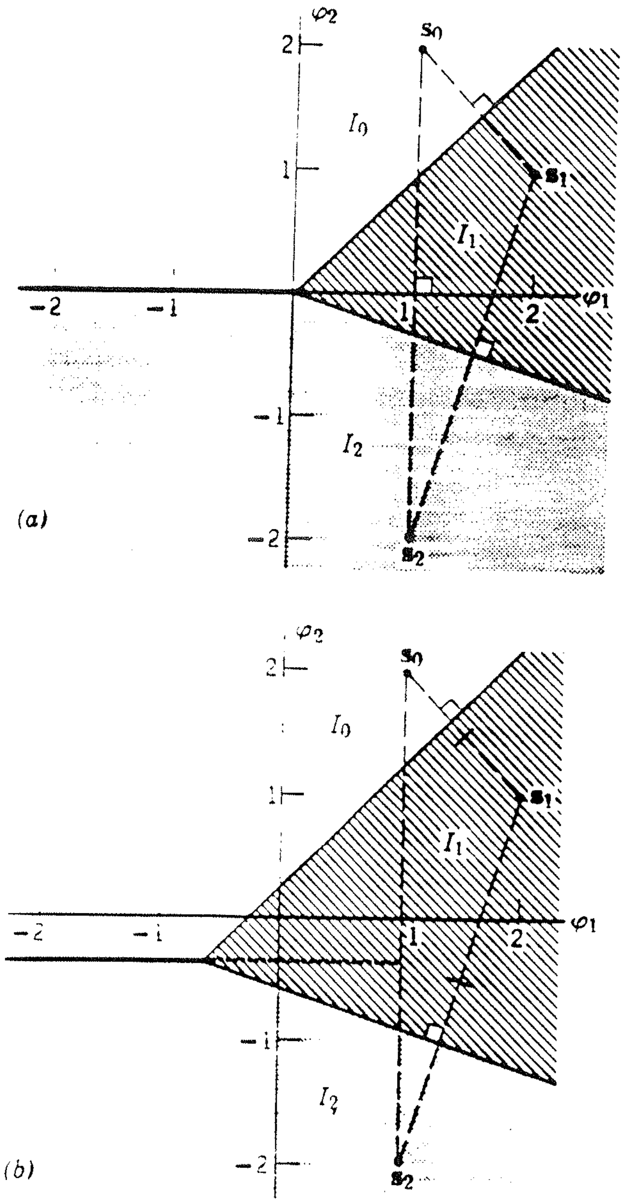


Figure 4.5 Optimum decision regions for additive Gaussian noise: (a) the boundaries of the $\{I_i\}$ are the perpendicular bisectors of the sides of the signal triangle whenever $P[m_0] = P[m_1] = P[m_2]$; (b) the boundaries of the $\{I_i\}$ are displaced when $P[m_1] > P[m_0] > P[m_2]$.

3.3.- Representación Vectorial. Canal Vector

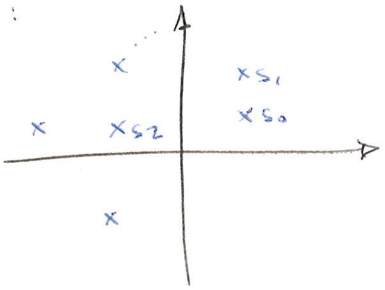
3.3.1- Constelaciones

Representación geométrica de los vectores/señales del alfabeto.

Dado un conjunto de señales, ¿cómo se averigua la base y la representación de esas señales?

$\{s_i(t)\}_M$ señales $\longrightarrow$ $\{\bar{s}_i\}_M$ vectores $\xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$ $\{\bar{e}_k\}_D$

Ej:



Reformulamos los criterios de decisión:

3.3.2- Criterios de Decisión

$$\hat{m} = \max_i \left(\underbrace{\int_0^T r(\tau)\cdot s_i(\tau)\, d\tau}_{\text{producto escalar}} - \frac{1}{2}E_i + \frac{N_0}{2}\ln p_i \right)$$

vectorizar

$r(t) \longrightarrow \bar{r}$

$s_i(t) \longrightarrow \bar{s}_i$

$\} \ (\bar{r}, \bar{s}_i)$

$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2}E_i + \frac{N_0}{2}\ln p_i \right) =$$

(versión vectorial de la regla MAP)

Norma Euclídea: $\|\bar{s}_i\| = \sqrt{(\bar{s}_i, \bar{s}_i)} = \sqrt{E_i}$

$$= \max_i \left(\underbrace{2(\bar{r}, \bar{s}_i) - \|\bar{s}_i\|^2 - \|\bar{r}\|^2}_{-\|\bar{r}-\bar{s}_i\|^2} + N_0 \ln p_i \right)$$

$$-\|\bar{r}-\bar{s}_i\|^2 = -(\bar{r}-\bar{s}_i, \bar{r}-\bar{s}_i)$$

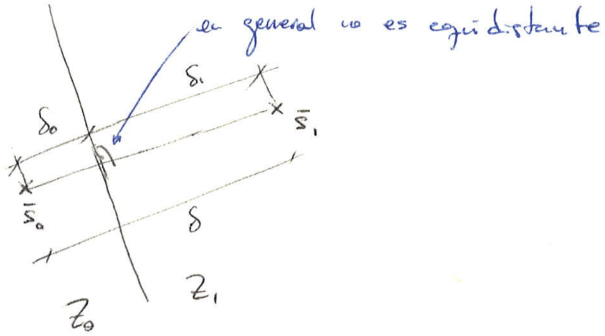
$$\boxed{\hat{m} = \min_i \left(\|\bar{r}-\bar{s}_i\|^2 - N_0 \ln p_i\right)}$$

(segunda) versión vectorial de la regla MAP

Busco en la constelación la distancia más corta (salvo "detalles") entre la señal recibida y el símbolo de la constelación.

Si son equiprobables no hay que tener en cuenta $N_0 \cdot \ln p_i$

$\bar{s}_0, \bar{s}_1$



$\delta = \|\bar{s}_1 - \bar{s}_0\|$

¿δ_0, δ_1? → regla de decisión:

estamos en la frontera: $\begin{cases} \delta_0^2 - N_0 \ln p_0 = \delta_1^2 - N_0 \ln p_1 & [1] \\ \delta_0 + \delta_1 = \delta & [2] \end{cases}$

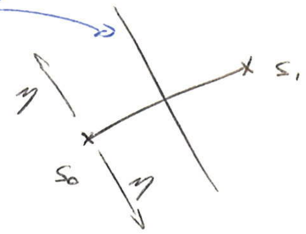
$$\Rightarrow \boxed{\delta_0 = \frac{\delta}{2} + \frac{N_0}{2\delta} \ln \frac{p_0}{p_1}}$$

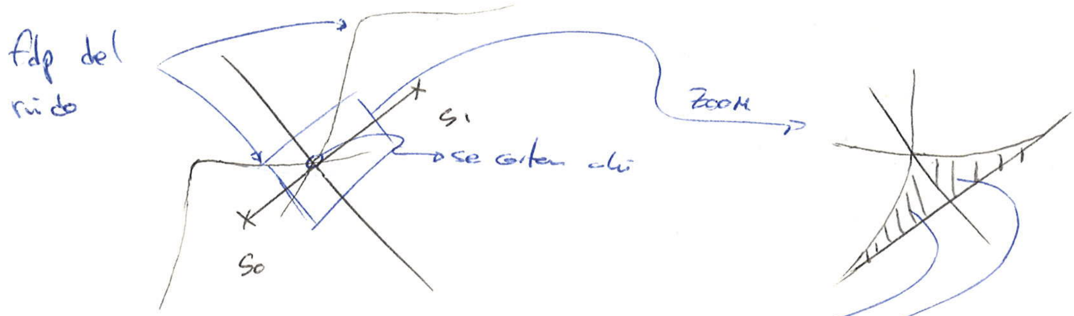
¿Cuánto vale la probabilidad de error?

$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2}E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right) = \min_i \left(\|\bar{r}-\bar{s}_i\|^2 - N_0 \ln p_i \right)$$

El ruido es AWGN. Se distribuye en todas las dimensiones del espacio.

La dispersión a los lados no afecta a la decisión, sólo la dispersión que provoque transición de frontera.





$$\boxed{\begin{aligned} p_e &= p(e/m_0)\cdot p_0 + p(e/m_1)\, p_1 \\ &= p_0\, Q\left(\frac{\delta_0}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + p_1\, Q\left(\frac{\delta_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \end{aligned}}$$

Si $p_1 = p_0 \Rightarrow$ $\boxed{p_e = Q\left(\frac{\delta/2}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)}$

3.3.3- SIMPLIFICACIÓN DEL RECEPTOR ÓPTIMO

M señales $\Rightarrow$ M filtrados

Varias versiones de simplificación del Rx óptimo:

a) Por la existencia de una base:

$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

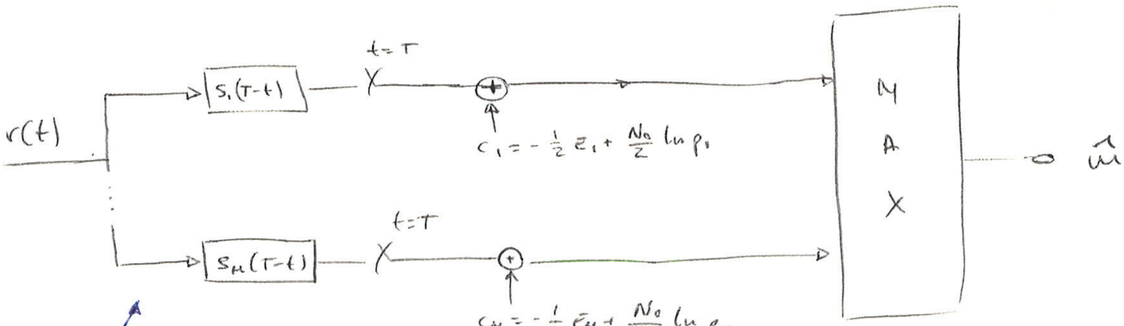
$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^{D} s_{ik} \cdot \bar{e}_k$$

$\{e_k\}_D$, $D \leq M$

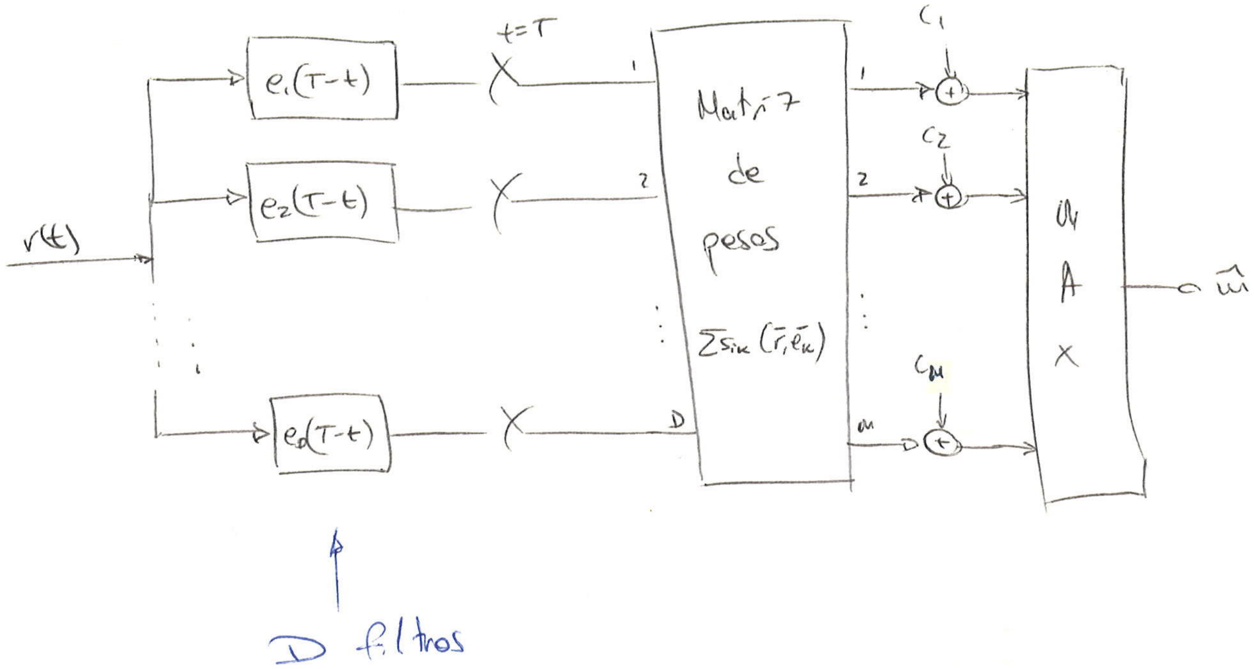
$$\Rightarrow \hat{m} = \max_i \left(\left(\bar{r}, \sum_k s_{ik} \cdot \bar{e}_k \right) - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$$= \max_i \left(\sum_k (\bar{r}, s_{ik} \cdot \bar{e}_k) - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$$= \max_i \left(\underbrace{\sum_k s_{ik} (\bar{r}, \bar{e}_k)}_{D \text{ filtrados}} - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$



estructura inicial con M filtros



$\{\bar{s}_i\}_M \xrightarrow{?} \{\bar{e}_k\}_D$

ALGORITMO DE GRAM-SCHMIDT

Se toma el primer $\bar{s}_i$ y es el primer $\bar{e}_k$. Luego el 2° $\bar{s}_i$ y se le quita lo que proyecta sobre $\bar{e}_k$, siendo el segundo $\bar{e}_k$. Y así consecutivamente.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\bar{e}_1 &= \bar{s}_1 \\
\bar{e}_2 &= \bar{s}_2 + \lambda_{21}\bar{e}_1 \\
\bar{e}_3 &= \bar{s}_3 + \lambda_{31}\bar{e}_1 + \lambda_{32}\bar{e}_2 \\
&\vdots \\
\bar{e}_k &= \bar{s}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} \cdot \bar{e}_k
\end{aligned}
}
$$

$\lambda \rightarrow$ proyecciones

Condición: ortogonalidad $\Rightarrow (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$

$(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = 0$

$$¿\lambda_{21}? \quad (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0 = (\bar{s}_2, \bar{e}_1) + \lambda_{21}(\bar{e}_1, \bar{e}_1)$$

$$\Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{(\bar{s}_2, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}$$

$$¿\lambda_{31}? \quad (\bar{e}_3, \bar{e}_1) = 0 = (\bar{s}_3, \bar{e}_1) + \lambda_{31}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \lambda_{32} \cdot \underbrace{\cancel{(\bar{e}_2, \bar{e}_1)}}_{0}$$

$$\lambda_{31} = -\frac{(\bar{s}_3, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}$$

$$¿\lambda_{32}? \quad (\bar{e}_3, \bar{e}_2) = 0 = (\bar{s}_3, \bar{e}_2) + \lambda_{31}\underbrace{\cancel{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}}_{0} + \lambda_{32}(\bar{e}_2, \bar{e}_2)$$

$$\lambda_{32} = -\frac{(\bar{s}_3, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\lambda_{kj} = -\frac{(\bar{s}_k, \bar{e}_j)}{(\bar{e}_j, \bar{e}_j)}}$$

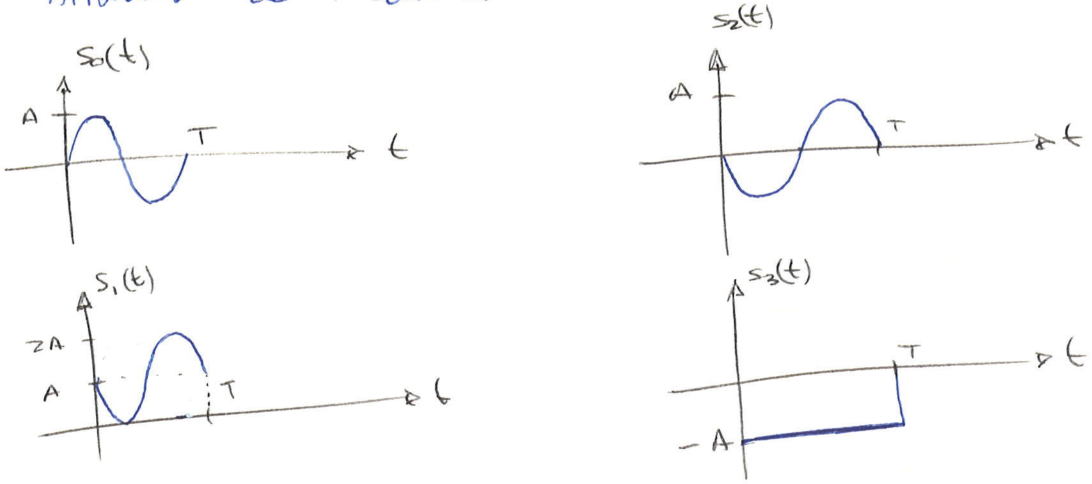
Si alguno sale cero, se acaba el proceso (algún $\bar{e}_i$)

Con esto no se obtienen vectores ortonormales (de norma unitaria), por lo que al calcular la energía habría que considerar la de los vectores de la base.

$$\{\bar{e}_k\} \longrightarrow \{\bar{u}_k\}_D \Big/ \bar{u}_k = \frac{\bar{e}_k}{\|\bar{e}_k\|}$$

Ejemplo:

Alfabeto de 4 señales



- Encontrar una base
- Encontrar el receptor óptimo
- Encontrar el receptor óptimo simplificado

$$\left\{\begin{array}{l} s_0(t) = A \operatorname{sen} \left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\to \omega}\right) t \\ s_1(t) = A\left(1 - \operatorname{sen} \omega t\right) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} s_2(t) = -A \operatorname{sen} \omega t \\ s_3(t) = -A \end{array}$$

$$t \in [0, T]$$

$$\{\bar{e}_k\}_D : \boxed{\bar{e}_0 = \bar{s}_0}$$

$$\bar{e}_1 = \bar{s}_1 + \lambda_{10} \bar{e}_0$$

$$\lambda_{10} = -\frac{(\bar{s}_1, \bar{e}_0)}{(\bar{e}_0, \bar{e}_0)}$$

$$(\bar{e}_0, \bar{e}_0) = \int_0^T s_0^2(\tau)\, d\tau = E_0 = \frac{A^2}{2} \cdot T$$

$$(\bar{s}_1, \bar{e}_0) = (\bar{s}_1, \bar{s}_0) = \int_0^T A \operatorname{sen} \omega t \left(A\left(1 - \operatorname{sen} \omega t\right)\right) dt =$$

$$= -A^2 \int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = -\frac{A^2}{2} T$$

$$\Rightarrow \lambda_{10} = 1$$

$$\boxed{\bar{e}_1 = \bar{s}_1 + \bar{s}_0} \qquad \boxed{e_1(t) = s_1(t) + s_0(t) = A}$$

$$\bar{e}_2 = \bar{s}_2 + \lambda_{20}\bar{e}_0 + \lambda_{21}\bar{e}_1$$

$$\lambda_{20} = -\frac{(\bar{s}_2, \bar{e}_0)}{(\bar{e}_0, \bar{e}_0)} = -\frac{-\frac{A^2 \cdot T}{2}}{\frac{A^2 \cdot T}{2}} = 1$$

$$\lambda_{21} = -\frac{(\bar{s}_2, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = -\frac{0}{A^2 \cdot T} = 0$$

$$\boxed{\bar{e}_2 = \bar{s}_2 + \bar{e}_0} \qquad e_2(t) = s_2(t) + s_0(t) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{e}_2 = \bar{0}}$$

$$\bar{e}_3 = \bar{s}_3 + \lambda_{30}\cdot\bar{e}_0 + \lambda_{31}\cdot\bar{e}_1$$

$$\lambda_{30} = -\frac{(\bar{s}_3, \bar{e}_0)}{(\bar{e}_0, \bar{e}_0)} = -\frac{0}{\frac{A^2 \cdot T}{2}} = 0$$

$$\lambda_{31} = -\frac{(\bar{s}_3, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = -\frac{-A^2 \cdot T}{A^2 \cdot T} = 1$$

$$\boxed{\bar{e}_3 = \bar{s}_3 + \bar{e}_1} \qquad e_3(t) = s_3(t) + e_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{e}_3 = \bar{0}}$$

De los 4 vectores obtenemos 2 vectores ortogonales, por lo que podemos representarlos en un plano.

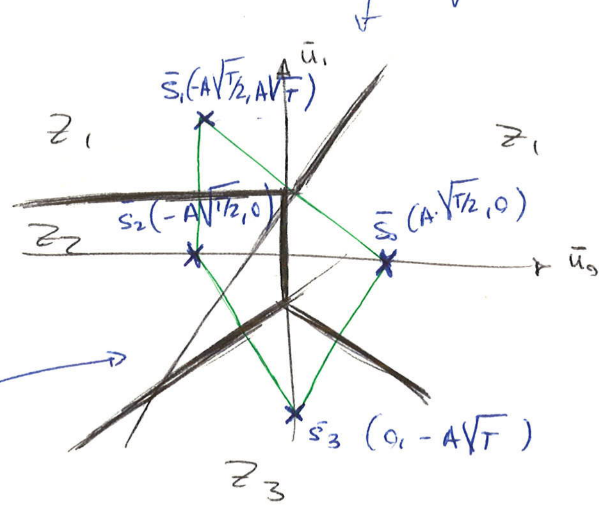
$$\left.\begin{aligned} \bar{s}_0 &= \bar{e}_0 && = [1, 0]^T \\ \bar{s}_1 &= -\bar{e}_0 + \bar{e}_1 && = [-1, 1]^T \\ \bar{s}_2 &= -\bar{e}_0 && = [-1, 0]^T \\ \bar{s}_3 &= -\bar{e}_1 && = [0, -1]^T \end{aligned}\right\} \text{en base No unitaria}$$

$$\bar{u}_0, \bar{u}_1 \qquad \|\bar{e}_0\| = \sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{2}} \qquad \|\bar{e}_1\| = \sqrt{A^2 \cdot T}$$

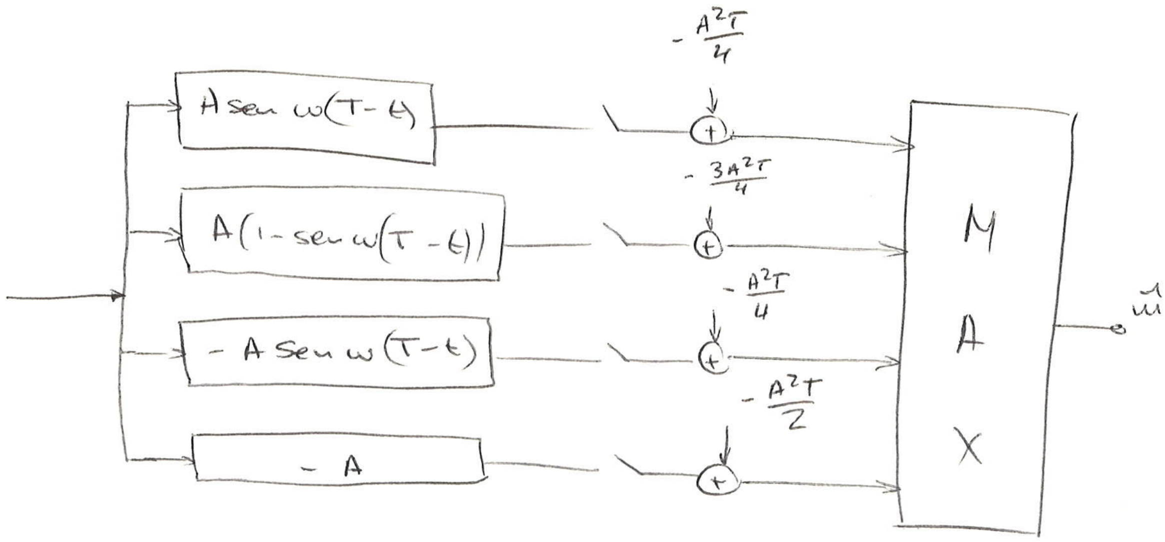
$$\bar{u}_0 = \frac{\bar{e}_0}{A\sqrt{T/2}} \qquad \bar{u}_1 = \frac{\bar{e}_1}{A \cdot \sqrt{T}}$$

$$
\begin{cases}
\bar{s}_0 = A\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot \bar{u}_0 \\
\bar{s}_1 = -A\sqrt{T/2}\, \bar{u}_0 + A\sqrt{T} \cdot \bar{u}_1 \\
\bar{s}_2 = -A\sqrt{T/2}\, \bar{u}_0 \\
\bar{s}_3 = \qquad\qquad -A\sqrt{T} \cdot \bar{u}_1
\end{cases}
$$

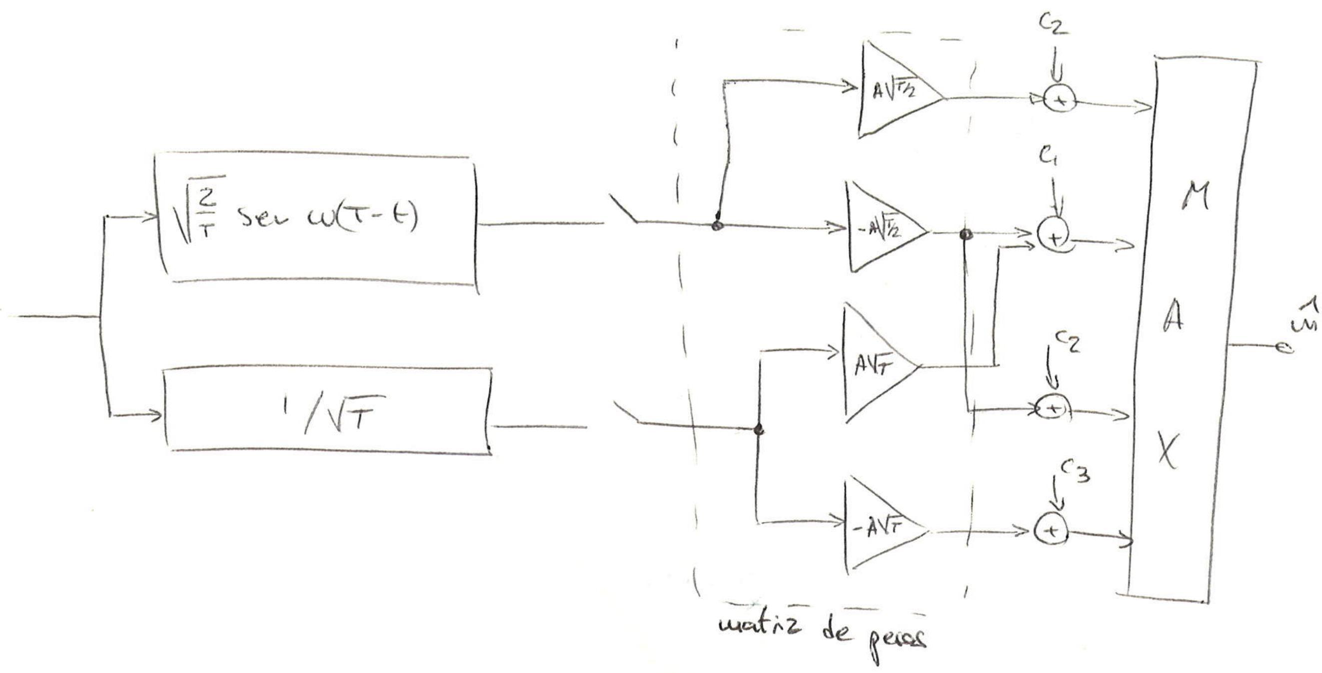
representación geométrica



CONSTELACIÓN



Versión simplificada:



b) La otra forma de simplificación es por la existencia de componentes estadísticamente irrelevantes.

$r(t) \to \bar{r}$

$$\hat{m} = \max_i \left(p(\bar{r}/m_i) \cdot p_i \right)$$

Supongamos que descomponemos el vector $\bar{r}$ en 2 componentes:

$$\bar{r} = [\bar{r}_1 \mid \bar{r}_2]^T \to \hat{m} = \max_i \left(p(\bar{r}_1, \bar{r}_2/m_i) \cdot p_i \right)$$

Digamos que $\bar{r}_2$ no tiene dependencia estadística con el mensaje.

Teorema de la multiplicación: $p(A \cap B) = p(A, B) = p(B/A)\, p(A)$

$$\Rightarrow \hat{m} = \max_i \left(p(\bar{r}_2/\bar{r}_1, m_i) \cdot p(\bar{r}_1/m_i) \cdot p_i \right)$$

El Teorema de Irrelevancia dice:

Si $p(\bar{r}_2/\bar{r}_1, m_i) = p(\bar{r}_2/\bar{r}_1)$, entonces $\bar{r}_2$ es irrelevante.

$$\Rightarrow \hat{m} = \max_i \left(\underbrace{\cancel{p(\bar{r}_2/\bar{r}_1)}}_{\text{constante}} \cdot p(\bar{r}_1/m_i) \cdot p_i \right)$$

$$= \max_i \left(p(\bar{r}_1/m_i) \cdot p_i \right)$$

Es decir, que si la segunda parte del mensaje recibido no tiene dependencia con el mensaje, se puede filtrar.

Ejemplo:

$$s_0(t) = A(1+\cos \omega t)$$
$$s_1(t) = A(1 + 2\cos \omega t)$$
$$s_2(t) = A(1 - \cos \omega t)$$
$$s_3(t) = A$$

$$t \in [0, T]$$

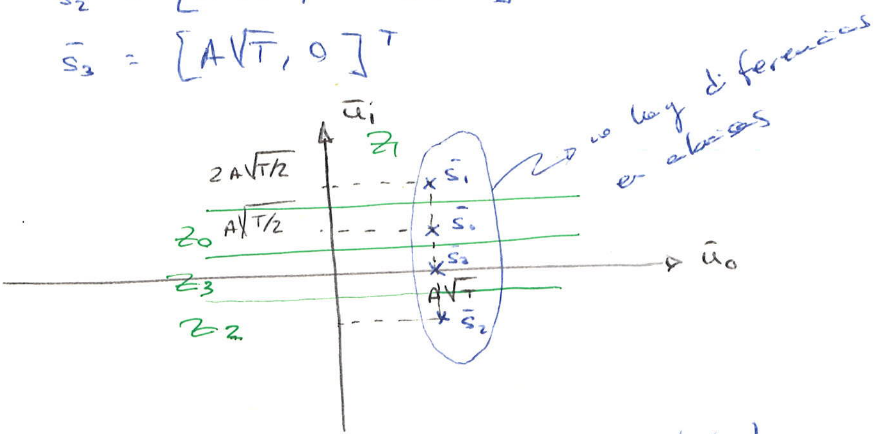
$$\omega T = 2\pi$$

$$p_i = 1/4$$

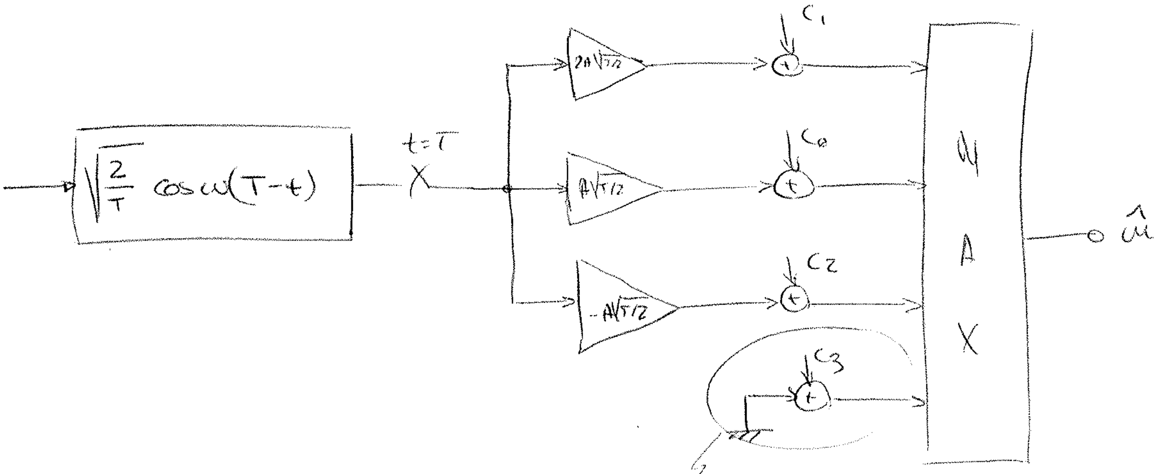
Base: $e_0 = A$ (sin normalizar)
$e_1 = A\cos \omega t$

$$\begin{cases} u_0(t) = 1/\sqrt{T} \\ u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ filtros}$$

$$\bar{s}_0 = [A\sqrt{T}, A\sqrt{T/2}]^T$$
$$\bar{s}_1 = [A\sqrt{T}, A\sqrt{2T}]^T$$
$$\bar{s}_2 = [A\sqrt{T}, -A\sqrt{T/2}]^T$$
$$\bar{s}_3 = [A\sqrt{T}, 0]^T$$

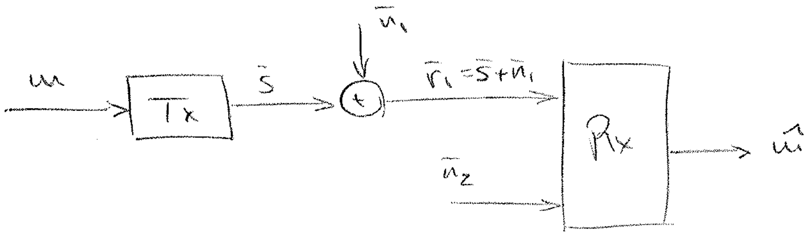


$\Rightarrow$ la dirección de abscisas es estadísticamente irrelevante



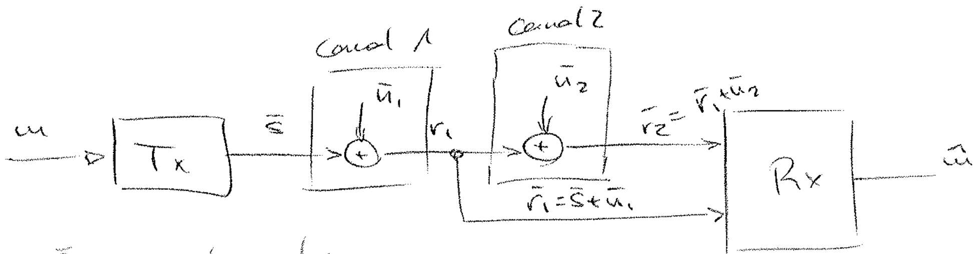
no influye en el cálculo del máximo

Ejemplos:

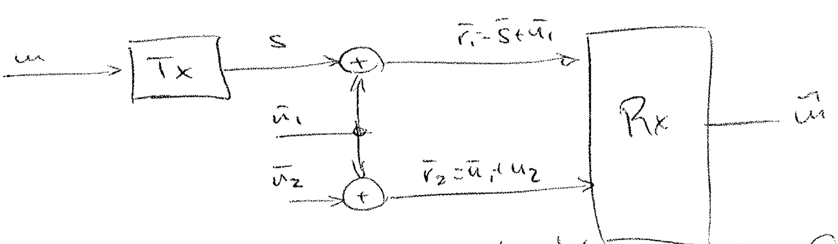


$\bar{n}_1, \bar{n}_2$ → ruido blanco

$\bar{n}_2$ independiente del mensaje → no sirve de nada medirlo



$\bar{r}_2$ es irrelevante



$\bar{r}_2$ tiene relación con el ruido del mensaje. Si podemos reducir arbitrariamente la potencia de $\bar{n}_2$, se podría eliminar $\bar{n}_1$ de la señal $\bar{r}_1$

3.4 - PRESTACIONES

3.4.1 - PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD DE ERROR

$\{m_i\}_{i=1:M}$; $\boxed{p_e = \sum_i p(e/m_i)\cdot p_i}$

$p(e/m_i) + p(c/m_i) = 1$ $\Big\{$ e ≡ error, c ≡ correcto

$$\boxed{p_e = 1 - \sum_i p_i \cdot p(c/m_i)}$$

$$p(c/m_i) = \int_{Z_i} p(\bar r/m_i)\, d\bar r$$

→ región que conozco (Rx óptimo)

$\Rightarrow p_e = 1 - \sum_i p_i \int_{Z_i} p(\bar r/m_i)\, d\bar r$

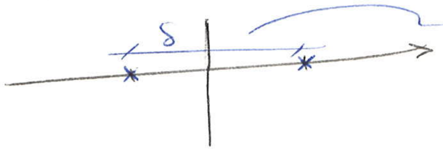
$\bar r = \bar s_i + \bar n$ → AWGN

fdp del ruido

$\Rightarrow p_e = 1 - \sum_i p_i \int_{Z_i} p_n(\bar r - \bar s_i)\, d\bar r$

Si es ruido gaussiano, la fdp es proporcional a $\|r-s_i\|^2$

a) La p_e es independiente de la base escogida.



→ $Q\left(\dfrac{\delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$

b) La p_e es invariante a movimientos rígidos

Si se hacen rotaciones y traslaciones que conserven la geometría de la constelación, no varía la p_e. Esto influye en la energía de las señales, por lo que será más apropiado que basar con constelaciones en las que se gaste menor energía.

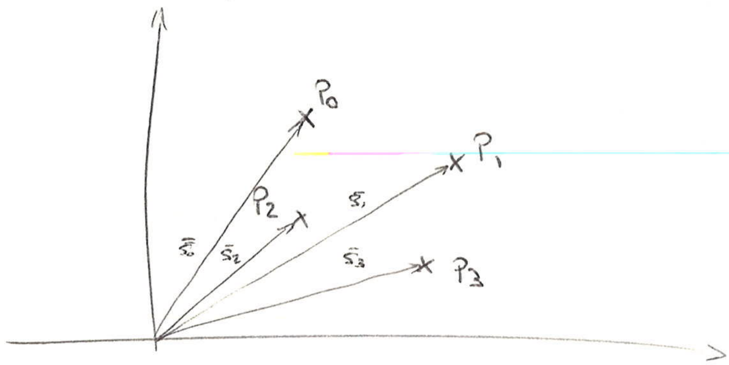
$$\{s_i(t)\}_{i=1:M} \longrightarrow \{\bar{s}_i\}_{i=1:M}$$

$$\boxed{E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,dt = (\bar{s}_i, \bar{s}_i) = ||\bar{s}_i||^2}$$

Energía media de una constelación:

$$\boxed{E = \sum_i p_i \cdot E_i}$$

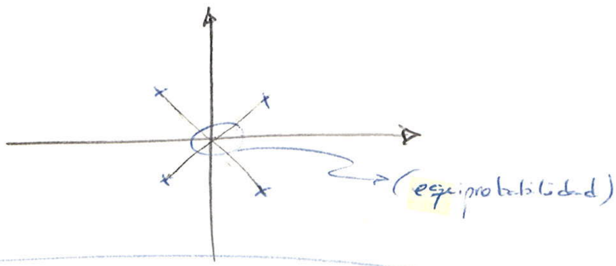
Ubicaremos la constelación de forma que gaste la menor energía manteniendo las prestaciones.



Centro de gravedad de una constelación:

$$\bar{s}_G = \sum_i p_i \, \bar{s}_i$$

Si $\bar{s}_G = 0$, entonces E (energía media) es mínima.



$$\boxed{E = \sum_i p_i \cdot E_i = \sum_i p_i ||\bar{s}_i||^2}$$

(32) 3º TEL SUP. 0,15 € 24.4.02

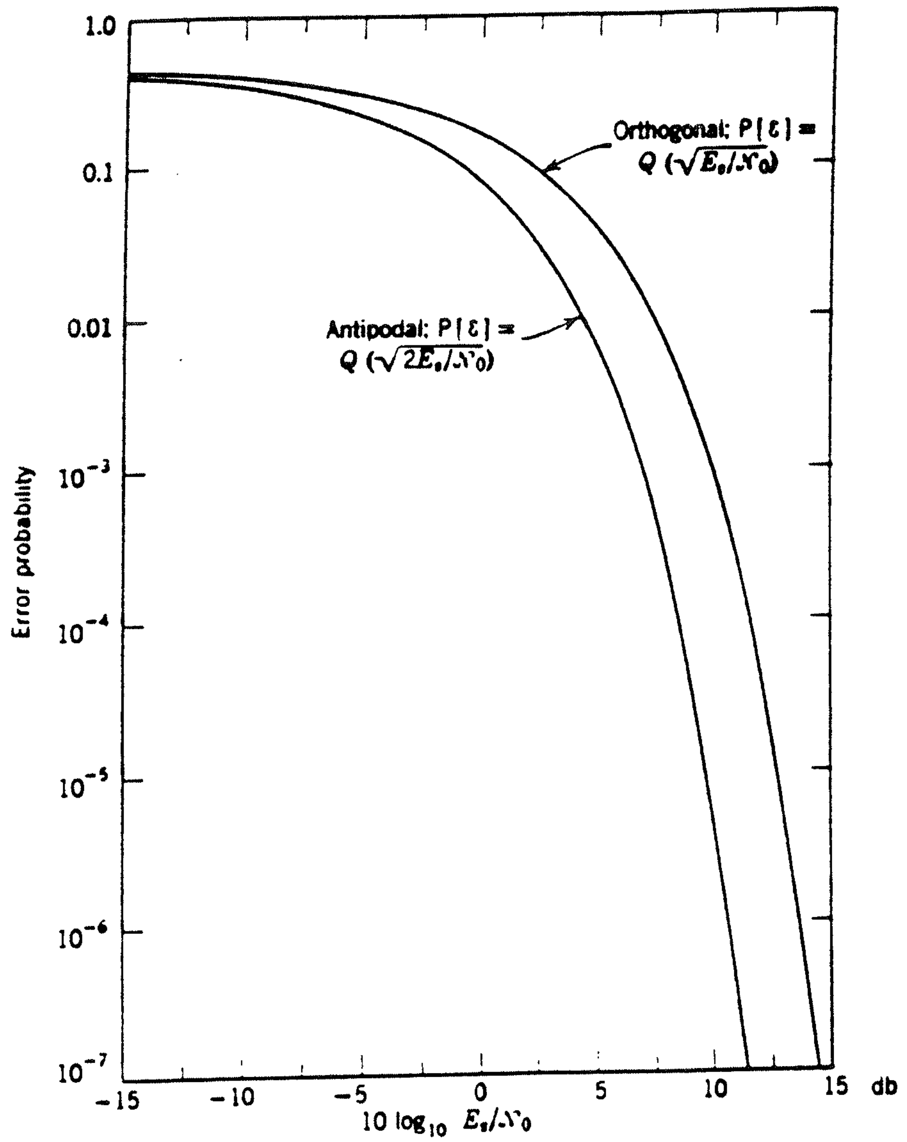


Figure 4.31 Probability of error for binary antipodal and binary orthogonal signaling with equally likely messages.

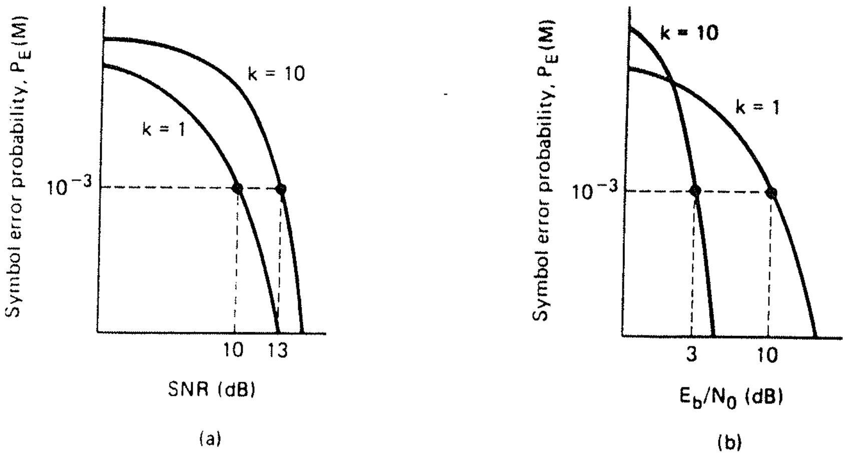


Figure 3.31 Mapping P_E versus SNR into P_E versus E_b/N_0 for orthogonal signaling. (a) Unnormalized. (b) Normalized.

E_b/N_0

E/N_0

SNR

Demostración:

$\bar{s}_G = 0$

$\bar{s}_i \rightsquigarrow \bar{s}_i + \bar{a}$

$E = \sum_i p_i \|\bar{s}_i\|^2$

$E' = \sum_i p_i \|\bar{s}_i + \bar{a}\|^2 = \sum_i p_i \left(\bar{s}_i + \bar{a}, \bar{s}_i + \bar{a}\right) =$

$= \sum_i p_i \left((\bar{s}_i, \bar{s}_i) + 2(\bar{s}_i, \bar{a}) + \underbrace{(\bar{a}, \bar{a})}_{E_a} \right)$

$= \underbrace{\sum_i p_i \|\bar{s}_i\|^2}_{E} + E_a + 2 \sum_i p_i (\bar{s}_i, \bar{a})$

$E_a > 0$

$\sum_i p_i (\bar{s}_i, \bar{a}) = \sum_i (p_i \bar{s}_i, \bar{a}) = \left(\sum_i p_i \bar{s}_i, \bar{a} \right) = 0$ por hipótesis, vale cero

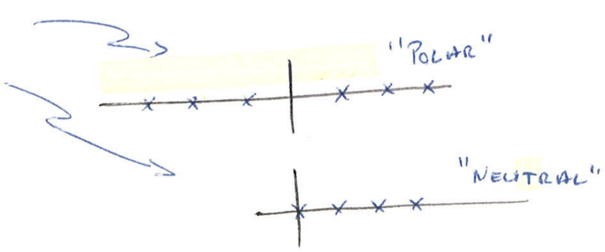
$\Longrightarrow \boxed{E' = E + E_a > E}$ Teorema del momento de inercia (Física)

— o —

3.4.2 - Cálculo para determinadas constelaciones

a) Geometrías lineales

2 tipos



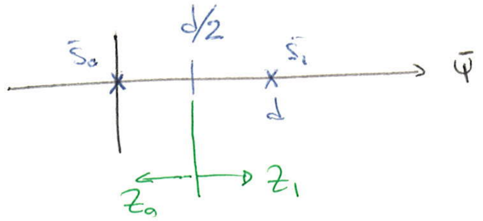
a.1) Neutrales

- Caso binario:

$t \in [0, T]$

$s_0(t) = 0$

$s_1(t) = d \cdot \varphi(t)$, $\varphi(t)$ unitario $(E_\varphi = 1)$



Supuesto, por hipótesis, $p_0 = p_1 = 1/2$

$$p_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

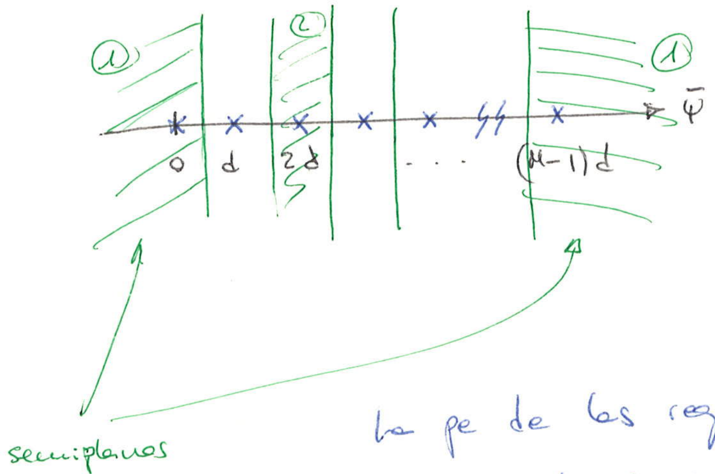
→ Lo p_e en función de parámetros "más físicos" (probabilidad de error de símbolo)

$$E = \frac{d^2}{2} \Rightarrow d = \sqrt{2E}$$

Si $p_0 \neq p_1$: $p_e = p_0 Q\left(\frac{\delta_0}{\sqrt{N_0/2}}\right) + p_1 Q\left(\frac{\delta_1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$

De todas formas, lo más habitual en comunicaciones es $p_0 = p_1 = 1/2$, lo que es lo más difícil pero también es lo más informativo.

- Constelación multinivel:



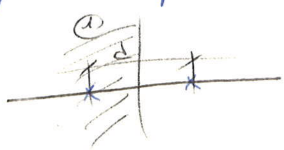
M señales

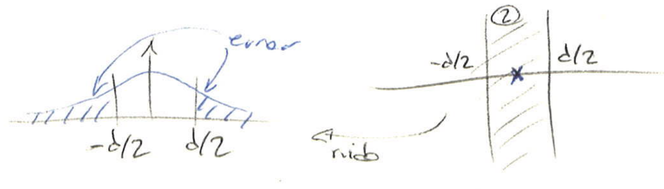
$p_i = 1/M$

La pe de las regiones 1 es la misma, ya que esas regiones son iguales, pero trasladadas.

También para las regiones tipo 2

$$p(e/w_{①}) = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$





$$\Rightarrow p(e/m_{②}) = 2\,Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_e = \frac{1}{M}\Big(2\,p(e/m_{①}) + (M-2)\,p(e/m_{②})\Big)$$

$$= \frac{1}{M}\Big(2Q + (M-2)2Q\Big) = 2\left(1-1/M\right) Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Ahora intentamos expresar "d" en función de la energía media de la constelación:

$$d = d(E)$$

$$E = \sum_{i=0}^{M-1} (i\cdot d)^2 \cdot p_i = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}(i\cdot d)^2 = \frac{d^2}{M}\sum_{i=1}^{M-1} i^2$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N\cdot(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{d^2}{M}\,\frac{(M-1)\,M\,(2M-1)}{6} = \frac{d^2}{6}(M-1)(2M-1)}$$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{6E}{(M-1)(2M-1)}}}$$

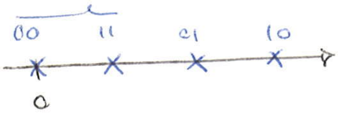
$$\Rightarrow \boxed{p_e = 2\left(1-1/M\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{(M-1)(2M-1)}\cdot\frac{E}{N_0}}\right)}$$

Probabilidad de error de símbolo

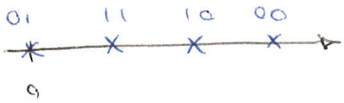
$\neq$ BER $\left(\frac{p_e}{\log_2 M} \le \text{BER} \le p_e\right)$

Ejemplo:

equivocar estos 2 símbolos $\Rightarrow$ equivocar 2 bits



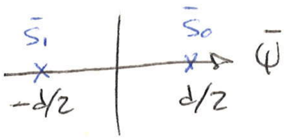
Mala codificación



Mejor, porque si se equivocan 2 símbolos vecinos sólo hay error en 1 bit.

a.2) Polares o antipodales

- Binaria:



$$s_0(t) = -s_1(t) = d/2 \cdot \bar{\varphi}(t)$$

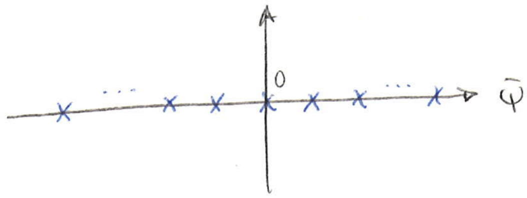
$$p_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$E = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2/4 \Rightarrow d = 2\sqrt{E}$$

$$\Rightarrow p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Es mejor que para la constelación neutral.

- Multinivel:



$$p_e = 2\left(1 - 1/M\right) \cdot Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Igual que antes, ya que sólo se ha hecho una traslación de la constelación.

Diferencias $\longrightarrow$ energías

$$d = d(E)$$

Como vimos antes:

$$E' = E + \|\bar{a}\|^2$$

Donde E es la energía media para una constelación centrada en su centro de gravedad, E' es para la misma constelación trasladada $\bar{a}$, y $\|\bar{a}\|^2$ es la energía del vector de traslación

$$\frac{d^2}{6}(M-1)(2M-1) = E + \left(\frac{M-1}{2}\right)^2 \cdot d^2$$

$$\bar{a} = \frac{(M-1)d}{2}\bar{\varphi}$$

$$E = \frac{d^2}{12}\left((2M-2)(2M-1) - 3(M^2 - 2M + 1)\right)$$

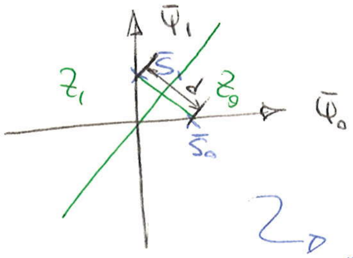
$$\boxed{E = \frac{d^2}{12}(M-1)(M+1)}$$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{12E}{(M-1)(M+1)}}}$$

$$\boxed{p_e = 2\left(1 - 1/M\right) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \cdot \frac{E}{N_0}}\right)}$$

b) Ortogonales

Ejemplo: Caso binario



$\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1$ ortogonales

$Z \Rightarrow$ 1 filtro necesario.

$$d \Rightarrow p_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$\bar{s}_0 = \left(d/\sqrt{2}, 0\right)$$

$$\bar{s}_1 = \left(0, d/\sqrt{2}\right)$$

$$E = d^2/2 \Rightarrow d = \sqrt{2E}$$

$$p_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ unitarias y ortogonales:

$$\int_0^T \varphi_0^2(t)\,dt = 1$$

$$\int_0^T \varphi_1^2(t)\,dt = 1$$

$$\int_0^T \varphi_0(t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0$$

Ortogonales

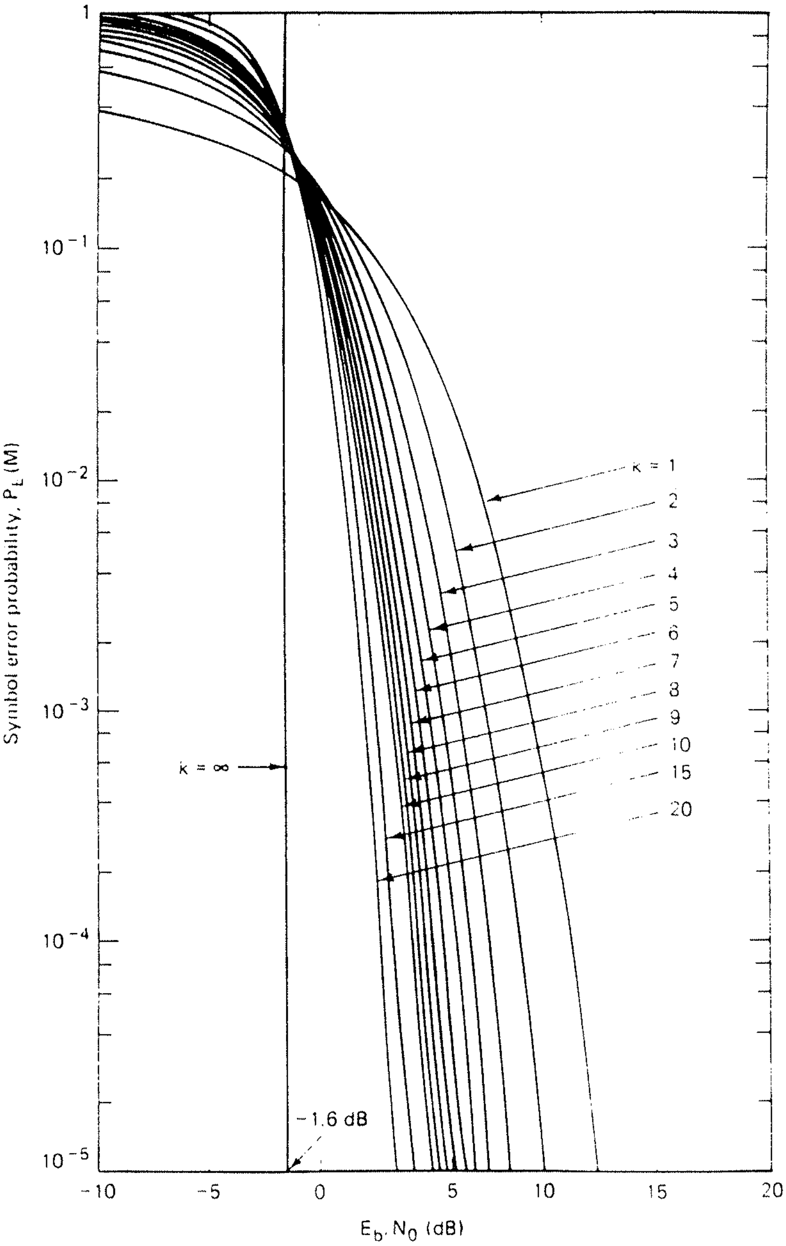
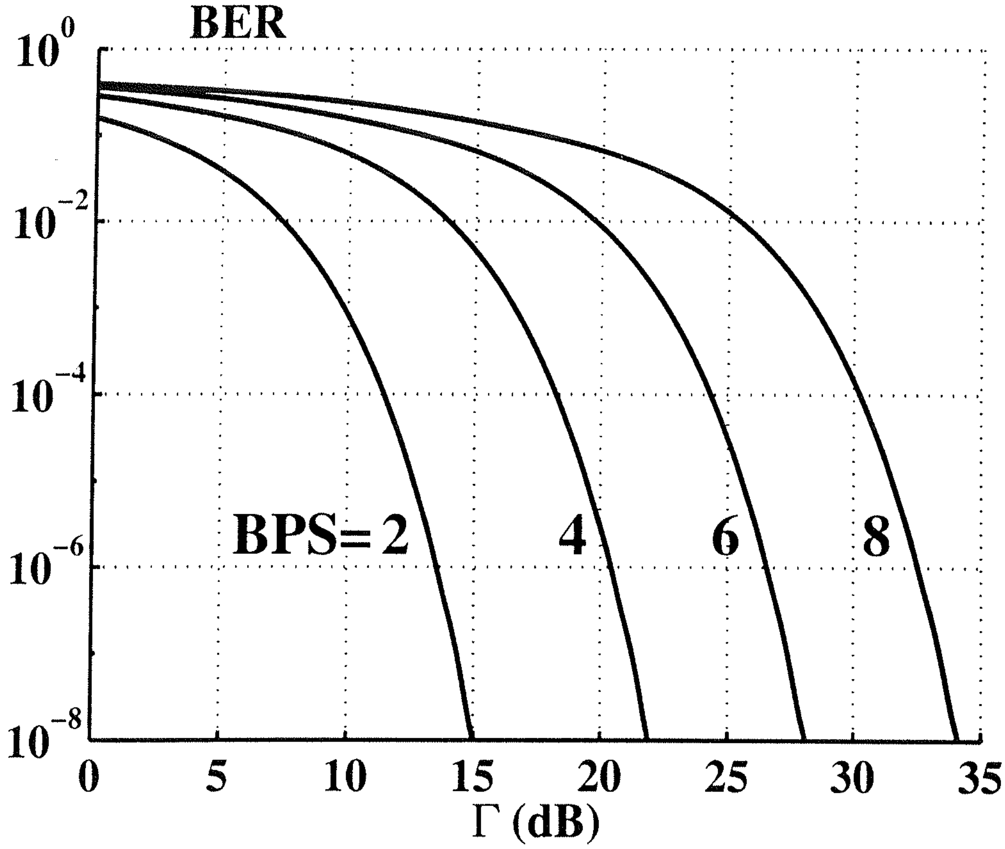
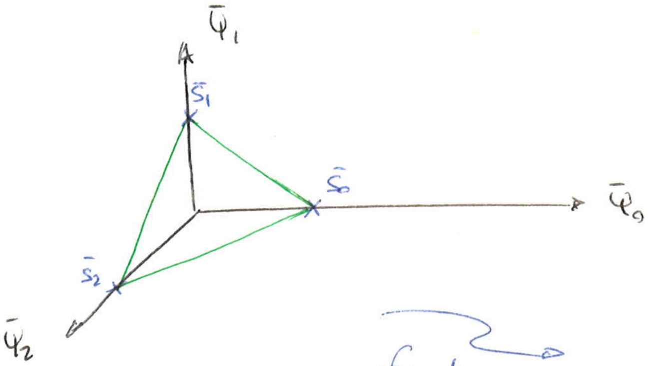


Figure 3.33 Symbol error probability for coherently detected M-ary orthogonal signaling. (Reprinted from W. C. Lindsey and M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973, courtesy of W. C. Lindsey and Marvin K. Simon.)

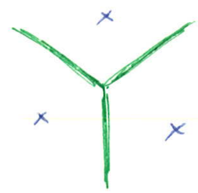
Rejilla



- Multinivel:



fronteras de decisión



$$\begin{cases} \bar{s}_0 = \sqrt{E}\cdot\bar{\varphi}_0 \\ \bar{s}_1 = \sqrt{E}\cdot\bar{\varphi}_1 \\ \bar{s}_2 = \sqrt{E}\cdot\bar{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_{M-1} = \sqrt{E}\cdot\bar{\varphi}_{M-1} \end{cases}$$

$$p_i = 1/M$$

$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$$(\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1) = 0$$

señales equiprobables y equienergéticas

$$\Rightarrow \hat{m} = \max_i (\bar{r}, \bar{s}_i) = \max_i (\bar{r}, \sqrt{E}\cdot\bar{\varphi}_i)$$

$$\bar{r} = [r_0 \ \ldots \ r_{M-1}]^T$$

$$\hat{m} = \max_i (\bar{r}, \bar{\varphi}_i) \qquad \bar{\varphi}_i = [0 \ldots \overset{i}{1} \ldots 0]^T$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{m} = \max_i (r_i)}$$

Sólo tiene que mirar qué componente de la señal recibida es más grande

En Z_i, la componente r_i es mayor que cualquier otra.

$$P_e = \sum_i p(e/m_i)\cdot p_i$$

$\left\{\begin{array}{l} p_i = 1/M \\ p(e/m_i) \text{ la misma para todos los } i \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $\boxed{P_e = p(e/m_i)}$ para cualquier i

$$= 1 - p(c/m_i) = 1 - \int_{Z_i} p(\bar{r}/m_i)\, d\bar{r}$$

$$\bar{r} = \bar{s}_i + \bar{n} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_0 = n_0 \\ r_1 = n_1 \\ \vdots \\ r_i = n_i + \sqrt{E} \\ \vdots \\ r_{M-1} = n_{M-1} \end{array}\right.$$

r_k ruidos gaussianos de media nula $(k \neq i)$

r_i ruido gaussiano de media $\sqrt{E}$

$$P_e = 1 - \int_{Z_i} p_{n_0 \ldots n_{M-1}}(r_0, \ldots, r_i - \sqrt{E}, \ldots, r_{M-1})\, dr_0\, dr_1 \ldots dr_{M-1}$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{r_i}\int_{-\infty}^{r_i} \cdots \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{i} \cdots \int_{-\infty}^{r_i}\int_{-\infty}^{r_i} p_{n_0 \ldots n_{M-1}}(r_0, \ldots, r_{M-1})\, dr_0 \ldots dr_{M-1}$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - Q\left(\frac{r_i}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^{M-1} p_{n_i}(r_i)\, dr_i$$

$\Rightarrow$ no tiene primitiva analítica y la resolución numérica es complicada

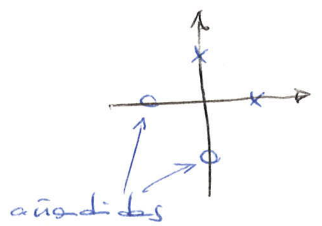
$\Rightarrow$ <u>acotar</u>

Si las señales son equiprobables y equienergéticas:

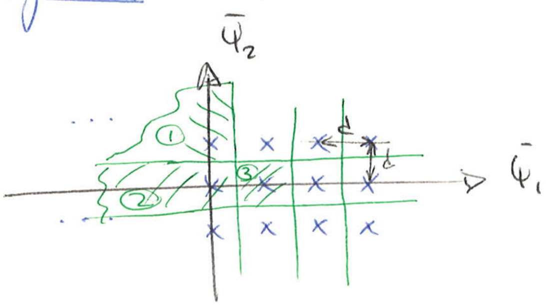
$$\boxed{p_e \leq (M-1)\, Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)}$$

Desde el punto de vista de la energía, las señales ortogonales no son muy buenas. Se puede llevar el centro de gravedad al origen para mejorarla en cuanto a energía, pero ya no son ortogonales
$\Rightarrow$ Simplex

Otras son las biortogonales:



c) Rectangulares:



$p_i = 1/M$

$$p_e = \frac{1}{M}\left(N_{1}\, p(e/m_{1}) + N_{2}\, p(e/m_{2}) + N_{3}\, p(e/m_{3})\right)$$

N_i = nº señales tipo i

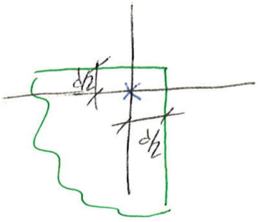
$N_{1} = 4$

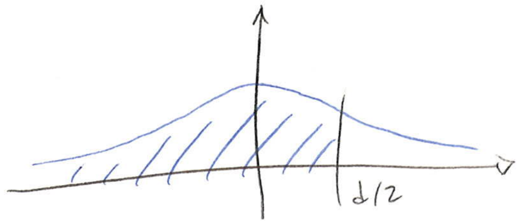
N_{2} = hay que calcularlo. Si $M = N_x \cdot N_y$: $N_{2} = 2(N_x - 2) + 2(N_y - 2)$

$N_{3} = (N_x - 2)(N_y - 2)$

$$p(e/m_1) = 1 - p(c/m_1) = 1 - \int_{-\infty}^{d/2}\int_{-\infty}^{d/2} p_{n_1 n_2}(r_1, r_2)\, dr_1\, dr_2$$

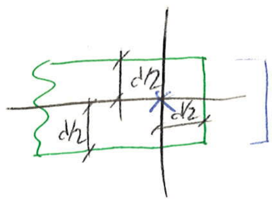
$$= 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^2$$

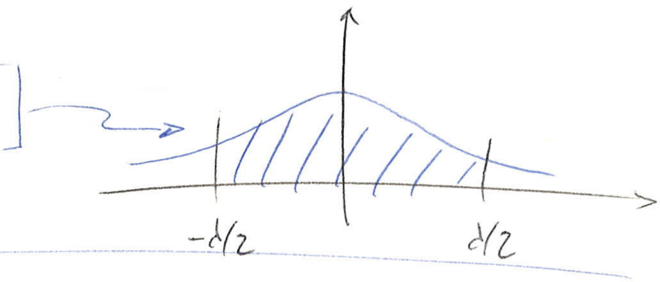




$$\boxed{p(e/m_1) = 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)}$$

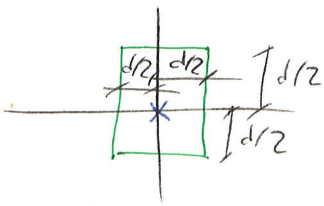
$$p(e/m_2) = 1 - p(c/m_2)$$



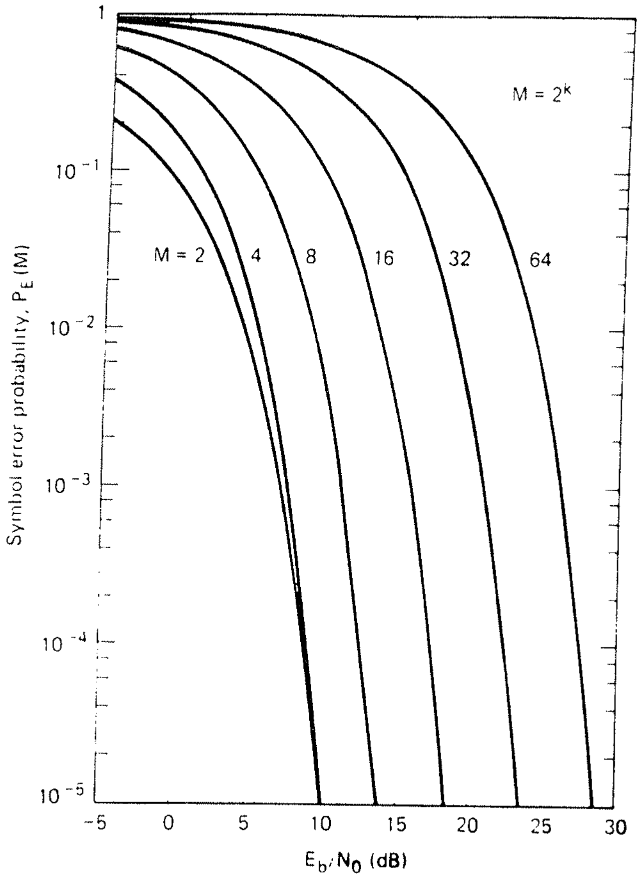


$$\boxed{p(e/m_2) = 3Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 2Q^2\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)}$$

$$p(e/m_3) = 1 - p(c/m_3)$$

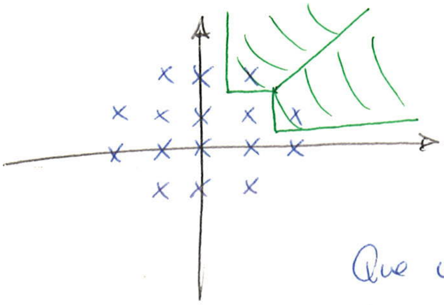


$$\boxed{p(e/m_3) = 4\left(Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)}$$



Sectoriales

No es raro encontrar constelaciones del tipo:

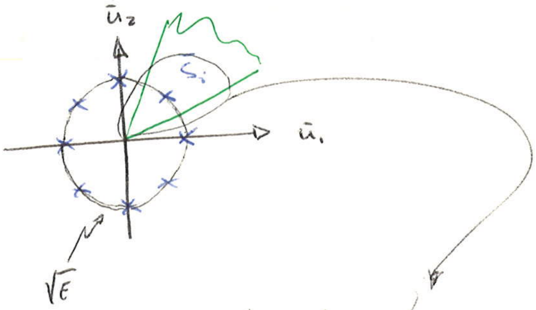


Que no sean tratables como hemos visto.

d) Sectoriales:

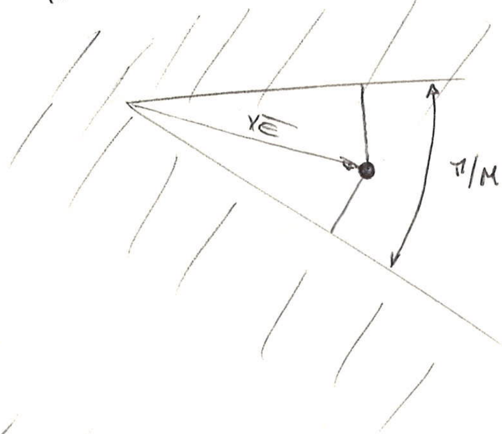
$E_i = E$

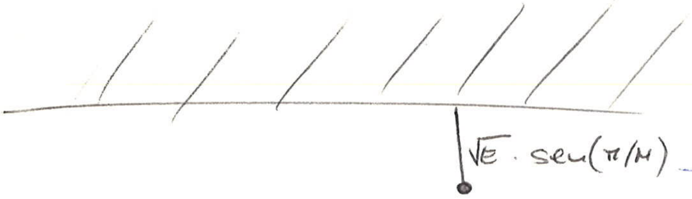
$P_i = P$



$P_e = \sum_i p(e/m_i)\, P_i$

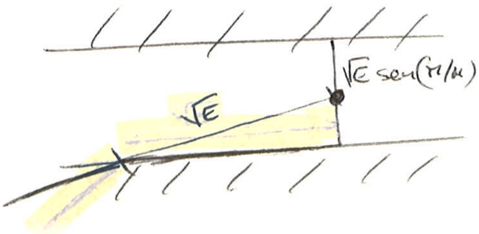
$= p(e/m_i) = 1 - p(c/m_i)$





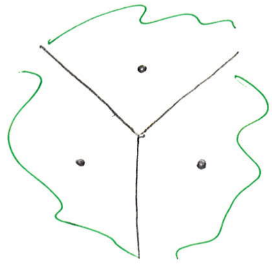
$$\Rightarrow Q\left(\frac{\sqrt{E}\, sen(\pi/M)}{\sqrt{N_0/2}}\right) < P_e < 2Q\left(\frac{\sqrt{E}\, sen(\pi/M)}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

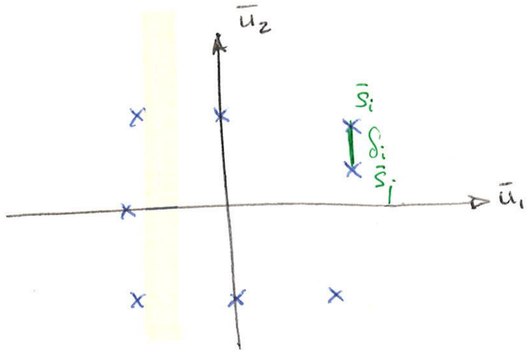
Cortar + rotar



e) Constelaciones de geometría arbitraria:

$p_i = 1/M$





⇒ geometrías de las regiones de decisión varias ⇒ acotar

Por ejemplo, la cota de Arthurs y Dym:

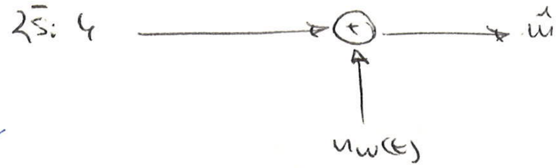
$$\boxed{Q\left(\frac{\bar{\delta}}{\sqrt{2N_0}}\right) \le p_e \le (M-1)\, Q\left(\frac{\delta^*}{\sqrt{2N_0}}\right)}$$

$\bar{\delta} \equiv$ para cada señal $\bar{s}_i$ se toma la distancia más corta a otra señal, δ_i : $\bar{\delta} = \frac{1}{M}\sum_i \delta_i$

$\delta^* = \min \delta_i$ La menor de las distancias más cortas a cada una de las señales.

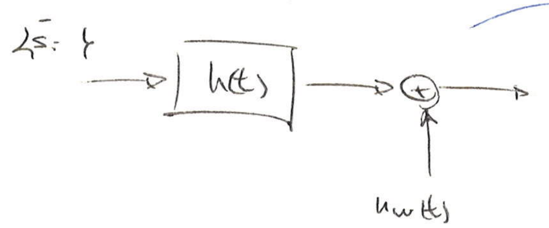
3.5.- Modelos especiales

3.5.1- Efecto del filtrado



$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

Canal con AWGN

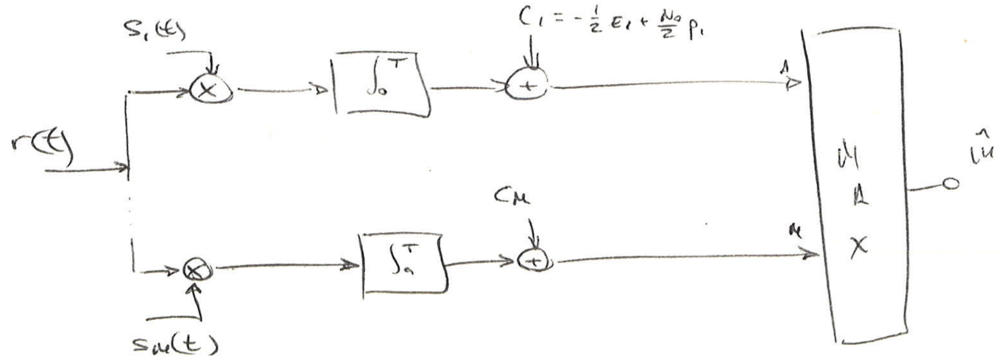


Las referencias cambian, en el primer caso se trata de las mismas señales $\bar{s}_i$ pero con ruido. En el segundo son unas señales filtradas:

$$s_i'(t) = s_i(t) * h(t)$$

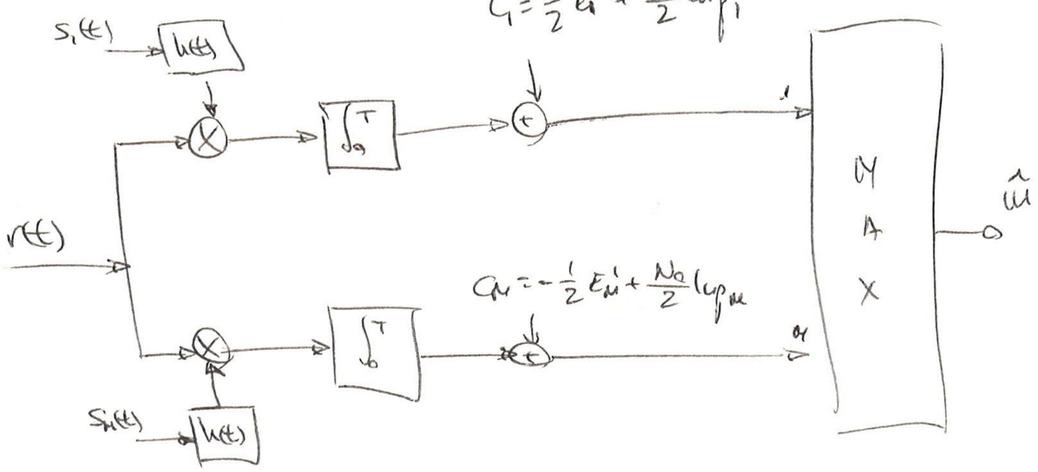
$$E_i \longrightarrow E_i'$$

$$\hat{m} = \max_i \left((\bar{r}, \bar{s}_i') - \frac{1}{2} E_i' + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

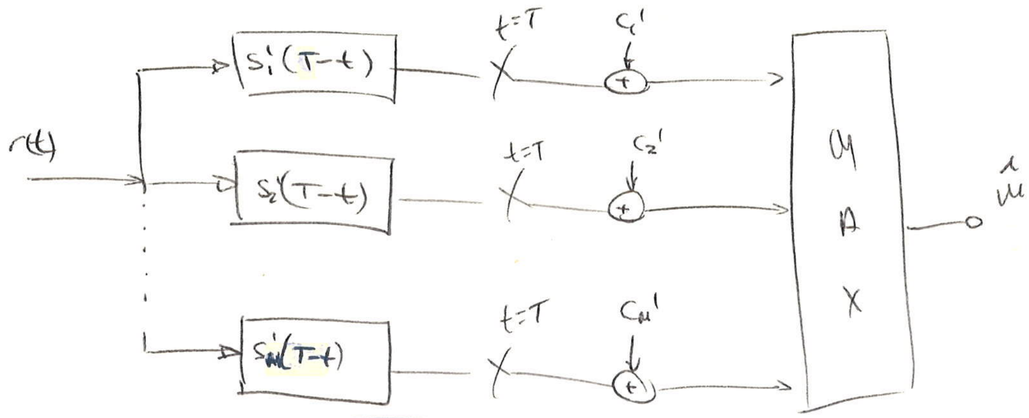


Antes

AHORA:

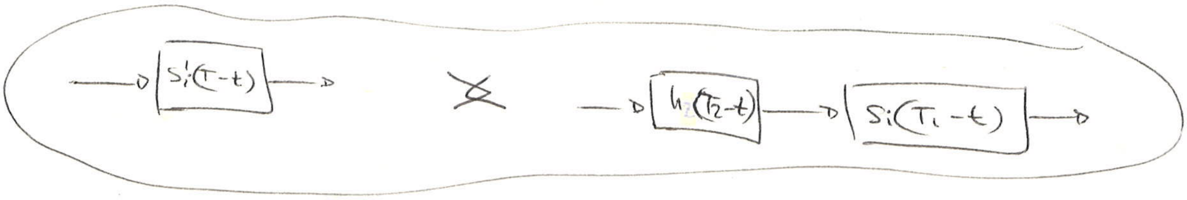


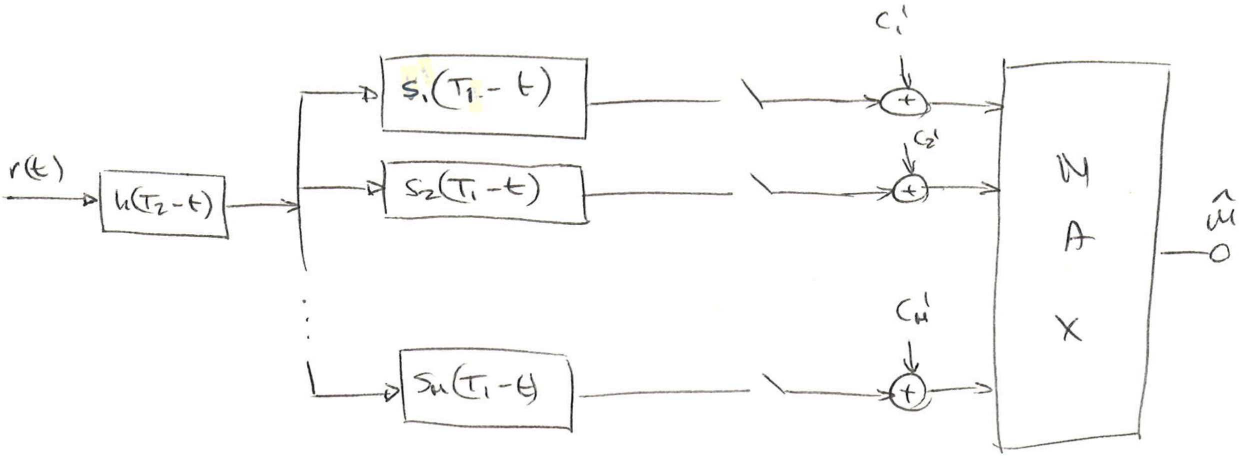
Para los filtros adaptados:



$s_i'(T-t) = s_i(T_1-t) * h(T_2-t)$

si $T_1 + T_2 = T$





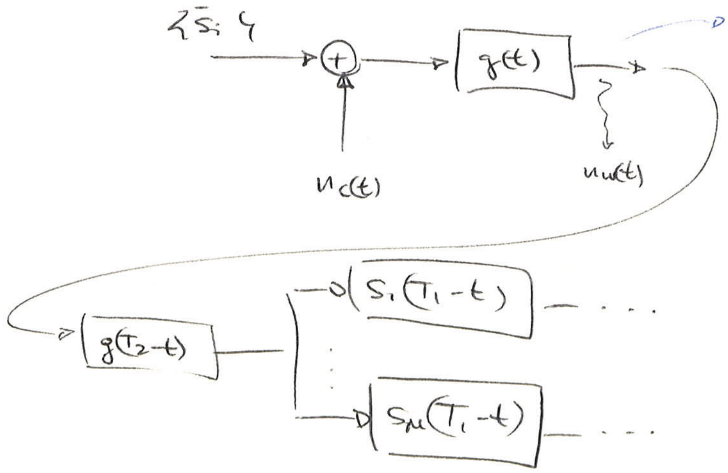
3.5.2- Efecto del Ruido Coloreado

Hemos resuelto el caso de AWGN con DEP $N_0/2$

Ahora tenemos un ruido que no es blanco, $S_n(f)$

Bajo ciertas condiciones, y dado $S_n(f)$, se puede encontrar un filtro lineal llamado filtro blanqueador ($g(t)$), cuya DEP es:

$$|G(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{S_n(f)}$$



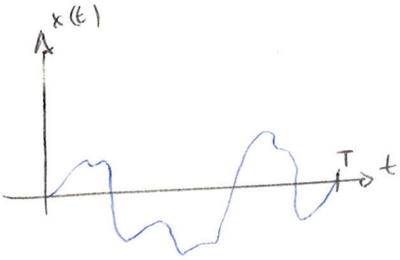
pero las señales no son tampoco las iniciales, por lo que en el receptor MAP hay que volver a filtrar:

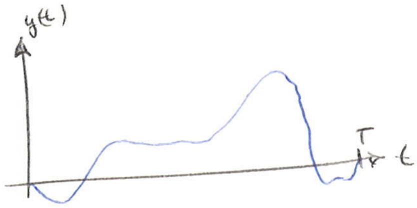
$$s_i'(t) = s_i(t) * g(t)$$

Problemas

① $R = 1\,\Omega$

$$\begin{cases} \int_0^T x^2(t')\,dt' = \int_0^T y^2(t')\,dt' = 16\ J \\ \int_0^T x(t')\cdot y(t')\,dt' = 0 \end{cases}$$

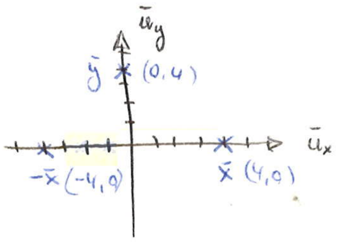




Canal ⇒ AWGN, $S_n = 4\ W/Hz$

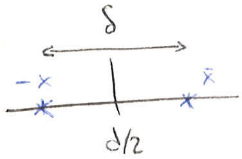
a) Pe mínima si el alfabeto es $x(t), -x(t)$

b) Repetir con $x(t), y(t)$

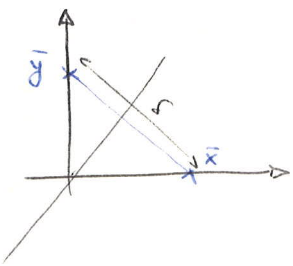


a) $P_e = Q\left(\dfrac{\delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(2)$

$\dfrac{N_0}{2} = 4$

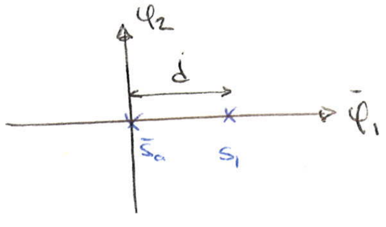


b) $P_e = Q(\sqrt{2})$

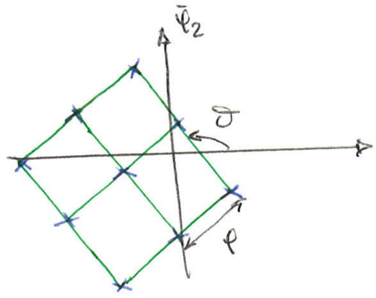


② a) ⇒ $p_e = q$ cuando señales equiprobables y canal AWGN

Calcula p_e mínima para b) a partir de ℓ y ϑ

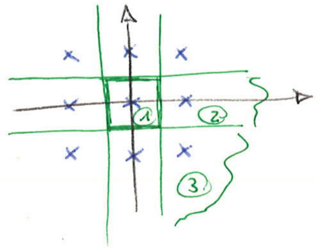


a)



b)

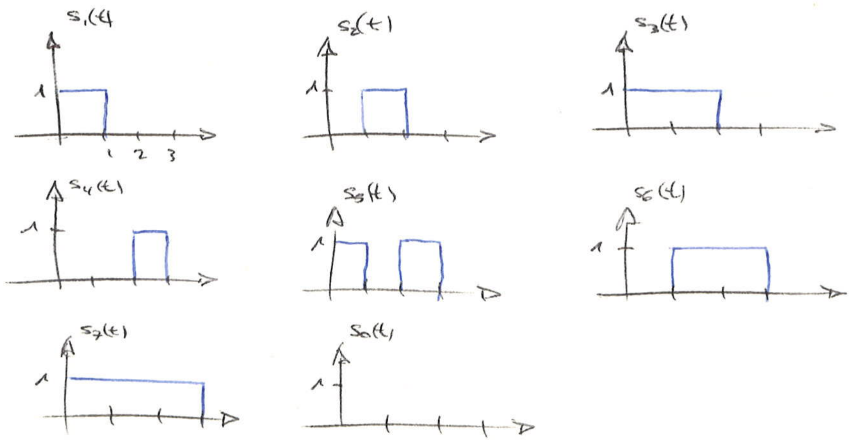
No depende de ℓ y ϑ:



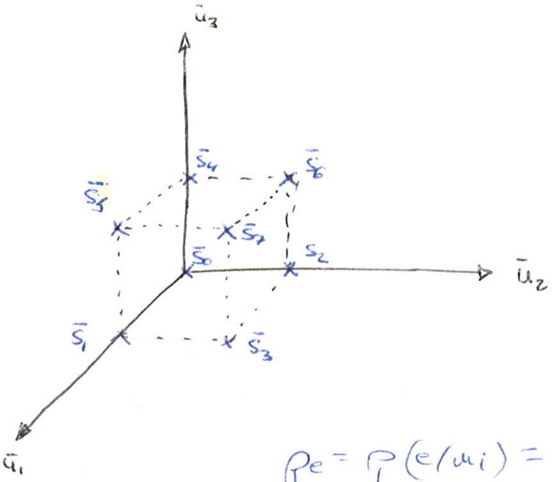
$$\begin{cases} P(e/m_{1}) = 4q - 4q^2 \\ p(e/m_{2}) = 3q - 2q^2 \\ p(e/m_{3}) = 2q - q^2 \end{cases}$$

$$\boxed{p_e = \frac{1}{9}(4q - 4q^2) + 4/9\,(3q - 2q^2) + \frac{4}{9}(2q - q^2) = \frac{8}{3}q - \frac{16}{9}q^2}$$

③ Calcular p_e mínima en un canal AWGN ($S_\eta = N_0/2$) con:



Base: $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_4(t)$



$$P_e = P(e/m_i) = 1 - P(c/m_i)$$

$$= 1 - P(u_1 < 1/2,\ u_2 < 1/2,\ u_3 < 1/2)$$

$$= 1 - \underbrace{P(u_1 < 1/2)}_{1 - Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)} \cdot P(u_2 < 1/2) \cdot P(u_3 < 1/2)$$

$$P_e = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^3 = Q^3\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 3Q^2\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + 3Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

---

(5) N señales definidas en $0 \le t \le T$. N mensajes. Canal AWGN.
Señales iguales en $t_1 \le t \le t_2$

a) Demuestra que un receptor óptimo puede ignorar $t_1 \le t \le t_2$ sin dejar de ser óptimo

b) ¿Y si el ruido no es blanco?

a) Irrelevante ⇒ no lleva información ⇒ se puede omitir.

$$\hat{m} = \max_i \left(\int_0^T r(t)\, s_i(t)\, dt - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$$= \max_i \left(\int_0^{t_1} r(t) s_i(t)\, dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} r(t) s_i(t)\, dt}_{\substack{\text{constante } \forall i \\ \Rightarrow \text{ irrelevante}}} + \int_{t_2}^{T} r(t) s_i(t)\, dt - \frac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

b) $\rightarrow$ Filtro blanqueador

$$s_i'(t) = s_i(t) * g(t)$$

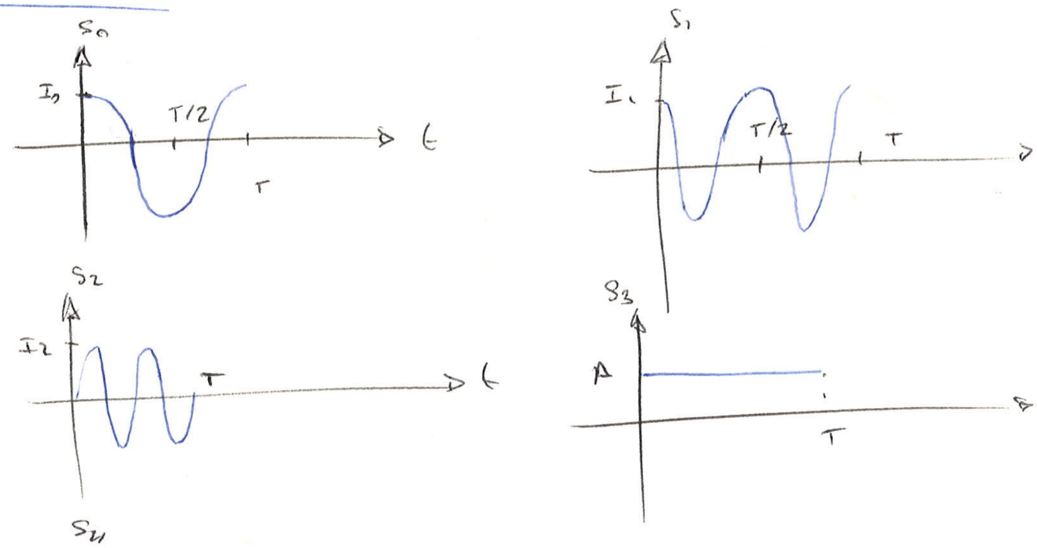
$$s_i'(t) \qquad t_1 \le t \le t_2$$

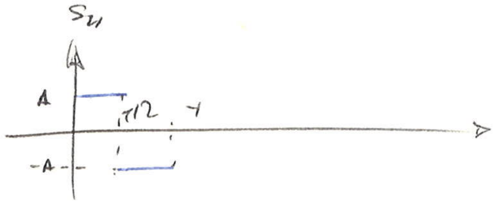
$$s_i'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\underbrace{t-\tau}_{})\, g(\tau)\, d\tau \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$\rightarrow$ necesito s_i fuera de (t_1, t_2), por lo que en general no son iguales.

Por tanto, en general no es cierto

Otro Problema:





Equiprobables, canal AWGN

a) I_0, I_1, I_2 para que sean equienergéticos

b) Receptor óptimo de complejidad mínima

c) P_e?

a) $s_0 = I_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \qquad s_2 = I_2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{T} t \qquad s_4 = \begin{cases} A & 0 \le t \le T/2 \\ -A & T/2 \le t \le T \end{cases}$

$s_1 = I_1 \cos \frac{4\pi}{T} t \qquad s_3 = A$

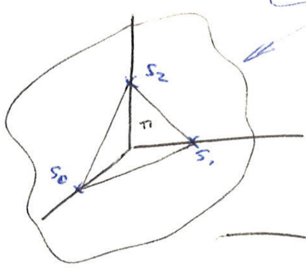
$$E_2 = \frac{I_2^2}{2} \cdot T = A^2 \cdot T = E_3 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} I_i = A\sqrt{2} \\ i = 0,1,2 \end{array}}$$

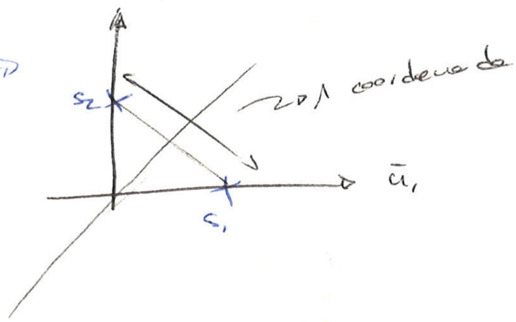
b) Base a ojo:

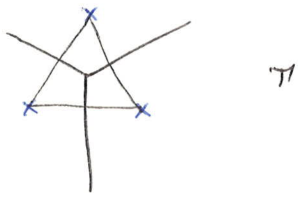
s_0, s_1, s_2 y s_3 ortogonales entre sí

s_4 es ortogonal a s_2 y s_3. También a s_1 y s_0

¿S filtros? Pero no!







Si tenemos M señales ortogonales, cuando harán falta M-1 filtros:

s_0	0	
s_1	$s_1 - s_0$	(considerar los vectores diferencia)
$\vdots$	$\vdots$	
s_M	$s_M - s_0$	

$$\hat m = \max_i \left((\bar r, \bar s_i) - \tfrac{1}{2} E_i + \frac{N_0}{2} \ln p_i \right)$$

$$(\bar r, \bar s_0) - (\bar r, \bar s_0) = 0$$

$$(\bar r, \bar s_1) - (\bar r, \bar s_0) = (\bar r, \bar s_1 - \bar s_0)$$

$$\vdots$$

$$(\bar r, \bar s_{M-1}) - (\bar r, \bar s_0) = (\bar r, \bar s_{M-1} - \bar s_0)$$

PROPUESTO:

Constelación de 2 señales equiprobables en un canal AWGN ($N_0/2$):

$$s_0(t) = -s_1(t) = e^{-t} \quad t \geq 0$$

Calcular:

a) p_e de un receptor óptimo ($0 \leq t \leq \infty$)

b) Comparar el resultado anterior con la p_e de un receptor que restrinja el intervalo a $0 \leq t \leq 2$

---

a) $$p_e = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$d \to E = \int_0^\infty e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$p_e = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

b) Para $0 \leq t \leq 2$ hay menos energía:

$$E_2 = \int_0^2 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right) = 0'491$$

$$p_e = Q\left(\frac{0'491}{\sqrt{2N_0}}\right)$$