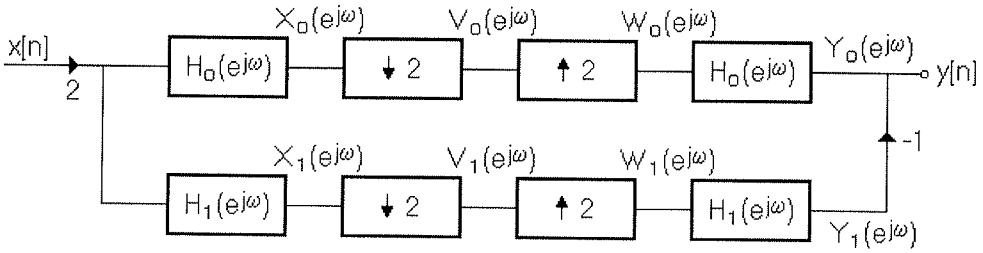
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación.
Departamento de Ingeniería de Comunicaciones - Universidad de Málaga.
Examen de Tratamiento Digital de la Señal I - Convocatoria de Septiembre de 2000.

EJERCICIO 1

(problemas 4.53)

Tenemos el siguiente sistema:



a) Hallar los espectros de $V_0(e^{j\omega})$ y $V_1(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$, $H_0(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$, teniendo en cuenta que puede producirse aliasing.

b) Hallar los espectros de $Y_0(e^{j\omega})$ e $Y_1(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$, $H_0(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$.

c) Demostrar que si $H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)})$ entonces el sistema es lineal y estable, y su respuesta en frecuencia es igual a $H_0^2(e^{j\omega}) - H_1^2(e^{j\omega})$.

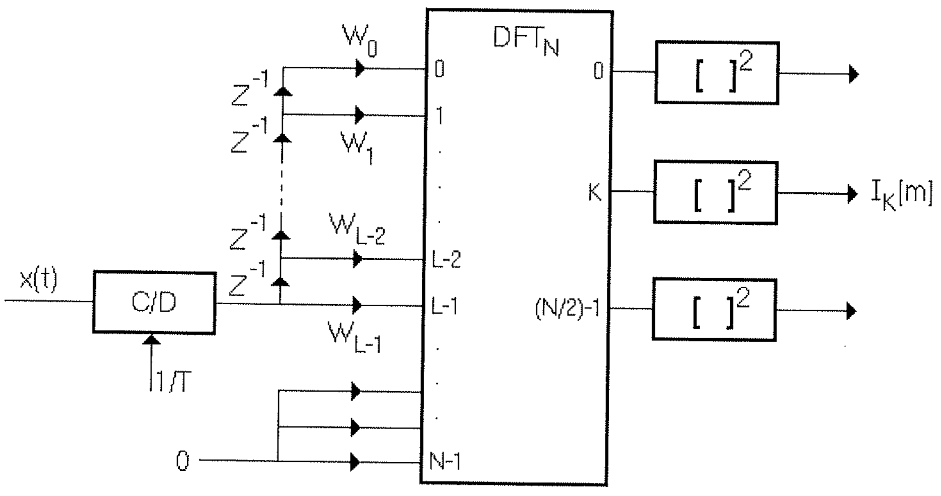
d) Pintar el módulo de los espectros si $H_0(e^{j\omega})$ es un filtro paso-bajo hasta frecuencia $\pi/2$, se cumple las condiciones del apartado anterior, y además $X(e^{j\omega})$ es una señal triangular ($X(e^{j\omega}) = 1 - (|\omega|/\pi)$ con $|\omega| < \pi$).

EJERCICIO 2

Hallar y dibujar la respuesta al impulso de $H_0(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$ si queremos diseñarlo mediante un filtro FIR con 17 coeficientes (orden 16).

EJERCICIO 3

Tenemos un analizador de espectro donde se realiza un enventanado de Hann (L = 400, N = 1024 y 1/T = 10 KHz) en la figura siguiente, donde w_i son los coeficientes de Hann.



a) Hallar la resolución en Hz.
b) Hallar la separación de las muestras en Hz.
c) Hallar el nº de multiplicaciones si se utiliza FFT con diezmado en el tiempo.

EJERCICIO 4

Con el ejercicio anterior se realiza un estimador exponencial donde $T_K[m] = \alpha \cdot T_K[m-1] + I_K[m]$.

a) Hallar la expresión de recurrencia en función de $I_K[m]$ e $I_K[m-p]$ (con $p > 0$) y comentar la expresión: "es un estimador móvil donde las muestras de I_K están más ponderadas cuantas más recientes son".
b) Hallar α para que el sesgo $T_K[m]$ sea igual al de $I_K[m]$.

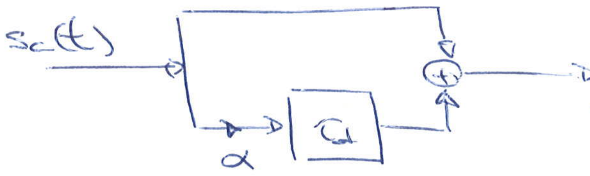
Nota: $T_K[m]$ es el conjunto de muestras resultante de estimar $I_K[m]$.

PROBLEMAS TEMA 1

Oppenheim - Schafer, 2ª ed. pp 214 - 239

4.7✓, 4.8✓, 4.21✓, 4.22✓, 4.24✓, 4.25✓, 4.45✓, 4.26✓, 4.36✓
4.37✓, 4.38✓, 4.40✓, 4.53✓, 4.54✓

$\boxed{4.7}$ Modelo de un canal multitrayecto



$x_c(t) = s_c(t) + \alpha s_c(t - \tau_d)$

$s_c(t)$ limitado en banda: $S_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| \geq \pi/T$

$x_c(t)$ muestreada: $x[n] = x_c(nT)$

a) Transformada de Fourier de $x_c(t)$ y $x[n]$:

$$x_c(t) = s_c(t) + \alpha s_c(t - \tau_d)$$

$$x[n] = s_c(nT) + \alpha s_c(n(T - \tau_d)) \leftarrow$$ sin aliasing, ya que $s_c(t)$ limitado en banda

linealidad:

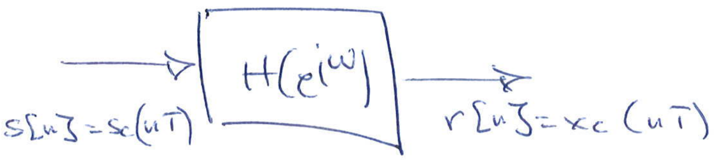
$$\boxed{X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega) + \alpha S_c'(j\Omega)\, e^{-j\tau_d \Omega}}$$

~~$X(e^{j\omega}) = \Lambda S_c'(e^{j\omega/T}) + \alpha S_c'(e^{j\omega/T})\, e^{-j\omega_d T}$~~

Conversión C/D ideal:

$$\boxed{\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)\left(1+\alpha e^{-j\frac{\omega \tau_d}{T}}\right)\end{aligned}}$$

b)



¿$H(e^{j\omega})$?

Sistema de TDS ideal:

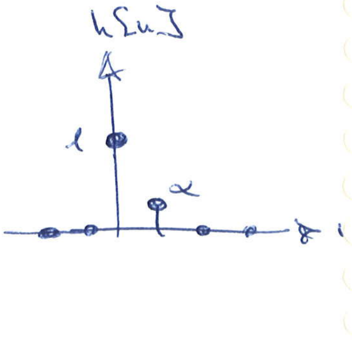
$$R(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$$

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\frac{\omega \tau_d}{T}}}$$

c) $\tau_d = T \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = \delta[n] + \alpha\,\delta[n-1]}$$



$\tau_d = T/2 \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega/2}$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \alpha e^{-j\omega/2}\right)e^{j\omega n}\,d\omega =$$

$$= \delta[n] + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\alpha\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)}\,d\omega}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-1/2)}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{j(n-1/2)}\left[e^{j\omega(n-1/2)}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

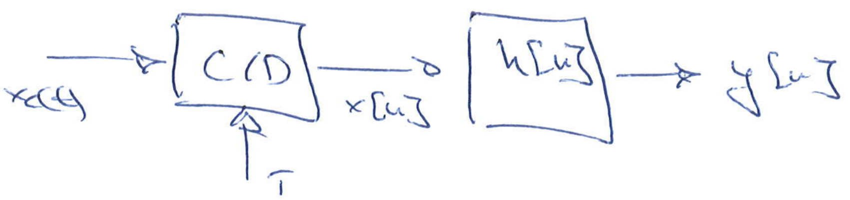
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{j(n-1/2)}\left(e^{j\pi(n-1/2)} - e^{-j\pi(n-1/2)}\right)$$

$$\left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \operatorname{sen} x\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n-1/2}\operatorname{sen}\pi(n-1/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = \delta[n] + \alpha\,\frac{\operatorname{sen}\pi(n-1/2)}{\pi(n-1/2)}}$$

$\boxed{4.8}$



$X_c(j\Omega)=0\ ,\ |\Omega|\geq 2\pi\cdot 10^4$ ⇒ limitada en banda

$x[n]=x_c(nT)$

$y[n]=T\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

a) No aliasing ⇒ ¿T_{max}?

Criterio de Nyquist: $f_s\geq 2f_{max}$

$\Omega_{max}=2\pi\cdot 10^4$

$$\boxed{T_{max}=\frac{1}{2}\frac{1}{f_{max}}=\frac{1}{2\cdot 10^4}=50\,\mu s}$$

b) ¿$h[n]$?

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=T\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$\boxed{h[n]=T\cdot u[n]=\begin{cases}T & n\geq 0\\ 0 & \text{resto}\end{cases}}$$

Justificación: $\underline{x[n]=\delta[n]}\Rightarrow\underline{y[n]}=T\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\underline{T\cdot u[n]}$

c) $y[n]\big|_{\infty}$ en términos de $X(e^{j\omega})$

Teorema del Valor final:

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{\omega\to\infty} Y(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$$

$$h[n] = T\,u[n] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$= T \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$$

ojo: linealidad $\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = T \sum_{k=-\infty}^{n} X(e^{j\omega})$

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{n\to\infty} y[n]\big|_{n\to\infty} = T \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = X(e^{j0}) \Rightarrow \boxed{y[n]\big|_{n\to\infty} = T\, X(e^{j0})}$$

d) ¿Valor de T para

$$y[n]\Big|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\,dt \quad ?$$

$$y[n]\Big|_{n=\infty} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = T\sum_{k=-\infty}^{n} x_c(kT)$$

$$y[n]\Big|_{n=\infty} = T\,X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} T\cdot X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)\Bigg|_{\omega=0}$$

$$\xcancel{= T\cdot X_c\left(-j\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

$$\xcancel{= T\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\,e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\,dt}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(-j\frac{2\pi k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\,\underline{e^{j\frac{2\pi k}{T}t}}\,dt$$

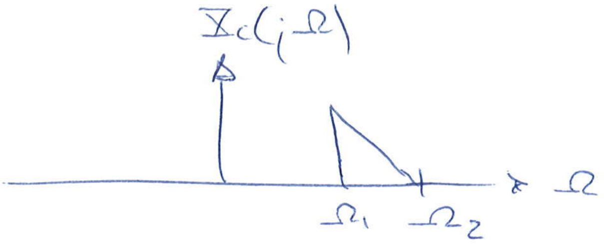
$X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi\cdot 10^{4}$

$$\Rightarrow y[n]\Big|_{n=\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(-j\frac{2\pi k}{T}\right) \underset{T\leq 10^{-4}}{=}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j0) = X_c(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{T \leq 10^{-4}}$$

$\boxed{4.21}$



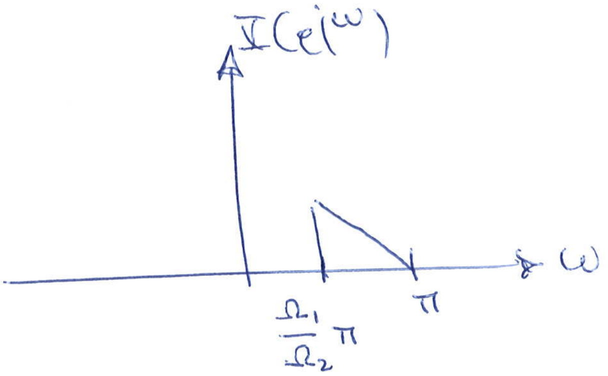
$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$

$x[n] = x_c(nT)$

a) Dibujar $X(e^{j\omega})$ para $T = \frac{\pi}{\Omega_2}$

límite para aliasing

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| \leq \pi$$



b) Mínima frecuencia de muestreo:

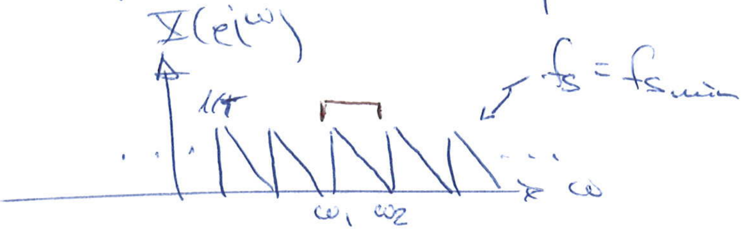
Señal con ancho de banda $\Delta\Omega \Rightarrow$

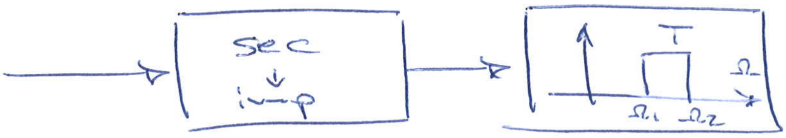
$\Rightarrow$ se puede muestrear sólo esa banda

y entonces $\boxed{f_{s_{min}} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}}$

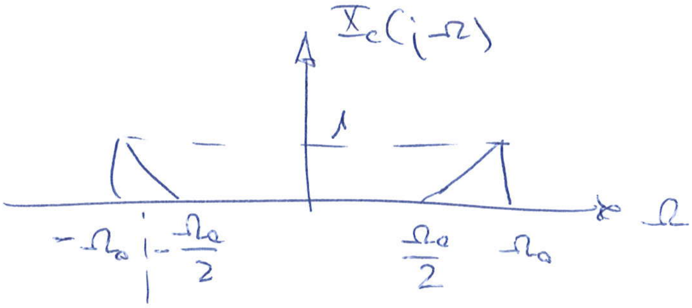
$1/2\pi \rightarrow$ banda sólo en un eje

c) Recuperar $x_c(t)$ a partir de $x[n]$



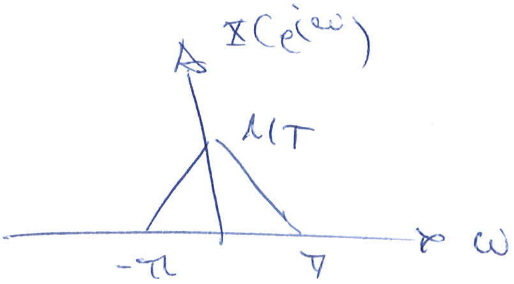


4.22

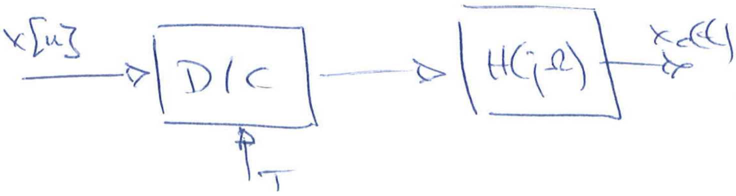


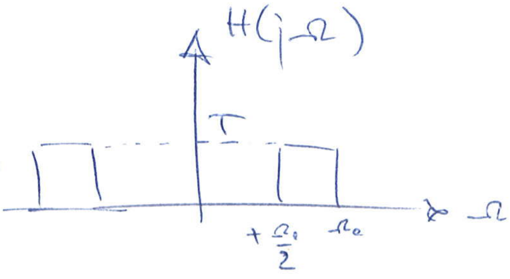
$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} \rightarrow x[n] = x_c(nT)$$

a) $\Delta\Omega = \frac{\Omega_0}{2} \Rightarrow$ no hay aliasing



b) Recuperación de $x_c(t)$:





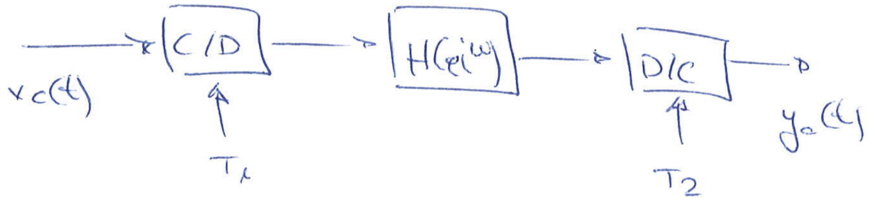
c) Rango de valores de T para poder recuperar x[n]

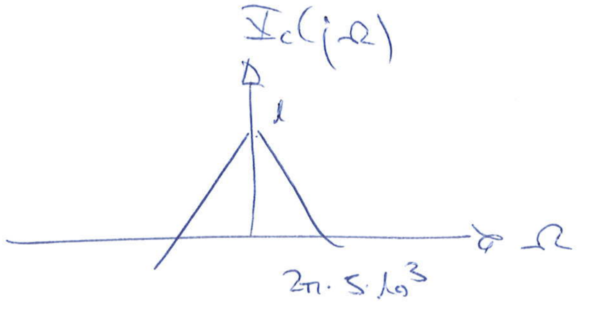
Criterio de Nyquist $\Rightarrow \boxed{T < \frac{\pi}{\Omega_0}}$

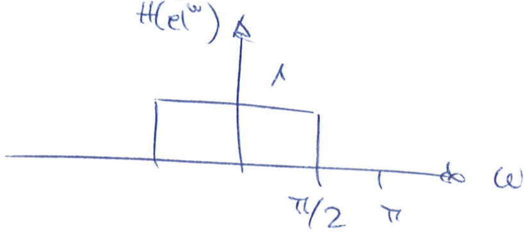
Límite sin aliasing por la forma de las bandas:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega_0}}$$

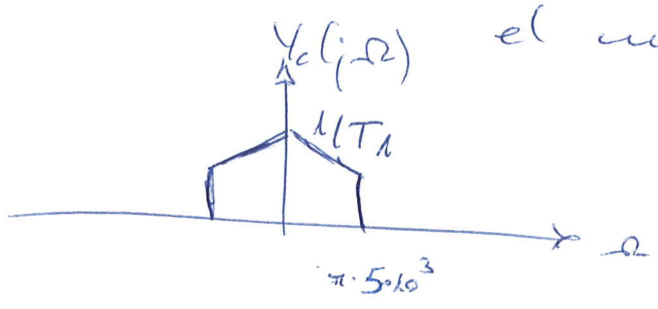
4.24







a) $\frac{1}{T_1} = 1/T_2 = 10^4$ → límite de aliasing en el muestreo $\Rightarrow 5\cdot 10^3 \to \pi$



b) $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 2 \cdot 10^4$

$2\pi 10^3 \cdot 5 \longrightarrow \pi/2 \Rightarrow Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$

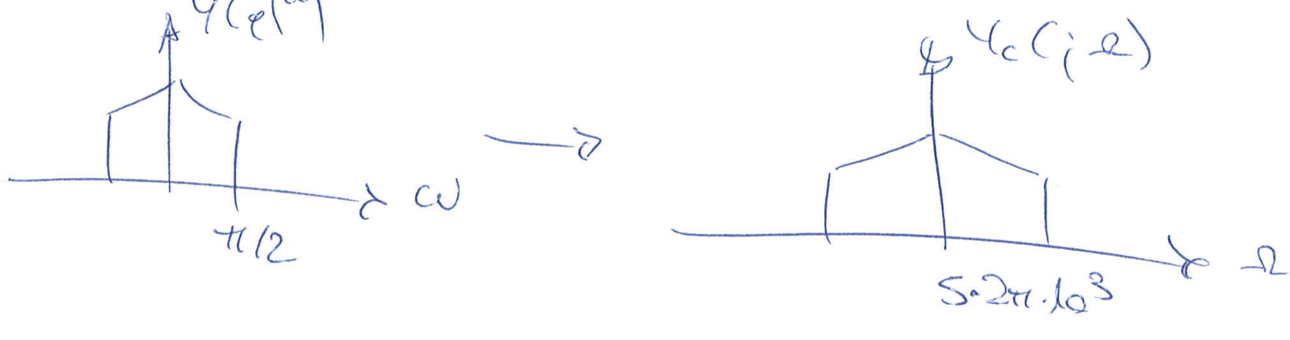
c) $\frac{1}{T_1} = 2 \cdot 10^4$

$\frac{1}{T_2} = 10^4$ } cambia frecuencia de muestreo

$T_2 = 2T_1 \Rightarrow$ se estrecha en $Y_c(j\Omega)$

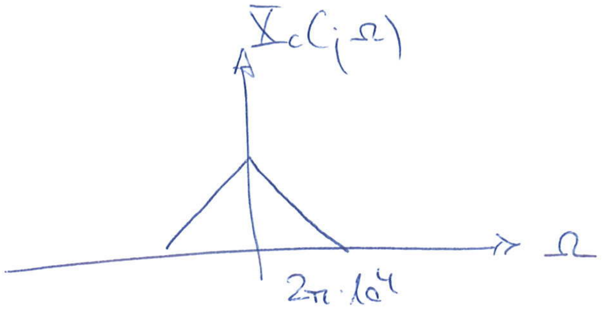
d) $\frac{1}{T_1} = 10^4 \longrightarrow$ filtra media banda

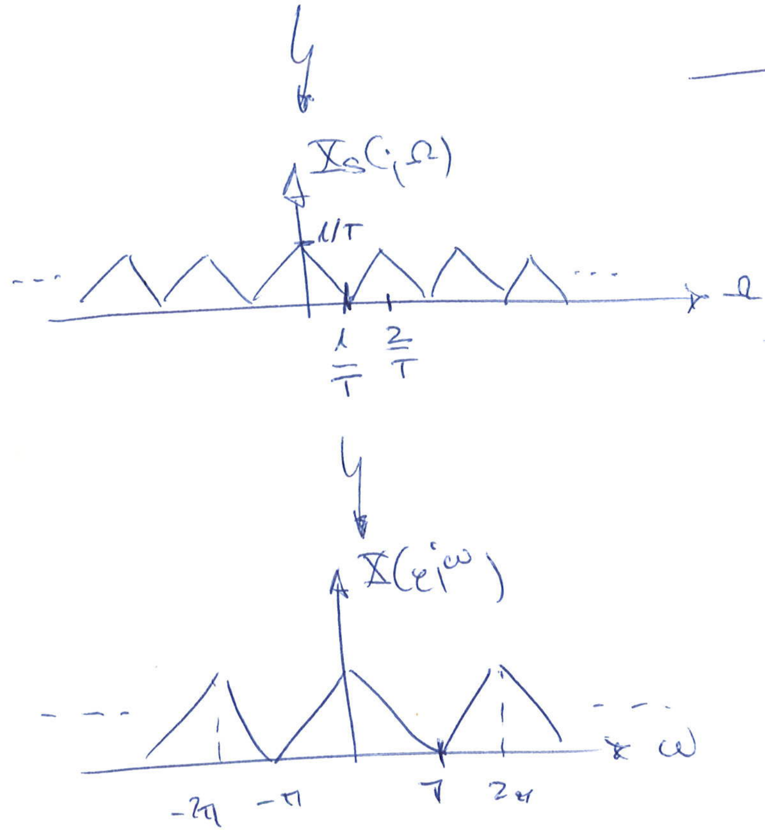
$\frac{1}{T_2} = 2 \cdot 10^4 \longrightarrow$ ensancha $Y_c(j\Omega)$

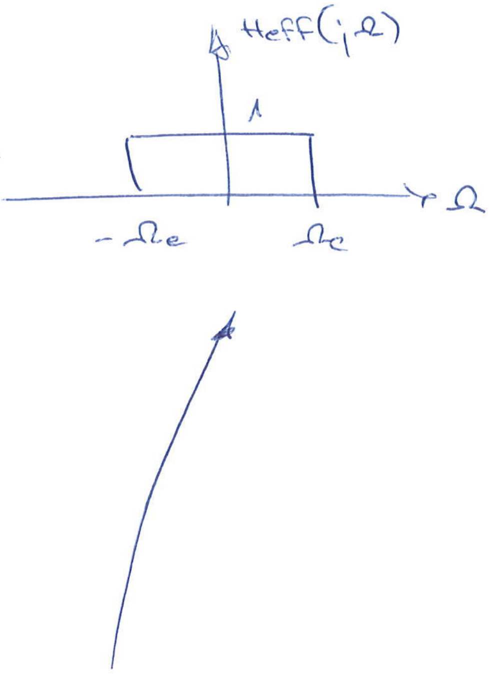


$\boxed{4.25}$

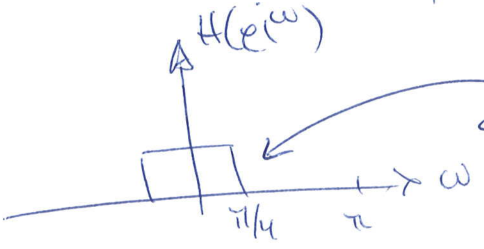
a) $1/T = 20\,kHz$





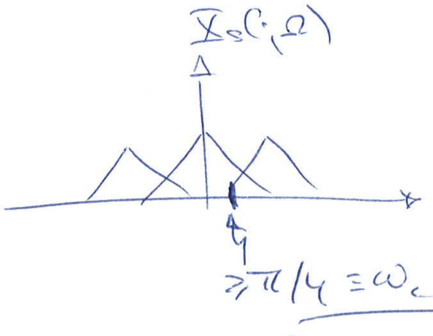


b) Valores de T para $H_{eff}(j\Omega)$



esto elimina el posible aliasing mientras no sea muy grande

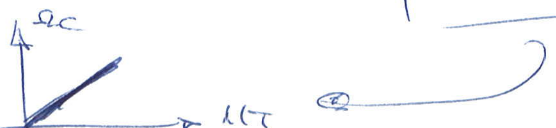
$\Rightarrow \Omega_{max} = 2\pi\cdot 10^4$



$2o\ \Omega_{max} T \leq 2\pi - \omega_c = \frac{7\pi}{4}$

$$\boxed{T \leq \frac{7}{8} 10^{-4}}$$

c) $\omega_c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\Omega_c = \frac{\pi}{4}\frac{1}{T}}$

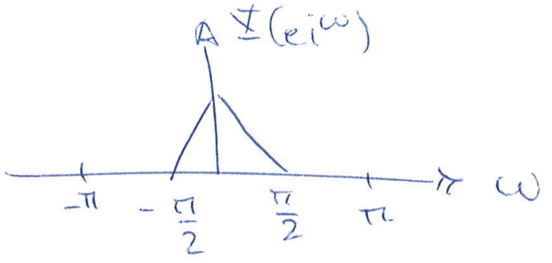


4.26

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n], & n = Mk \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_d[n] = x_s[Mn] = x[Mn]$$

a) $M = 3, \ \omega_H = \pi/2$

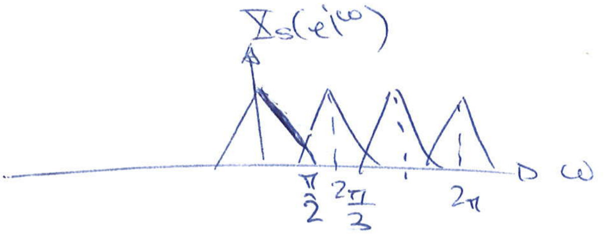


$x_d[n]$ es un diezmado de $x[n]$

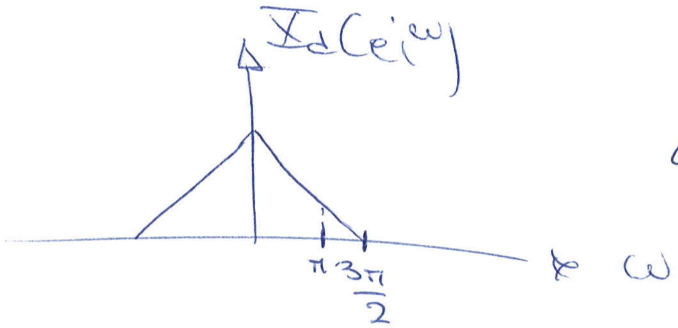
$x_s[n]$ es un muestreo de $x[n]$

↑

periodo = 3 muestras

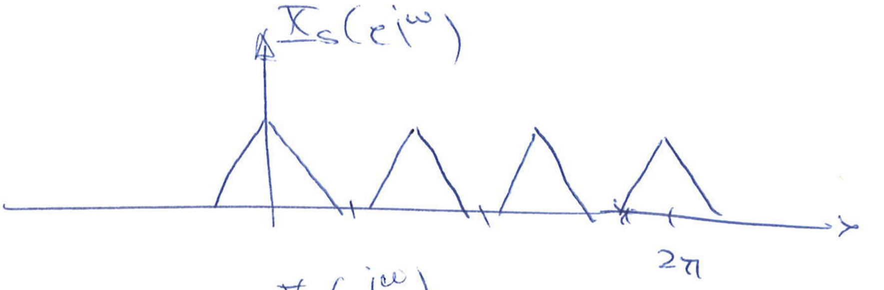


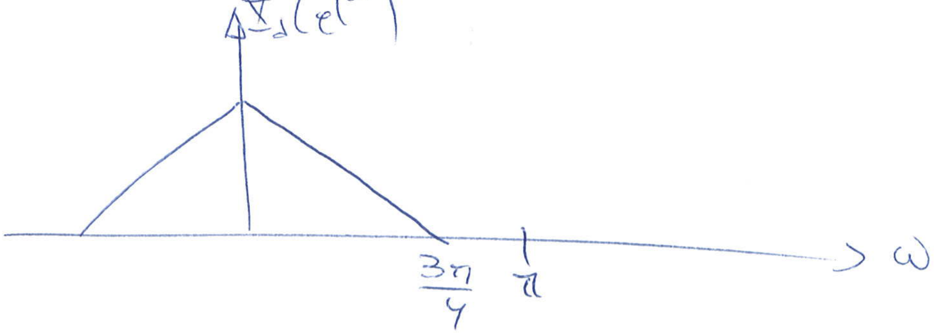
∼ aliasing



∼ aliasing

$M = 3, \ \omega_H = \pi/4$



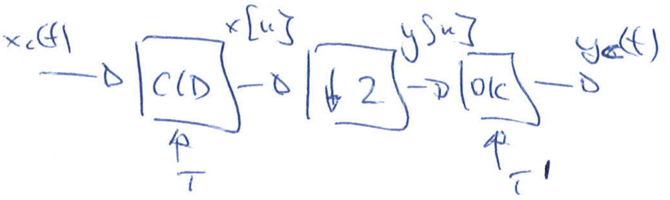


b) evitar aliasing si $M = 3$:

$$\boxed{\omega_{H\max} = \frac{\pi}{3}}$$

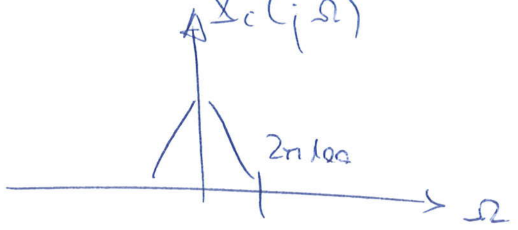
$\boxed{4.36}$ $x[n] = x_c(nT)$

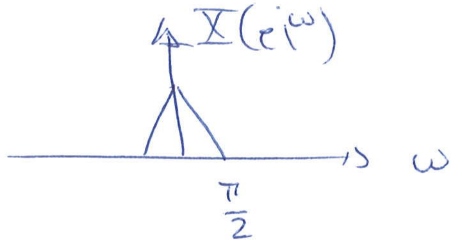
$y[n] = x[2n]$



a) $X_c(j\Omega) = 0 \;, |\Omega| > 2\pi 100$

Valor de T para que $X(e^{j\omega}) = 0 \;, \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi$





Nyquist $\Rightarrow \pi \to 2 \cdot \Omega_s$

$\frac{\pi}{2} \to \Omega_s$

$[\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow \boxed{T \leq \frac{1}{4 f_{max}} = 2{,}5\,ms}$

b) T' para $y_c(t) = x_c(t)$

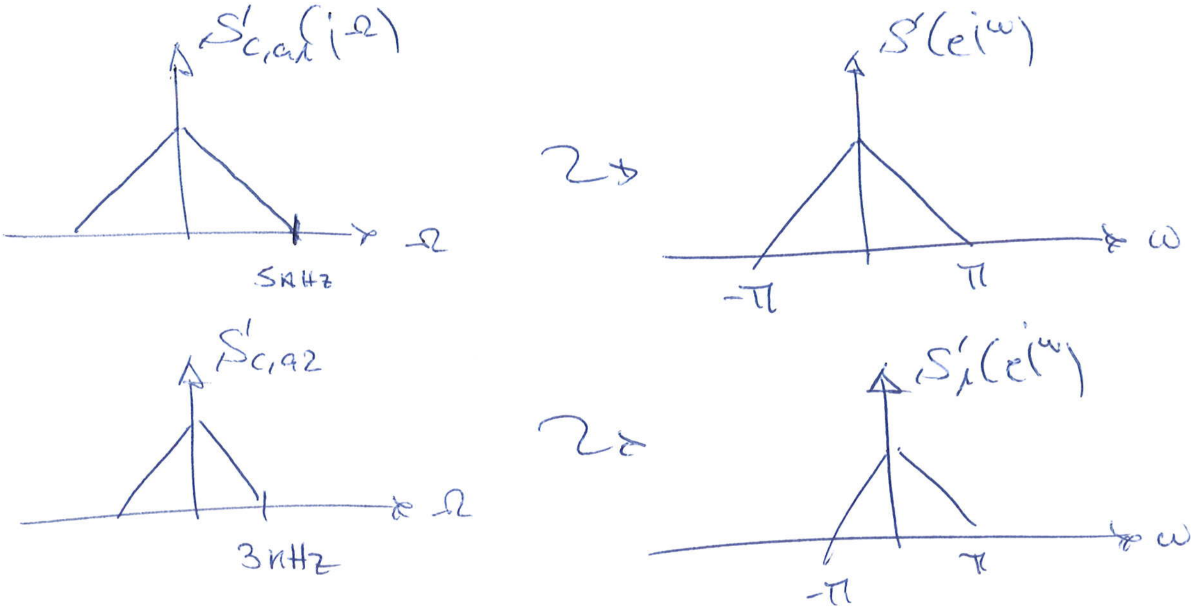
$\to \boxed{\downarrow 2} \to$ ⇒ ensanchado del espectro

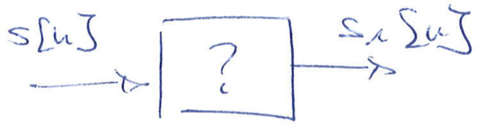
Suponiendo que el diezmado no provoca aliasing, dado que implica $T_2 = M \cdot T_1$, necesito ~~aumentar la velocidad de muestreo~~

necesito volver a estrechar el espectro $\Rightarrow \boxed{T' = 2T} = 5\,ms$

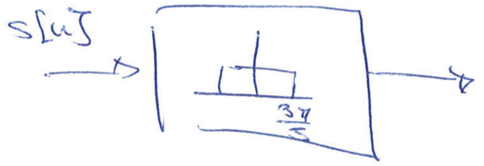
$\boxed{4.37}$

$$\left.\begin{array}{l} f_{aa1} = 5kHz \\ f_{s1} = 10kHz \end{array}\right| ¿\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_{aa2} = 3kHz \\ f_{s2} = 6kHz \end{array}\right.$$



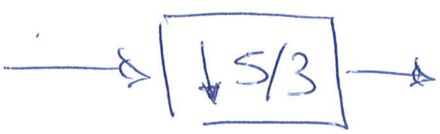


Primero filtro lo que necesito: de 3 a 5 kHz:

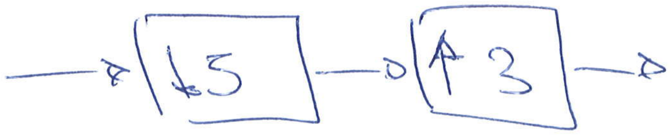


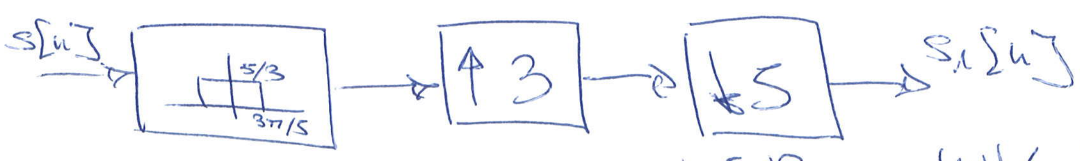
Ahora $\omega = \frac{3\pi}{5}$ hay que moverlo a π:

$\omega' = \pi \Rightarrow$



$\Rightarrow$

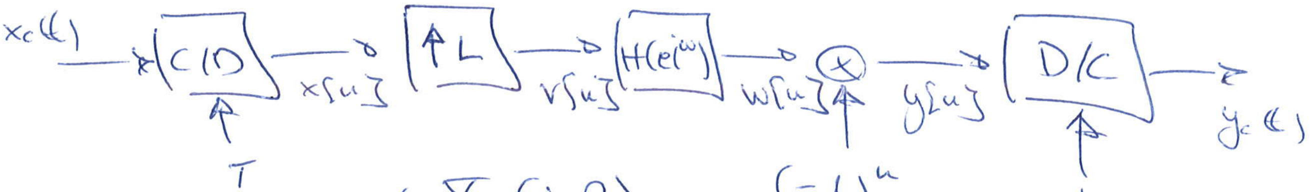


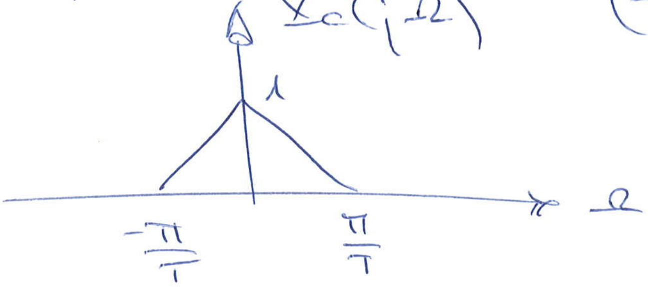


$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 5/3 & |\omega| \leq \frac{3\pi}{5} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$\boxed{4.38}$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

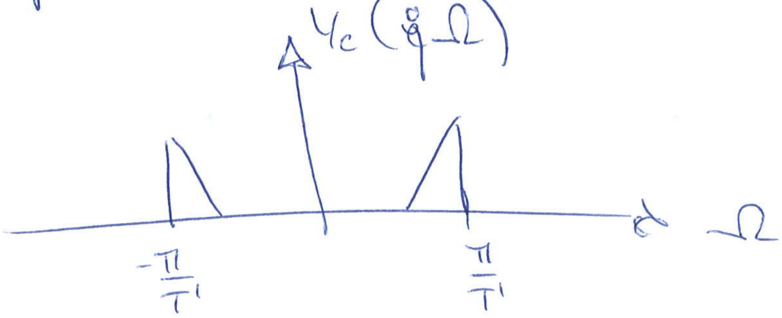




$w[n] = v[n]$ ya que se interpola $x[n]$ y su espectro va de $-\frac{\pi}{L}$ a $\frac{\pi}{L}$

Modulación: $(-1)^n = e^{j\pi n}$

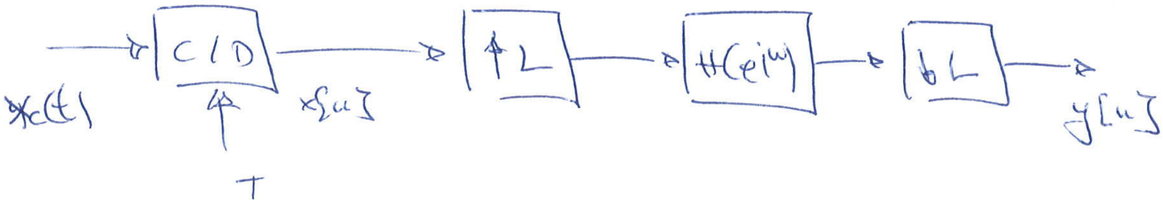
en la frecuencia desplaza π el espectro:



4.40

$X_c(j\Omega) = 0 \;, \; |\Omega| \geq \pi/T$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| < \pi/L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$x[n] = x_c(nT)$ no hay aliasing

$H(e^{j\omega})$ es un simple retardo de las frecuencias entre 0 y π/L, retardo 1 muestra

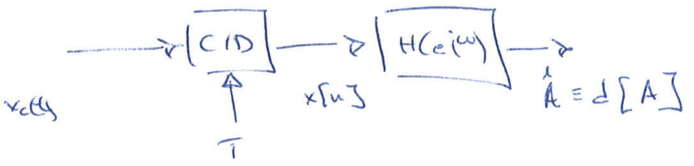
Al diezmar, el retardo se convierte en 1/L muestras:

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{L}\, x[n - 1/L] = \frac{1}{L}\, x_c(T(n - 1/L))}$$

considerando que $\rightarrow\boxed{\uparrow L}\rightarrow$ no amplifica

y que $\rightarrow\boxed{\downarrow L}\rightarrow$ atenúa por L

$\boxed{4.45}$



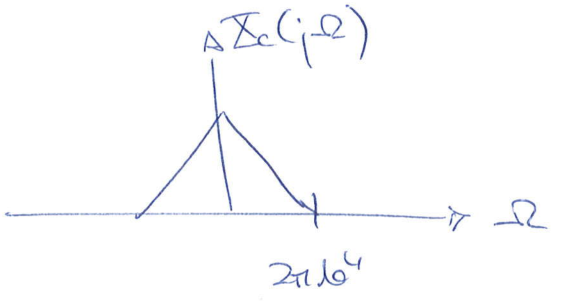
$x_c(t) = 0 \quad t<0, t>10$

$X_c(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq 2\pi 10^4$

Estimar el área de $x_c(t)$:

$$A = \int_0^{10} x_c(t)\,dt$$

Elegir $h[n]$ y $T_{máx}$



Estimación de la integral: sumar valores de la función multiplicados por la longitud del intervalo ⇒

$$\Rightarrow \hat{A} = T \cdot \sum_{n=0}^{N} x[n]$$

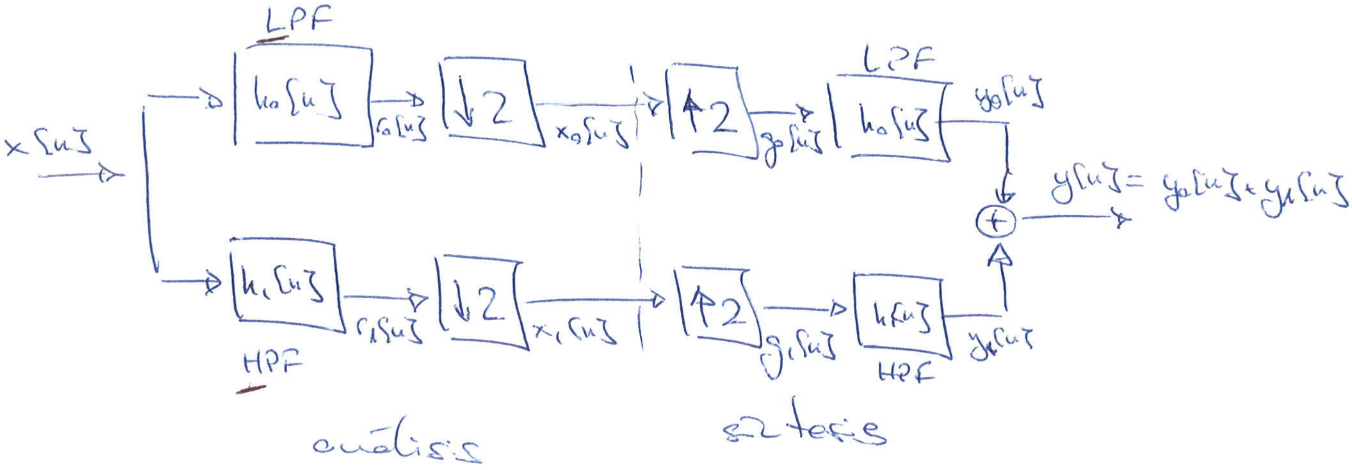
En principio, para poder estimar ese valor, no puede haber aliasing ⇒ $f_s \geq 2 \cdot \Omega_{máx} = 2 \cdot 10^4$ Hz

$$\boxed{T_{máx} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\ s = 50\mu s}$$

$N = \frac{10}{T_{máx}} = 2 \cdot 10^5$ muestras

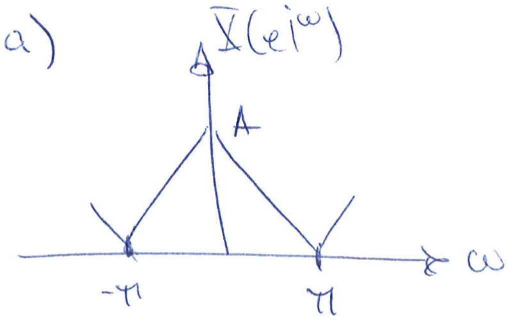
$$\Rightarrow \boxed{h[n] = T \cdot u[n]}$$

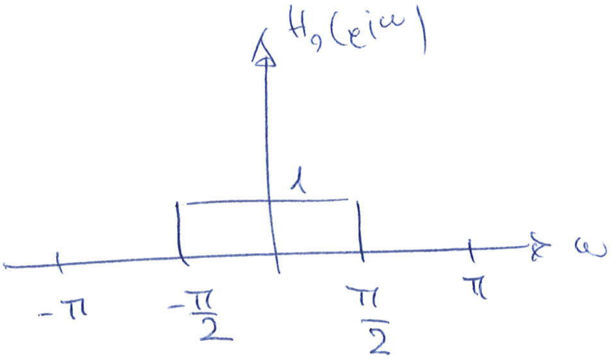
$\boxed{4.53}$ Sistema de análisis-síntesis

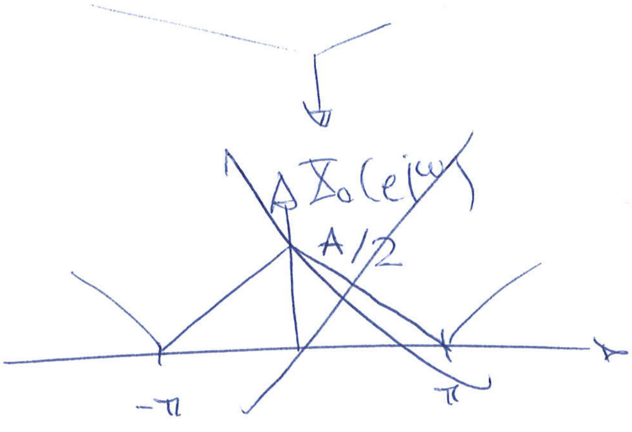


$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)})$$

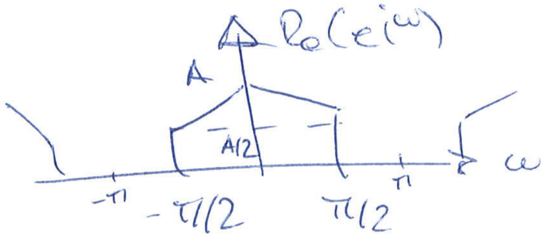
a)



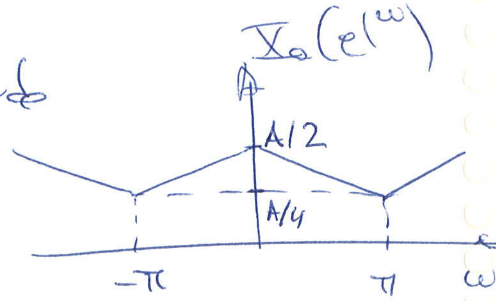




1º filtro ⇒

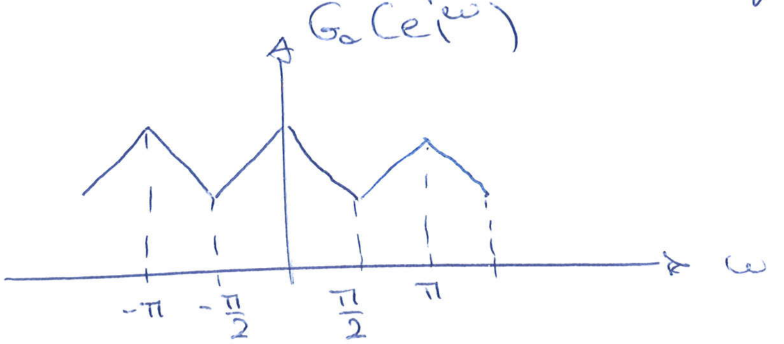


diezmado ⇒

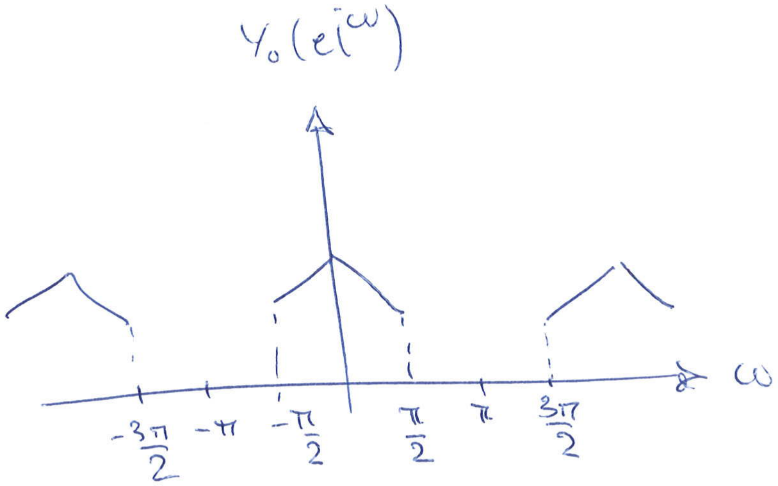


Se puede considerar que el diezmado no afecta

Despues del expansor, el espectro aparece por duplicado, sin atenuación/amplificación:



$Y_0(e^{j\omega}) \Rightarrow$ vuelve a filtrar en $\pi/2$:



b) $G_0(e^{j\omega}) = X_0(e^{j2\omega})$

$X_0(e^{j\omega}) = R_0(\cancel{e^{j\omega/2}}) = \left(R_0(e^{j\omega/2}) + R_0(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right)\frac{1}{2}$

$R_0(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H_0(e^{j\omega})$

$\Rightarrow X_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega/2}) H_0(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}) H_0(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right)$

$$\Rightarrow \boxed{G_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega}) H_0(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega-\pi)}) H_0(e^{j(\omega-\pi)})\right)}$$

c) Condiciones de $H_0(e^{j\omega})$ para que

$$y[n] = A\cdot x[n-n_d]$$

- Queremos un retardo constante.

- Filtro paso bajo y paso alto

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = A\cdot X(e^{j\omega})\, e^{-j\omega\cdot n_d}$$

$$Y_0(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega})\, H_0(e^{j\omega})$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = G_1(e^{j\omega})\, H_1(e^{j\omega})$$

$$G_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j2\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(R_1(e^{j\omega/2}) - R_1(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right)$$

$$R_1(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H_1(e^{j\omega})$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega}) H_1(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega-\pi)})\, H_1(e^{j(\omega-\pi)})\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = Y_0(e^{j\omega}) + Y_1(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{1}{2} X(e^{j\omega})\left(H_0(e^{j\omega})(H_0(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\pi)})\left(H_0(e^{j\omega})\right.$$

$$Y(e^{i\omega}) = H_0(e^{i\omega})\,G_0(e^{i\omega}) + H_1(e^{i\omega})\,G_1(e^{i\omega})$$

$$= \frac{1}{2}\left(X(e^{i\omega})\,H_0^2(e^{i\omega}) + X(e^{i(\omega-\pi)})\,H_0(e^{i(\omega-\pi)})\,H_0(e^{i\omega})\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(X(e^{i\omega})\,\underbrace{H_1^2(e^{i\omega})}_{H_0^2(e^{i(\omega+\pi)})} + X(e^{i(\omega-\pi)})\,\underbrace{H_1(e^{i(\omega-\pi)})}_{H_0(e^{i\omega})}\,\underbrace{H_1(e^{i\omega})}_{H_0(e^{i(\omega+\pi)})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{i\omega})\left(H_0^2(e^{i\omega}) + H_0^2(e^{i(\omega+\pi)})\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}X(e^{i(\omega-\pi)})\left(H_0(e^{i(\omega-\pi)})\,H_0(e^{i\omega}) + H_0(e^{i(\omega+\pi)})\,H_0(e^{i\omega})\right)$$

$$H_0(e^{i(\omega-\pi)}) = H_0(e^{i(\omega+\pi)})$$

$$\Rightarrow \quad Y(e^{i\omega}) = A\cdot X(e^{i\omega})\,e^{-i\omega n_d}$$

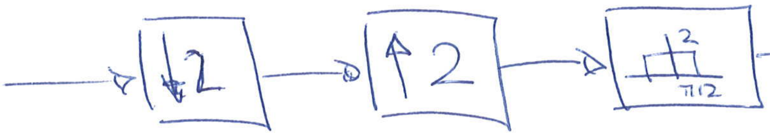
$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_0^2(e^{i\omega}) + H_0^2(e^{i(\omega+\pi)}) = A\cdot e^{-i\omega n_d} \\ H_0(e^{i\omega})\,H_0(e^{i(\omega-\pi)}) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{4.54}$ $X(e^{j\omega}) = 0 \qquad \frac{\pi}{3} \le |\omega| \le \pi$

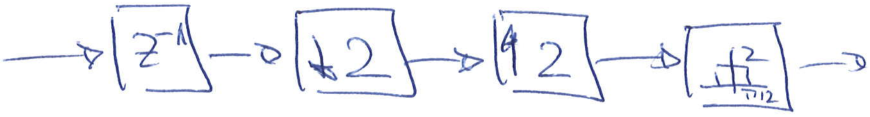
Un valor de x[n] puede estar corrupto:

$$\hat{x}[n] = x[n] \quad , \quad n \neq n_0$$

a) n_0 conocido → lo quitamos de en medio. ¿Cómo?:



$\underline{n_0 \text{ par}}$ ⇒ quitamos las muestras pares e interpolamos



$\underline{n_0 \text{ impar}}$ ⇒ quitamos muestras impares

b) n_0 par → ver a)

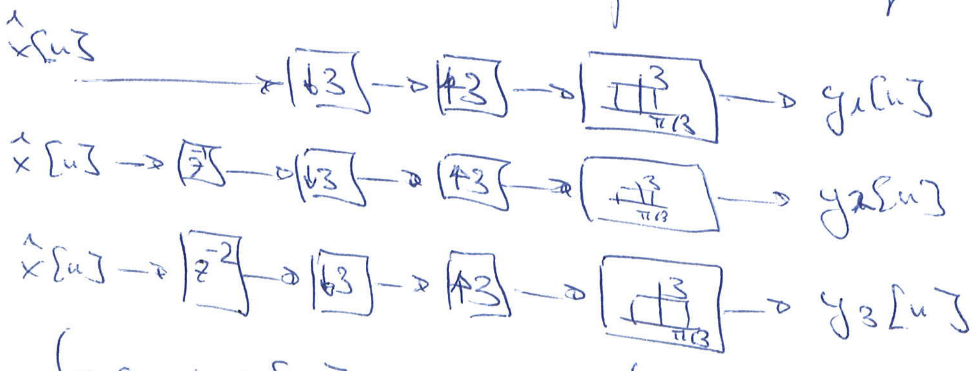
c) No se sabe nada sobre n_0. 2 opciones:

① determinar si n_0 es par o impar:

$$\hat{x}[n] = x[n] + \underbrace{A\cdot\delta[n-n_0]} \; ; \quad X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} \in \overset{\text{par}}{\mathbb{R}}, \underset{\text{impar}}{\mathbb{C}}?$$

$$e^{-j\omega n_0} = \begin{cases} \text{real si } n_0 \text{ par} \\ \text{imaginario si } n_0 \text{ impar} \end{cases}$$

②



Dos de las $y_i[n]$ son iguales a x[n], mientras que la otra no → se quita $\hat{x}[n_0]$

PROBLEMAS TEMA 2

Oppenheim_Schafer 2ª ed   pp 312_339 ; 511_540

5.15✓, 5.33 , 5.42, 5.44 , 5.57 , 7.5✓, 7.32✓,
7.34✓, 7.35✓, 7.49✓, 7.59✓

$\boxed{5.15}$

$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $|H(e^{j\omega})| \geq 0 \quad \forall\omega$

fase lineal

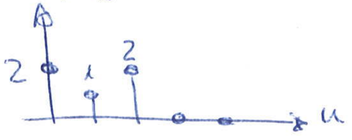
$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j\alpha\omega + j\beta}$

$A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

fase lineal generalizada

a)



$h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$

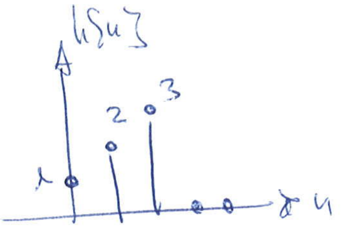
$H(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\big(\underbrace{2e^{+j\omega} + 2e^{-j\omega}}_{4\cos\omega}\big) + e^{-j\omega}$$

$$= e^{-j\omega}(4\cos\omega + 1) = A(\omega)e^{-j\omega} \quad / \ A(\omega) \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ fase lineal generalizada $\boxed{\begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \beta = 0\end{array}}$

b)



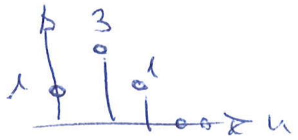
$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + 3e^{-j\omega}\right) + 2e^{-j\omega}$$

No se puede poner de ninguna de las 2 formas ⇒ no es FLG

c)



$$h[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

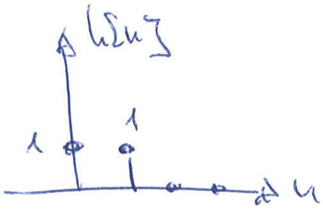
$$= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + 3e^{-j\omega}$$

$$= e^{-j\omega}\underbrace{\left(2\cos\omega + 3\right)}_{>0 \text{ siempre}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A(e^{j\omega}) = 2\cos\omega + 3 \\ &\alpha = 1 \\ &\beta = 0 \end{aligned}}$$

⇒ fase lineal

d)



$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

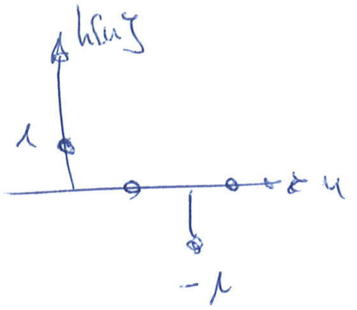
$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)$$

$$= e^{-j\omega/2} \cdot \underbrace{2\cos\frac{\omega}{2}}_{\in \mathbb{R}}$$

FLG

$$\boxed{\begin{aligned} &A(e^{j\omega}) = 2\cos\frac{\omega}{2} \\ &\alpha = 1/2 \\ &\beta = 0 \end{aligned}}$$

e)



$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$

$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega}$

$= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)$

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$= e^{-j\omega} \cdot 2(-j)\,\text{sen}\,\omega$

$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega+\pi/2)} \cdot 2\,\text{sen}\,\omega}$

FLG $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A(e^{j\omega}) = 2\,\text{sen}\,\omega \\ \alpha = 1 \\ \beta = \pi/2 \end{array}}$

$\boxed{5.33}$ $x[n] = s[n] - e^{-8\alpha} s[n-8]$ $\quad \alpha > 0$

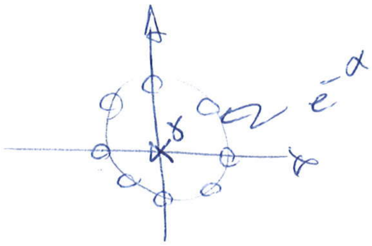
a) $H_1(z) = \dfrac{X(z)}{S(z)}$ $\quad X(z) = S(z) - e^{-8\alpha} S(z) \cdot z^{-8}$

$= S(z)\left(1 - e^{-8\alpha} z^{-8}\right)$

$\boxed{H_1(z) = \dfrac{1}{1 - e^{-8\alpha} z^{-8}}}$ $\quad$ polos: $1 - e^{-8\alpha} z^{-8} = 0$

$\Rightarrow \boxed{z_p = \sqrt[8]{e^{-8\alpha}} = \pm e^{-\alpha}}$

$\alpha > 0 \Rightarrow |z_p| < 1$ $\Rightarrow$ ROCs $\begin{cases} |z| < e^{-\alpha} \\ |z| > e^{-\alpha} \end{cases}$



No le des la vuelta por la cara:

$$\boxed{H_1(z) = 1 - e^{-8\alpha} z^{-8}}$$

polos en el origen

ceros: $z = e^{-\alpha}$

b) Recuperar s[n] a partir de x[n]:

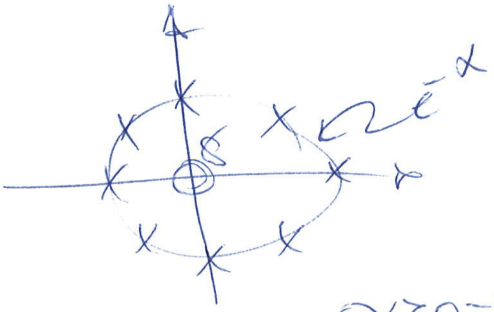
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad / \quad y[n] = s[n]$$

El sistema inverso:

$$\boxed{H_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha} z^{-8}}}$$

polos en $z = e^{-\alpha}$

ceros en el origen



ROCs $\begin{cases} |z| > e^{-\alpha} \text{ estable} \\ |z| < e^{-\alpha} \end{cases}$

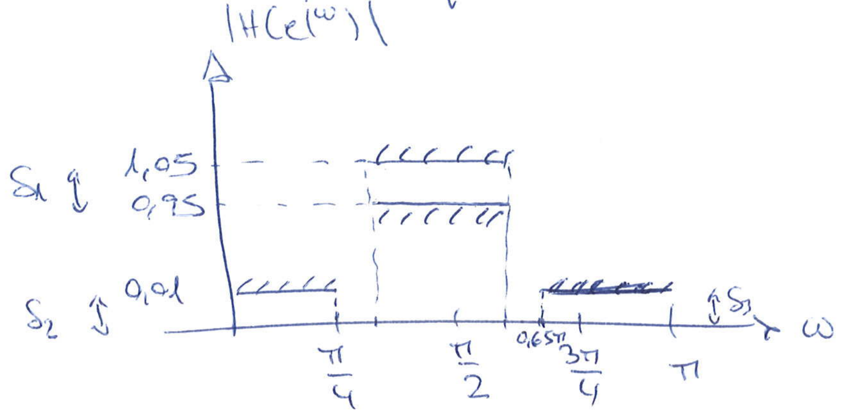
$\alpha > 0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1$

c) $y[n] = h_2[n] * x[n] = \delta[n]$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha} z^{-8}}$$

$\boxed{7.5}$ Ventana de Kaiser → FLG :

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| \leq 0{,}01 \, , & 0 \leq |\omega| \leq 0{,}25\pi \\ 0{,}95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1{,}05 \, , & 0{,}35\pi \leq |\omega| \leq 0{,}6\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0{,}01 \, , & 0{,}65\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



Rizados: $\delta_1 = 0{,}05$
$\delta_2 = 0{,}01$
$\delta_3 = 0{,}01$

$\delta_{min} = 0{,}01 \rightarrow A = -20\log\delta_{min} = 40 \text{ dB}$

$\Rightarrow \beta = 0{,}5842(A-21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A-21) =$
$= 3{,}395$

$$\Rightarrow M = \frac{A-8}{2{,}285\underbrace{(\omega_s-\omega_p)}}$$

calculamos la zona de transición más estrecha:

$ZT_1 = 0{,}35\pi - 0{,}25\pi = 0{,}1\pi$

$ZT_2 = 0{,}65\pi - 0{,}6\pi = 0{,}05\pi \Big\rangle \; ZT_{min} = 0{,}05\pi$

$$\Rightarrow M = \frac{40-8}{2{,}285 \cdot 0{,}05\pi} = 89{,}15$$

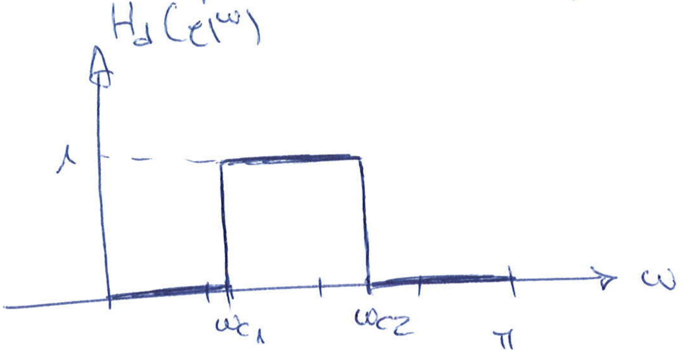
$$\Rightarrow \boxed{M = 90}$$

b) Retardo del filtro:

Ventana de 91 muestras, retardo $\alpha = \frac{M}{2}$:

$$\boxed{\alpha = 45 \text{ muestras}}$$

c) $h_d[n]$: ideal a la que aplicar la ventana



Frecuencias de corte centradas:

$$\omega_{c1} = \frac{0{,}25 + 0{,}35}{2}\pi = 0{,}3\pi$$

$$\omega_{c2} = \frac{0{,}6 + 0{,}65}{2}\pi = 0{,}625\pi$$

$$\boxed{h_d[n] = h_{pb}^{\omega_{c2}} - h_{pb}^{\omega_{c1}} = \frac{\text{sen}\, 0{,}625\pi(n-45)}{\pi(n-45)} - \frac{\text{sen}\, 0{,}3\pi(n-45)}{\pi(n-45)}}$$

$\boxed{7.32}$ $h_d[n] \longleftrightarrow H_d(e^{j\omega})$ respuesta ideal

$h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ aproximación FIR

$h[n] = 0 \quad n \notin [0, M]$ (M+1 muestras)

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

a) Parseval $\Rightarrow$ $\varepsilon^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2$ ← causal

$$\boxed{\varepsilon^2 = \sum_{n \notin [0,M]} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=0}^{M} |h_d[n] - h[n]|^2}$$

b) $\sum_{n \notin [0,M]} |h_d[n]|^2$ es fijo $\Rightarrow$ tocar 2° término

$\Rightarrow$ minimizarlo $\Rightarrow$ $\boxed{h_d[n] = h[n],\ n \in [0,M]}$

c) $h[n] = w[n]\, h_d[n]$

$$\Rightarrow w[n] = \begin{cases} 1 & n \in [0,M] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

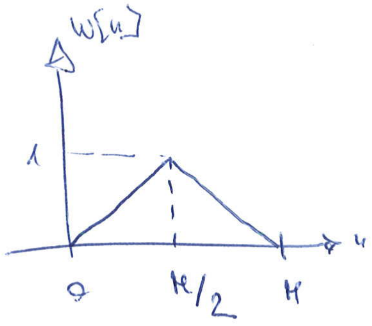
ventana rectangular

$\boxed{7.34}$ a) Ventana triangular ⟹ convolución de 2 rectangulares
(M+1 puntos)

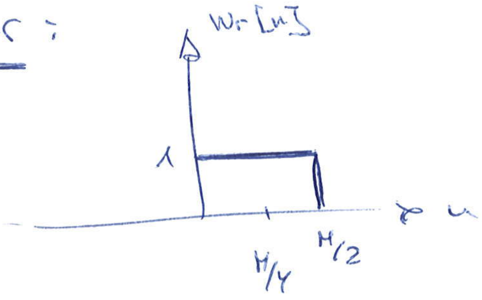
$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \quad \frac{2}{M}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\omega M}{4}\right)}{\text{sen}\,\frac{\omega}{2}}\right)^2 \qquad M \text{ par}$$

$$= e^{-j\frac{M}{2}} \quad \frac{2}{M} \quad \frac{\text{sen}\,\omega\frac{(M+1)}{4}}{\text{sen}\,\frac{\omega}{2}} \quad \frac{\text{sen}\,\omega\frac{M-1}{4}}{\text{sen}\,\frac{\omega}{2}} \qquad M \text{ impar}$$

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M} & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M} & \frac{M}{2} < n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



M par :



rectangular de M/2 puntos

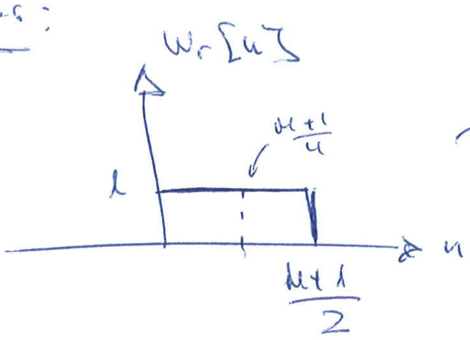
$$W_r(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen}\,\omega M/4}{\text{sen}\,\omega/2}\, e^{-j\omega M/4}$$

Convolución ⟹ $W_B(e^{j\omega}) = W_r(e^{j\omega}) \cdot W_r(e^{j\omega}) =$

$$= \left(\frac{\text{sen}\,\omega M/4}{\text{sen}\,\omega/2}\right)^2 \underbrace{e^{-j\omega M/4}\, e^{-j\omega M/4}}_{e^{-j\omega M/2}}$$

$\frac{2}{M}$ es un simple escalado

M impar:



$$\longleftrightarrow W_r(e^{j\omega}) = \frac{\operatorname{sen} \omega \frac{M+1}{4}}{\operatorname{sen} \omega/2} e^{-j\omega \frac{M+1}{4}}$$

$$\downarrow$$

$$W_{r2}(e^{j\omega}) = \frac{\operatorname{sen} \omega \frac{M-1}{2}}{\operatorname{sen} \omega/2} e^{-j\omega \frac{M-1}{4}}$$

$$W_B(e^{j\omega}) = w_r(e^{j\omega})\, w_{r2}(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \omega \frac{M+1}{4}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega \frac{M-1}{4}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega M/2}$$

b) Coseno alzado:

$$w[n] = \left(A + B\cos(2\pi n/M) + C \cos 4\pi n/M\right) \underset{\substack{\uparrow \\ M+1 \text{ puntos}}}{w_r[n]}$$

$$\cos 2\pi n/M \longleftrightarrow \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)$$

$$\boxed{W(e^{j\omega}) = \left(A\delta(\omega) + B\pi\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)\right) + C\pi\left(\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega + \frac{4\pi}{M}\right)\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv. periódica}}}{\circledast} W_r(e^{j\omega})}$$

c) Hanning: $w[n] = 0{,}5 - 0{,}5\cos\frac{2\pi n}{M}$

$$\Rightarrow \boxed{W(e^{j\omega}) = \left(0{,}5\delta(\omega) + 0{,}5\pi\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)\right)\right) \circledast W_R(e^{j\omega})}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}W_R(e^{j\omega}) + \frac{\pi}{2}\left(W_R\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)}\right) + W_R\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)}\right)\right)}$$

7.35

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & 0 \le |\omega| < 0{,}3\pi \\ 0 & 0{,}3\pi < |\omega| < 0{,}6\pi \\ \frac{1}{2}e^{-j\omega M/2} & 0{,}6\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Kaiser $\begin{cases} M = 48 \\ \beta = 3{,}68 \end{cases}$

a) Retardo del filtro: $M/2 = 24$ muestras

b) $\boxed{h_d[n] = \frac{1}{2}h_{pb}^{\pi}[n] - \frac{1}{2}h_{pb}^{0,6\pi}[n] + h_{pb}^{0,3\pi}[n] =}$

$$\boxed{= 1/2 - \frac{1\,\text{sen}\,0{,}6\pi(n-24)}{2\;\pi(n-24)} + \frac{\text{sen}\,0{,}3\pi(n-24)}{\pi(n-24)}}$$

c) Especificaciones de error :

$$B-\delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq B+\delta_1 \qquad 0 \leq |\omega| \leq \omega_{p1}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2 \qquad \omega_{s1} \leq |\omega| \leq \omega_{s2}$$

$$C-\delta_3 \leq |H(e^{j\omega})| \leq C+\delta_3 \qquad \omega_{p2} \leq |\omega| \leq \pi$$

$\beta = 3,68$

$M = 48$

$$M = \frac{A-8}{2,285(\omega_s-\omega_p)}$$

$A > 50 \Rightarrow \beta = 0,1102(A-8,7) \Rightarrow A = 42,1 < 50$

$$\Rightarrow \beta = 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21)$$

Recursión : $A_0 = 42,1 \rightarrow A_1 = 43,12 \rightarrow A_2 = 40,975 \rightarrow A_3 = 45,64 \rightarrow A_4 = 36,25 \rightarrow A_5 = 58,04$

$$(A_{i+1}-21)^{0,4} = \frac{\beta-0,07886(A_i-21)}{0,5842}$$

Mucho baile de números...

$$A_{i+1}-21 = \frac{\beta-0,5842(A_i-21)^{0,4}}{0,07886} \Rightarrow A_1 = 42,58$$

$\downarrow$

$A_2 = 42,33$ $(\beta = 3,671)$ $\leftarrow$

$A_3 = 42,46$ $(\beta = 3,68)$

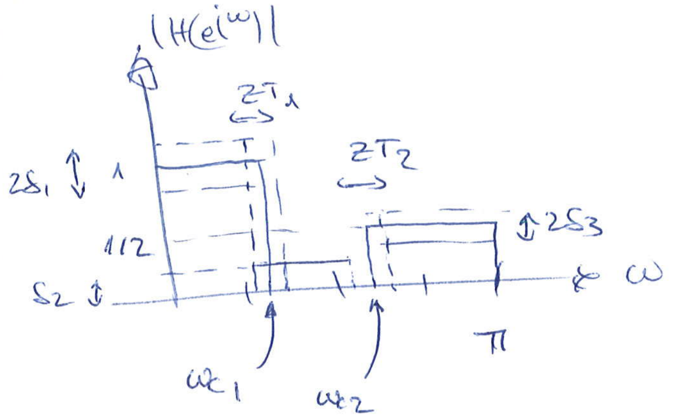
$$\boxed{A = 42,46}$$

$$\delta_{min} = 10^{-A/20} = 7{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}0075$$

$$Amp = 1 \Rightarrow \boxed{\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0075} \quad \boxed{B = 1}$$

$$Amp = 1/2 \Rightarrow \boxed{\delta_3 = \frac{\delta_1}{2} = 0{,}00375} \quad \boxed{C = 1/2}$$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{A - 8}{2{,}285\, M} = 0{,}1\pi = 2T_{min}$$



$$\omega_{c1} = \frac{\omega_{p1} + \omega_{s1}}{2}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\omega_{s2} + \omega_{p2}}{2}$$

$$\omega_{p1} = 2\omega_{c1} - \omega_{s1} \;;\; \omega_{s1} = \omega_{p1} + 2T$$

$$\boxed{\omega_{p1} = \frac{2\omega_{c1} - 2T}{2} = 0{,}25\pi}$$

$\omega_{c1} = 0{,}3\pi$

$$\boxed{\omega_{s1} = 0{,}35\pi} \quad \boxed{\omega_{s2} = \frac{2\omega_{c2} + 2T}{2} = 0{,}65\pi}$$

$$\boxed{\omega_{p2} = \omega_{s2} - 2T = 0{,}55\pi}$$

$\boxed{7.49}$ $X_c(j\Omega) = 0 \quad , \ |\Omega| \geq \pi/T$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

D/A ⇒ filtro de retención de orden cero

$$Y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, h_0(t-nT) \qquad h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$H(e^{j\omega})$ = FIR fase lineal

↳ Se quiere diseñar con el algoritmo de Parks-McClellan

a) $Y_c(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)\, X_c(j\Omega)$

$H_{eff}(j\Omega)$ en función de $H(e^{j\Omega T})$ y T

no hay aliasing en el muestreo →

$$H_{eff}(j\Omega) \to H(e^{j\omega}) + D/A + H_r(j\Omega) + A\cancel{D}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$H(e^{j\Omega T}) \qquad \frac{T \,\text{sen}\, \Omega T/2}{\Omega T/2} = \frac{\text{sen}\, \Omega T/2}{\Omega/2} \qquad 1$$

$$\boxed{H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} 0 & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \\ H(e^{j\Omega T}) \dfrac{\text{sen}\, \Omega T/2}{\Omega/2} & |\Omega| < \pi/T \end{cases}}$$

b) FIR → $h[n]$ $n < 0$, $n > 51$

$T = 10^{-4}$ s

¿Retardo en ms entre $x_c(t)$ e $y_c(t)$?

51 muestras → $M_{máx} = 5\cancel{1}$
(retardo)

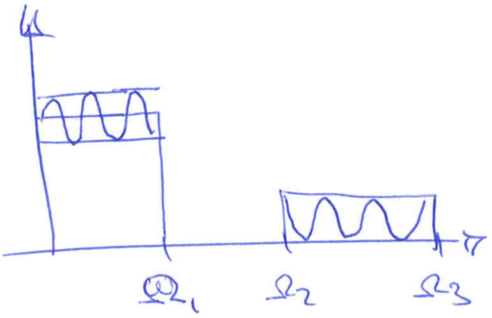
$\alpha = \cancel{\mathbb{Z}} + 1/2 \Rightarrow \boxed{\tau_d = \frac{M+1}{2} \cdot T = 2{,}6 \text{ ms}}$

c) $T = 10^{-4}$ s , rizado uniforme en:

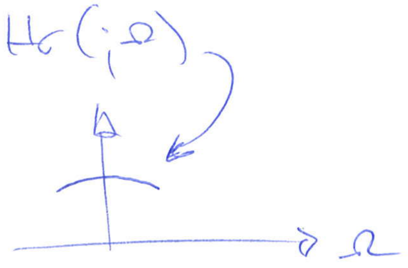
$f_s = 10$ KHz

$0{,}99 \leq |H_{eff}(j\Omega)| \leq 1{,}01$ $|\Omega| \leq 2\pi\, 1000$

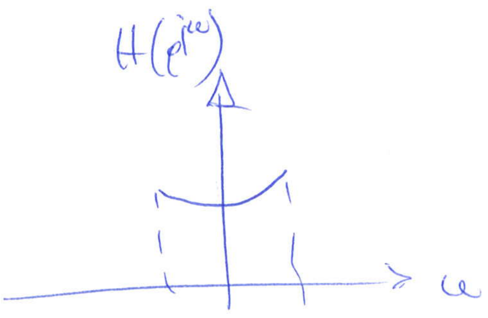
$|H_{eff}(j\Omega)| \leq 0{,}01$ $2\pi \cdot 2000 \leq |\Omega| \leq 2\pi 5000$



Queremos compensar el filtro de retención de orden cero



⇒



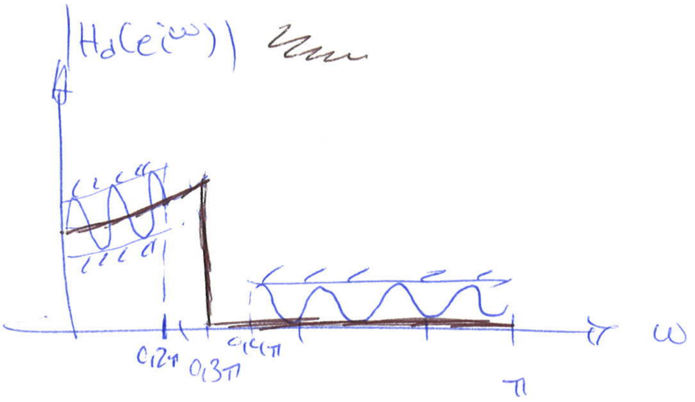
$\omega_{p1} = \frac{10^3}{F_s/2} = 0{,}2\pi$

$\omega_{s1} = \frac{2 \cdot 10^3}{f_s/2} = 0{,}4\pi$

$\omega_c = \frac{\omega_{p1} + \omega_{s1}}{2} = 0{,}3\pi$

es decir, $\boxed{H_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{H_r(e^{j\omega})} = \frac{\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2}}$ $0 \leq |\omega| \leq 0{,}3\pi$

0 en el resto



$$E(\omega) = W(\omega)\,|H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|$$

Minimizar el pico ascendente $\Rightarrow$

$$W(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \omega/2}{\omega/2} & 0 \le |\omega| \le 0{,}2\pi \\ 0 & 0{,}2\pi \le |\omega| \le 0{,}4\pi \\ \lambda & 0{,}4\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

d) $H_r(j\Omega) = 0 \quad \Omega \geq 2\pi(5000)$

↳ banda de paso con pendiente

$\Rightarrow$ inverso $\rightsquigarrow$ $H'_d(e^{j\omega}) = \dfrac{H_d(e^{j\omega})}{|H_r(j\omega/T)|}$

$$W'(\omega) = \frac{W(\omega)}{|H_r(j\omega/T)|}$$

$\boxed{7.50}$ a) No aliasing ⇒ $M_{máx}$?

$\omega_s \cdot M$ → no debe superar $\omega = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{M_{máx} = \frac{\pi}{\omega_s}}$$

b) $M = 100$

$\omega_s = \frac{\pi}{100}$

$\omega_p = \frac{0,9\pi}{100}$

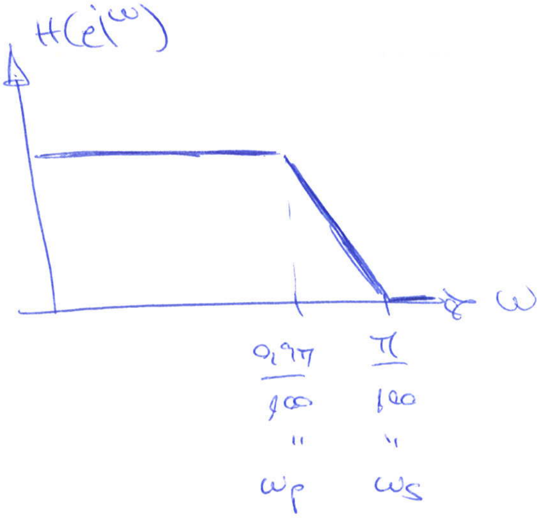
elegir ω_{s1} ó $\omega_{s1} - \omega_{p1}$ si:

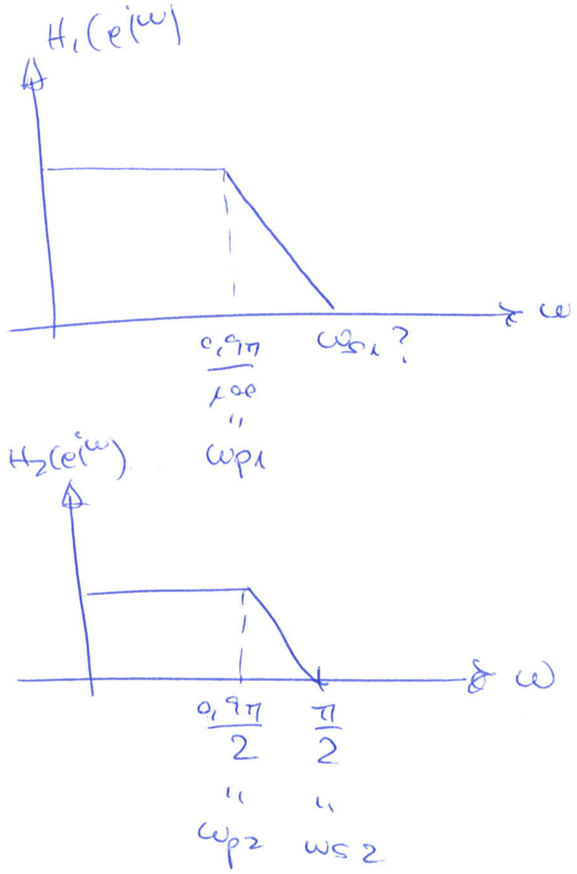
$M_1 = 50$, $M_2 = 2$

$\omega_{p1} = \frac{0,9\pi}{100}$, $\omega_{p2} = \frac{0,9\pi}{2}$

$\omega_{s2} = \frac{\pi}{2}$

para que 2 etapas ≡ 1 etapa

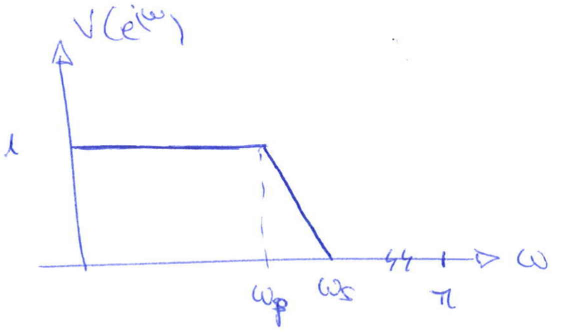


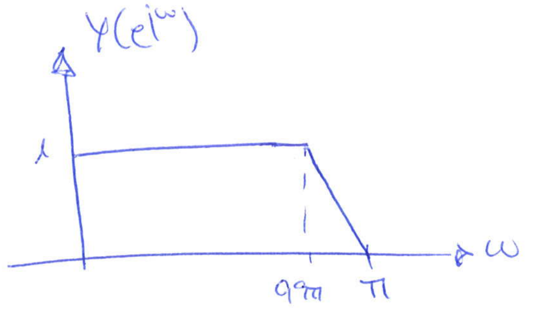


Primero : $x[n] = \delta[n] \rightarrow V(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$

$$\uparrow$$

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

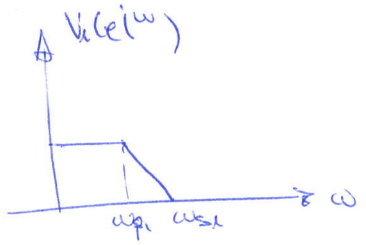




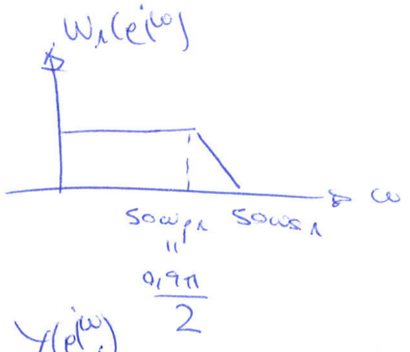
Ahora busco ω_{s1} para cumplirlo

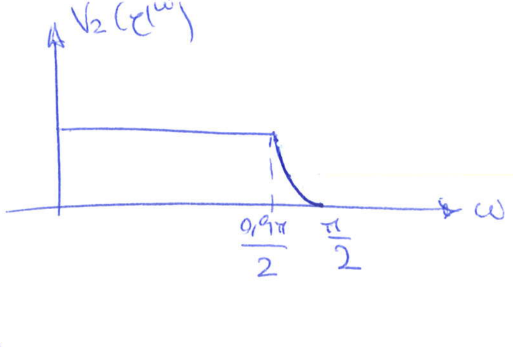
c) ω_{s1} arbitraria $\rightarrow V_1(e^{j\omega}), W_1(e^{j\omega}), V_2(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$

$x[n] = \delta[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = 1$

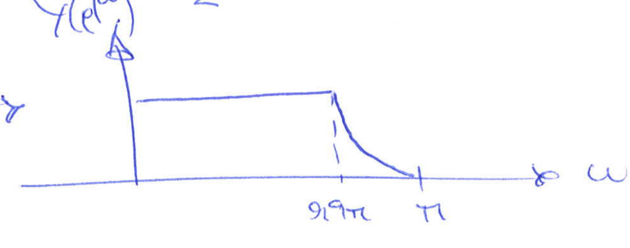


$\rightarrow$



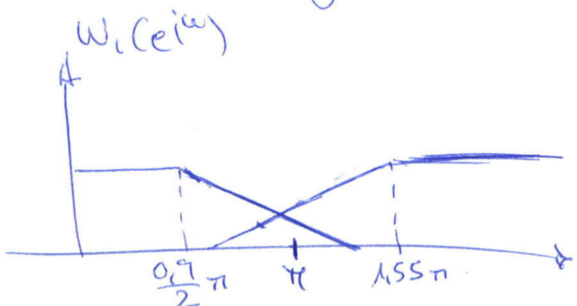


$\rightarrow$



d) Máximo valor de ω_{s1}

Permitiendo aliasing en la banda de transición:
(tras el 1er filtrado+diezmado)



máximo aliasing de:

$\pi - 0,45\pi = 0,55\pi$

máx $\omega_{s1} \Rightarrow 50\omega_{s1} \leq 1,55\pi$

$$\boxed{\omega_{s1\,máx} = \frac{1,55}{50}\pi = 0,031\pi}$$

$$N \simeq \frac{-10\log_{10}\delta_s\delta_p - 13}{2,324\,\Delta\omega} + 1$$

e) $\delta_p = 0,01$

$\delta_s = 0,001$ en el de 1 etapa

$N \simeq 5069$ muestras

¿Número de multiplicaciones?

Aprovechando que $h[n]$ es simétrica, se puede usar la estructura plegada, y se hacen menos productos:

$$\boxed{\text{productos} = \frac{N+1}{2} = 2535}$$ (N impar) (por cada muestra de salida)

f) $\omega_{s1} = 0,031\pi \rightarrow$ ¿N_1, N_2?

$$\boxed{N_1 \simeq \frac{-10\log_{10}\delta_{s1}\delta_{p1} - 13}{2,324\,\Delta\omega_1} + 1 = 232}$$

$\Delta\omega_1 = \omega_{s1} - \omega_{p1} = 0,022\cdot\pi$

$\Delta\omega_2 = \omega_{s2} - \omega_{p2} = \frac{1}{20}\pi = 0,05\pi \rightarrow \boxed{N_2 \simeq 103}$

Total: $\frac{N_1}{2} + \frac{N_2+1}{2} = 168$ productos/muestra

g) $\delta_{p1} = \delta_{p2} = 0,005$

$\delta_{s1} = \delta_{s2} = 0,001$

¿N_1, N_2? $\Rightarrow$ $\boxed{N_1 \simeq 250}$ $\boxed{N_2 = 111}$

$$\frac{N_1}{2} + \frac{N_2+1}{2} = 181 \text{ productos/muestra}$$

h) No es necesario debido a las atenuaciones

De hecho, podría aumentarse

i) M_1, M_2 que optimicen nº de productos

Agrandar lo más posible las bandas de transición:

$$N \simeq \frac{-10\log_{10}\delta_p\delta_s - 13}{2,324\,\Delta\omega} + 1$$

$M_1 = M_2 = 10 \Rightarrow \omega_{p1} = \frac{0,9\pi}{100}$; $\omega_{s1} = \frac{1,55\pi}{10}$

$\omega_{p2} = \frac{0,9\pi}{10}$

$\omega_{s2} = \frac{\pi}{10}$

$\Delta\omega_2 = 0,01\pi$

$\Delta\omega_1 = 0,148 \Rightarrow N_1 \simeq 36$ $\left(\begin{array}{l}\delta_p = 0,01 \\ \delta_s = 0,001\end{array}\right)$

$N_2 \simeq 508$

NO! $\Rightarrow$ término medio entre N_1 y N_2

Con $M_1 = 25$, $M_2 = 4 \Rightarrow 151$ prod/muestra

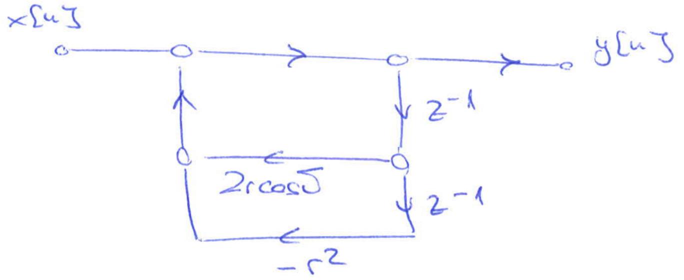
Con $M_1 = 33$, $M_2 = 3 \Rightarrow 145$ prod/muestra ($M_1 M_2 = 99$)

PROBLEMAS TEMA 3

Oppenheim-Schafer 2º ed pp 419_438

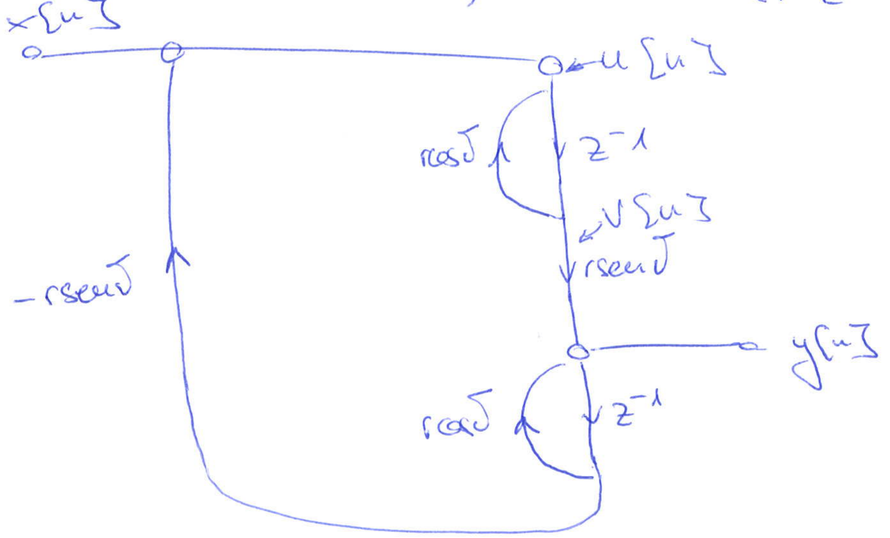
6.1✓, 6.5✓, 6.6✓, 6.21✓, 6.22, 6.23, 6.24, 6.29, 6.38, 6.40, 6.42

6.1



a) $y[n] = x[n] + 2r\cos\theta \cdot [n-1] - r^2 \quad [n-2]$

$\rightarrow H(z) = \dfrac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-1}}$



b) $y[n]$ ~~$+ r\cos\theta\, y[n-1] - r\,\text{sen}\theta\; r\,\text{sen}\theta\; y[n-2]$~~

$u[n] = x[n] + y[n-1](-r\,\text{sen}\theta) \rightarrow U(z) = X(z) + Y(z) z^{-1}(-r\,\text{sen}\theta)$

$v[n] = v[n-1] r\cos\theta + u[n-1] \rightarrow V(z) = r\cos\theta z^{-1} V(z) + U(z) z^{-1}$

$y[n] = r\,\text{sen}\theta\; v[n] + r\cos\theta\, y[n-1]$

$$V(z) = \frac{U(z)\cdot z^{-1}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}} = \frac{\left(X(z) - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, z^{-1}\, Y(z)\right) z^{-1}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}}$$

$$Y(z) = r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, \frac{\left(X(z) - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, z^{-1}\, Y(z)\right) z^{-1}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}}$$

$$+ r\cos\vartheta\, Y(z)\, z^{-1}$$

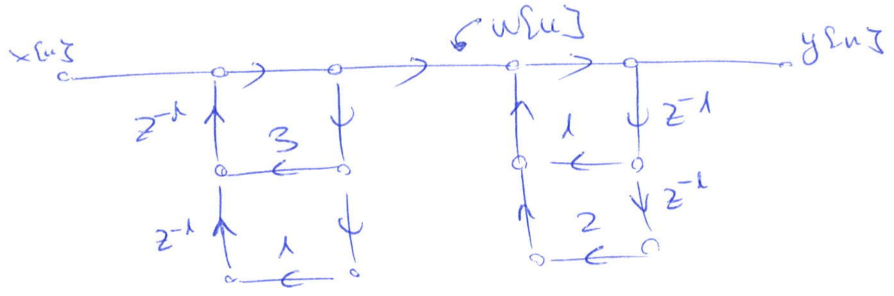
$$Y(z)\underbrace{\left(1 - r\cos\delta\, z^{-1} + \frac{r^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\, z^{-2}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}}\right)} = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, z^{-1}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}}\, X(z)$$

$$\frac{1 - 2r\cos\vartheta\, z^{-1} + \overbrace{\left(r^2\cos^2\vartheta\, z^{-2} + r^2\,\mathrm{sen}^2\delta\, z^{-2}\right)}^{r^2 z^{-2}}}{1 - r\cos\vartheta\, z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, z^{-1}}{1 - 2r\cos\vartheta\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}}$$

Mismo denominador ⇒ mismos polos

$\boxed{6.5}$



~~$y[n] + y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + x[n-2]$~~

a) $w[n] = x[n] + 3w[n-1] + w[n-2]$

$y[n] = w[n] + y[n-1] + 2y[n-2]$

$\rightarrow w[n] = y[n] - y[n-1] - 2y[n-2]$

$y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] + 3(y[n-1] - y[n-2] - 2y[n-3]) +$

$+ y[n-2] - y[n-3] - 2y[n-4]$

$= x[n] + 3y[n-1] - 2y[n-2] - 7y[n-3] - 2y[n-4]$

$$\boxed{y[n] = x[n] + 4y[n-1] - 7y[n-3] - 2y[n-4]}$$

b) $$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}}$$

c) Productes : 2 (×3, ×2) $\Rightarrow$ ×1 no compten

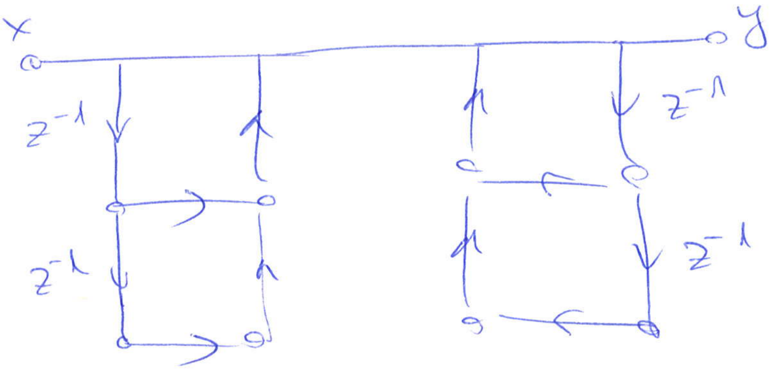
Sumes : 4

d) La realización requiere 4 registros

2ª ¿Se pueden reducir con otra estructura?

Sistema de 4º orden ⇒ son necesarios los 4 registros

Ojo: no es una forma directa I.



esto es FD I

$\boxed{6.6}$ a) $y_a[n] = x[n] - 2x[n-1] + 4x[n-2] + 3x[n-3] - x[n-4] + x[n-5]$

$[n]: x \to \delta$ b) $y_b[n] = y_a[n]$

c) $y_c[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - x[n-2] + x[n-3] +$

$2x[n-7] + 3x[n-6] - x[n-5] + x[n-4]$ } estructura plegada

d) $y_d[n] = x[n] + 2x[n-1] - x[n-2] + 3x[n-3] +$

$+ x[n-6] + 2x[n-5] - x[n-4]$

$\boxed{6.21}$ Generación de una secuencia sinusoidal

$$h[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \begin{cases} h_r[n] = \cos \omega_0 n \; u[n] \\ h_i[n] = \operatorname{sen} \omega_0 n \; u[n] \end{cases}$$

$$h[n] = \cos \omega_0 n \; u[n] + j \operatorname{sen} \omega_0 n \; u[n]$$

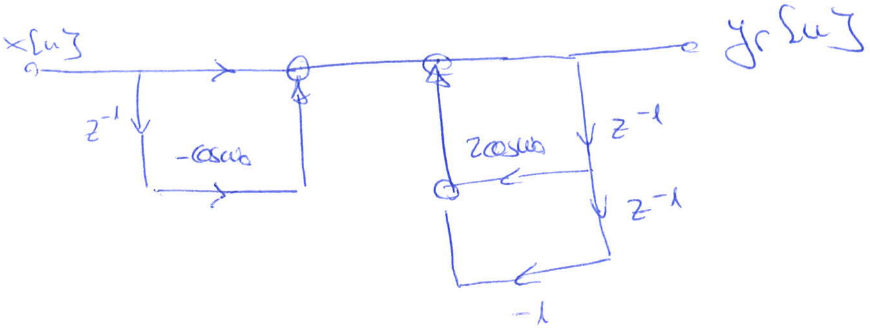
$$= e^{j\omega_0 n} u[n] = a^n \cancel{x[n]} \qquad \cos \omega_0 n \to \frac{1 - \cos \omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

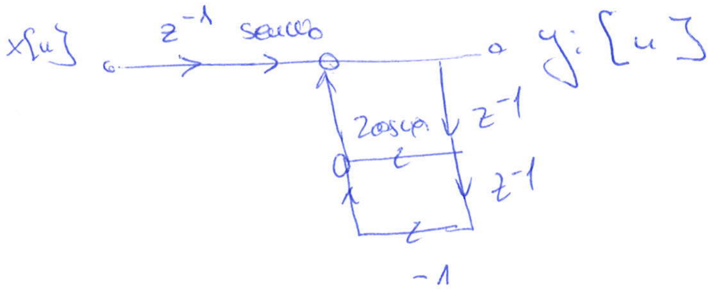
$$\to \cancel{H(z)} = \qquad \operatorname{sen} \omega_0 n \to \frac{\operatorname{sen} \omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos \omega_0 z^{-1} + z^{2}} + j \frac{\operatorname{sen} \omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

Partes real e imaginaria se tratan por separado

$$\Rightarrow \begin{cases} y_r[n] = x[n] - \cos \omega_0 \, x[n-1] + 2\cos \omega_0 \, y[n-1] - y[n-2] \\ y_i[n] = \operatorname{sen} \omega_0 \, x[n-1] + 2\cos \omega_0 \, y[n-1] - y[n-2] \end{cases}$$


x[n]
y_r[n]
z^{-1}
-cosω0
2cosω0
z^{-1}
z^{-1}
-1


x[n]
z^{-1}
senω0
y_i[n]
2cosω0
z^{-1}
z^{-1}
1
-1

⑦ 4º TEL. Sup. 1'26 €

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. ETSI Telecomunicación.
Universidad de Málaga

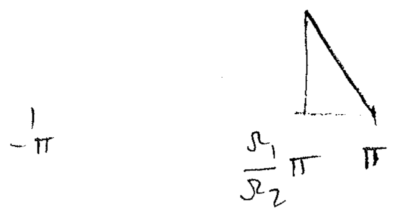
TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL 1:
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS RECOMENDADOS

LIBRO: OPPENHEIM, A.V., SCHAFER, R.W.,"DISCRETE TIME SIGNAL PROCESSING"
1^a EDICIÓN: PRENTICE-HALL, 1989
2^a EDICIÓN: PRENTICE-HALL, 1999

Nota: Los ejercicios 3.3/4.7, 3.4/4.8, 5.40/5.15, 7.26/7.5, 6.1/6.1, 6.11/6.5 y 6.14/6.6 vienen solucionados en el libro (segunda edición)

3.5 , 4.21

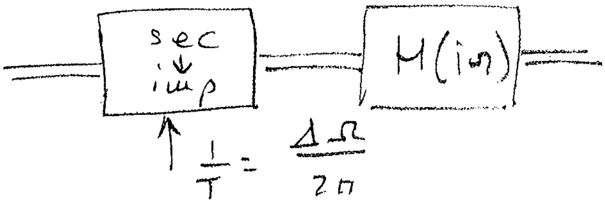
a)



$$X(e^{i\omega}) = \frac{1}{T} X_c\left(i\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$

b) $F_{min} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$

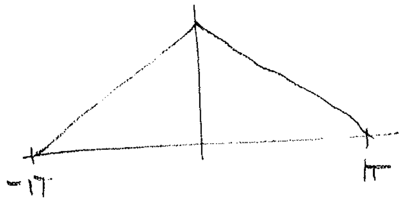
c)



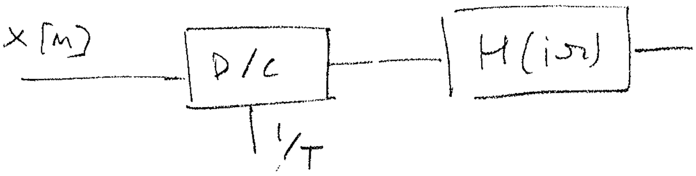
$$H(i\Omega) = \begin{cases} T & \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

3.6/4.22

a)



b)



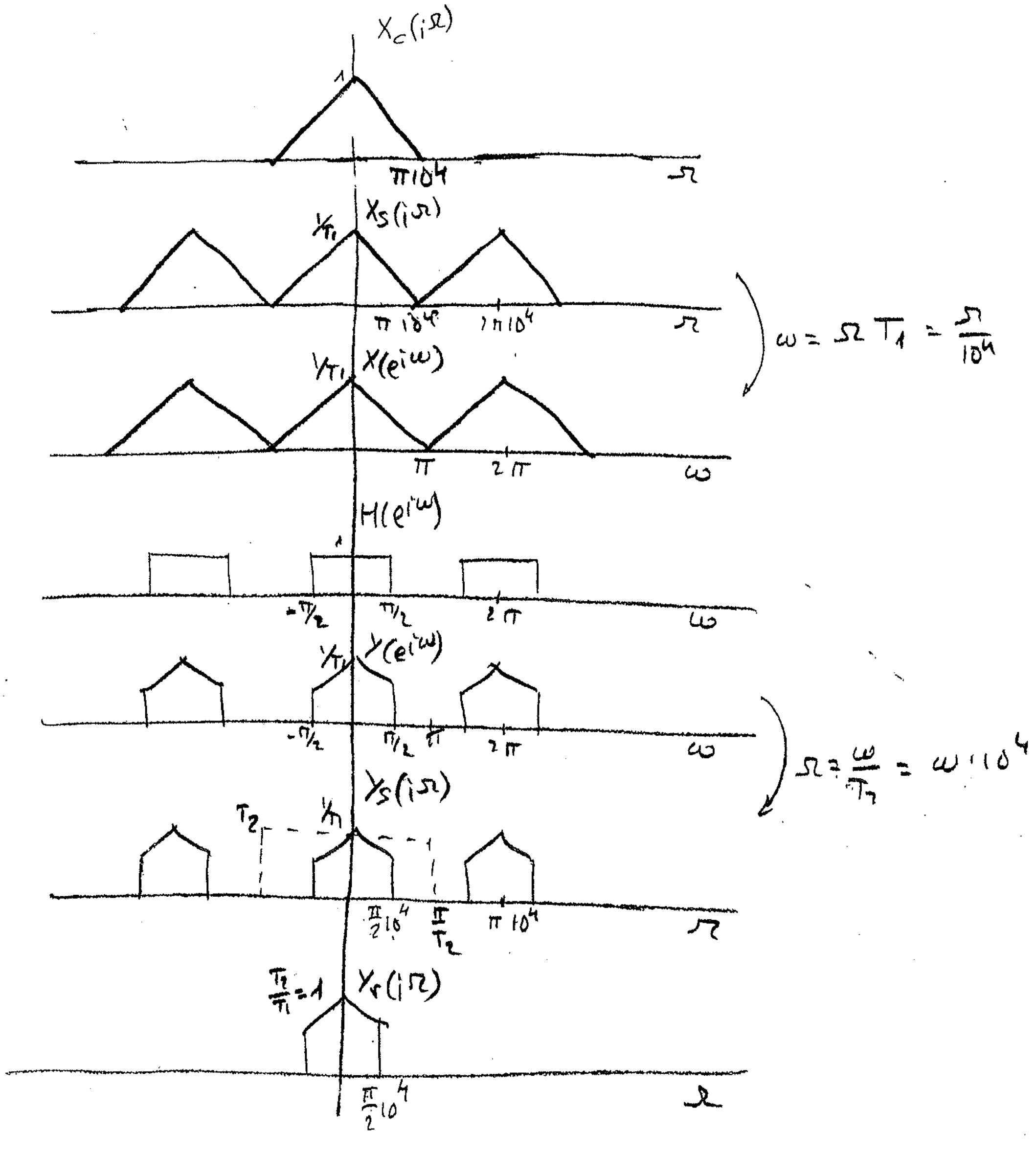
$$H(i\Omega) = \begin{cases} T & \frac{\Omega_0}{2} < |\Omega| < \Omega_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

c) para $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

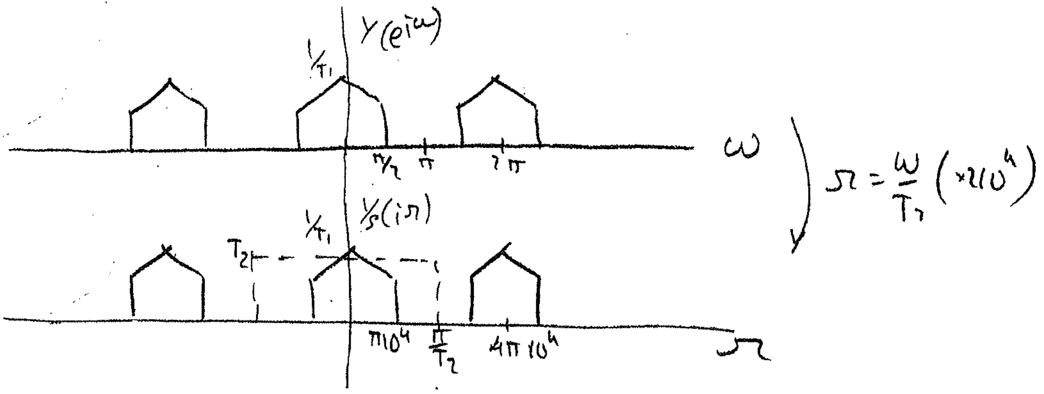
y para $T < \frac{\pi}{\Omega_0}$

3.10 / 4.24

a)

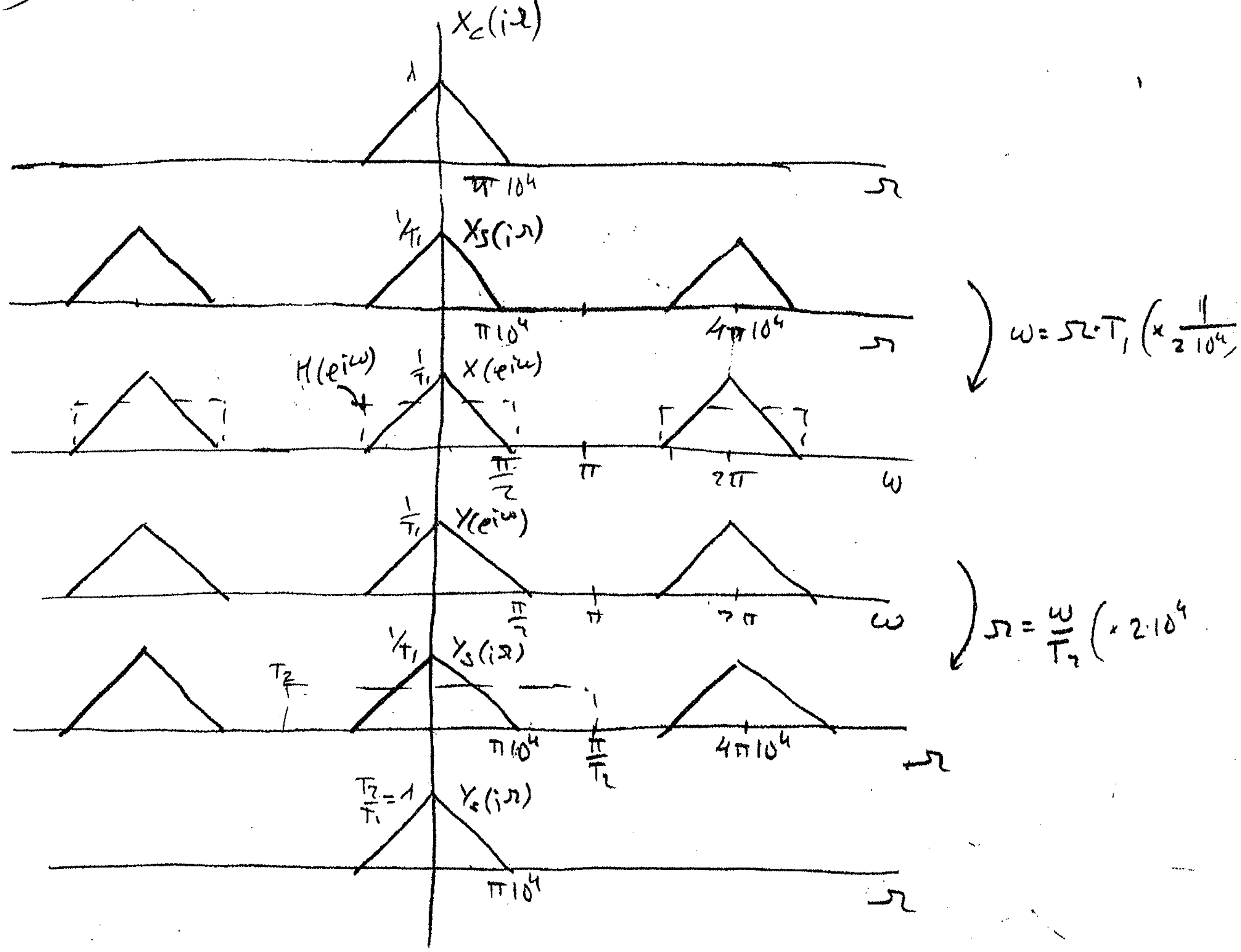


d) Es igual que a) hasta el conversor D/C:

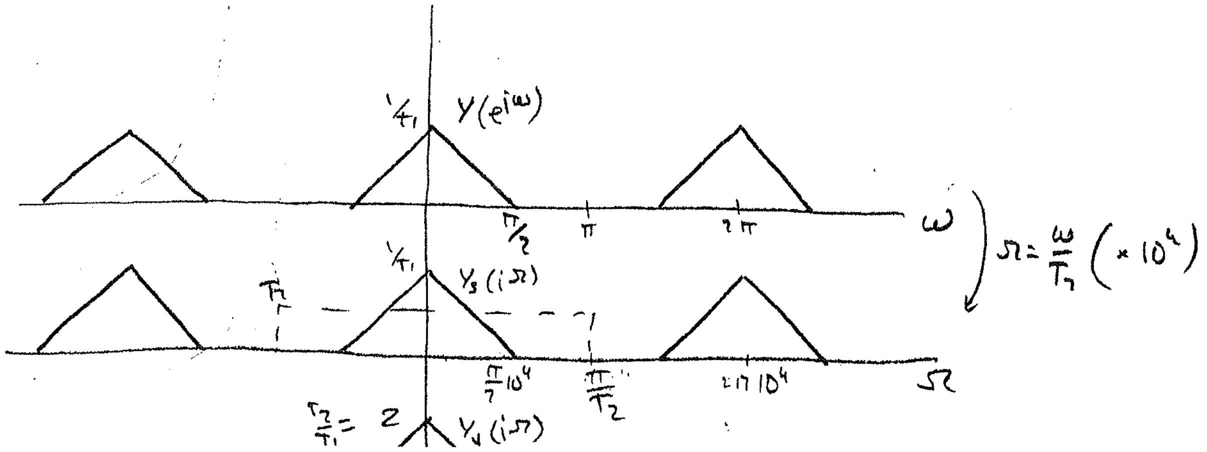


$\boxed{3.10/4.24}$

b)

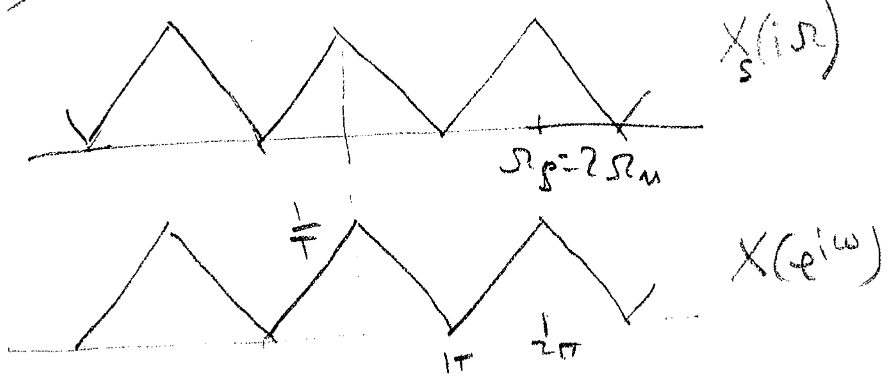


c) Es igual que b) hasta el conversor D/C



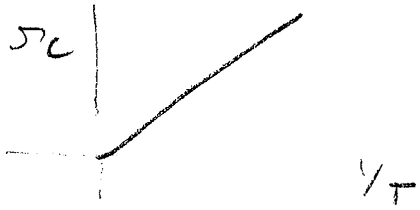
$\boxed{3.11 / 4.25}$

a)



b) $T < \frac{7\pi}{4} \frac{1}{\Omega_M}$

c) $\Omega_c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{T}$



$\boxed{3.14 / 4.45}$

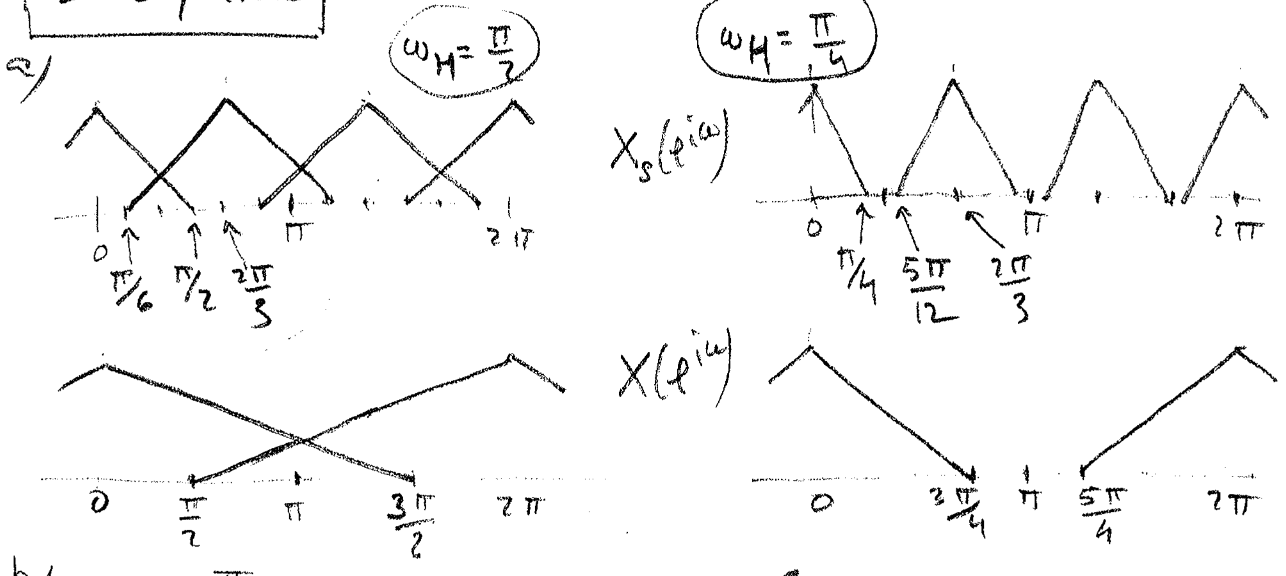
a) $10^{-4}\,s = 100\,\mu s$

b) $F_c = 625\,Hz$

c) $F_c = 1250\,Hz$

$\boxed{3.20 / 4.26}$

a)



b) $\omega_H < \pi/2$

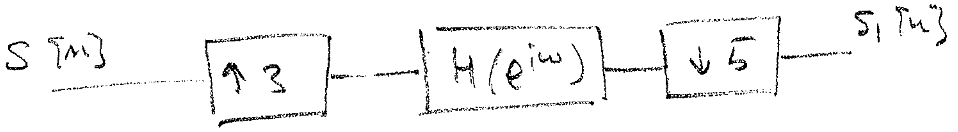
S

$\boxed{3.21 / 4.36}$

a) 2,5 ms

b) 5 ms

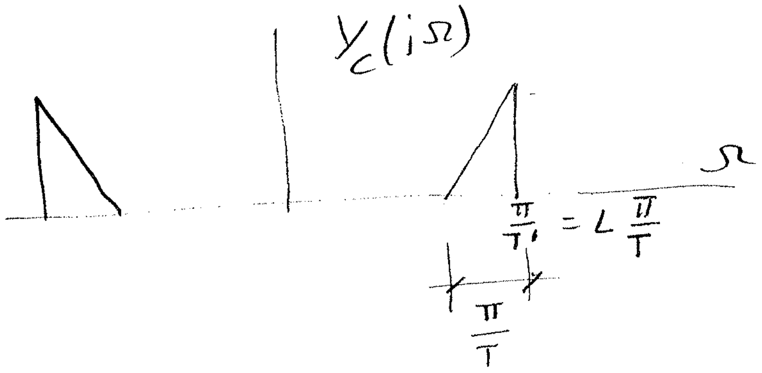
$\boxed{3.23 / 4.37}$ error en enunciado: 2° sistema $T = \frac{1}{6} \times 10^{-3}$ (6 kHz)



$$H(e^{iw}) = \begin{cases} 3 & |w| < \pi/5 \\ 0 & \pi/5 < |w| < \pi \end{cases}$$

a revisar

$\boxed{3.24 / 4.38}$

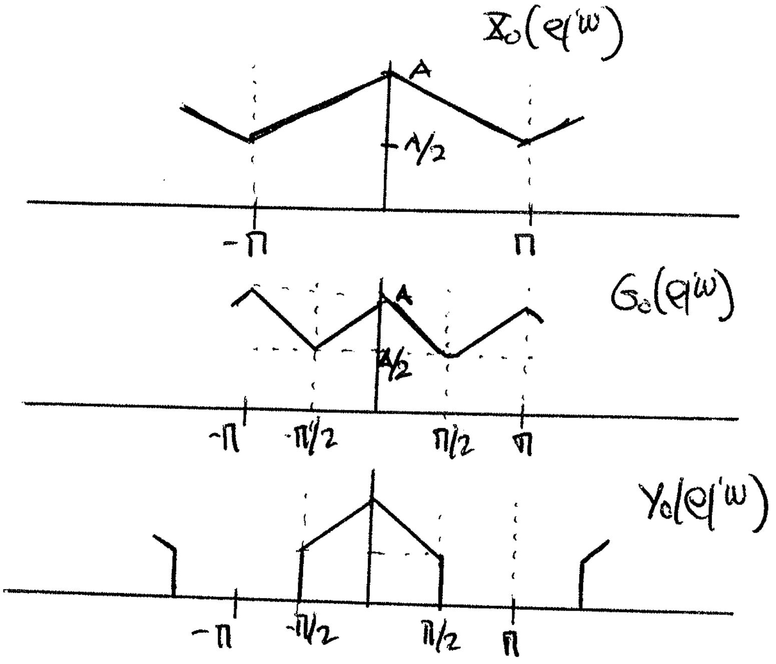


$\boxed{3.28 / 4.40}$

$$y[n] = \frac{1}{L} x_c(nT - T/L)$$

EJERCICIO 3.29/4.53

a)



b) $$G_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) H_0(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)}) H_0(e^{j(\omega+\pi)})\right]$$

c) Para $y[n] = K \cdot x[n-n_d] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = K\, X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n_d}$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) \left[H_0^2(e^{j\omega}) + H_0^2(e^{j(\omega+\pi)})\right]$$

$$+ \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) \left[H_0(e^{j\omega}) H_0(e^{j(\omega+\pi)}) + H_1(e^{j\omega}) H_1(e^{j(\omega+\pi)})\right]$$

Condiciones

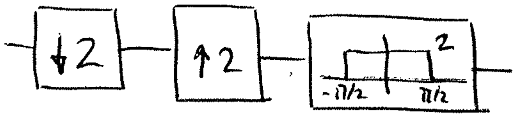
1) $H_0^2(e^{j\omega}) + H_0^2(e^{j(\omega+\pi)}) = K \cdot e^{-j\omega n_d}$

2) $H_0(e^{j\omega}) H_0(e^{j(\omega+\pi)}) = 0$

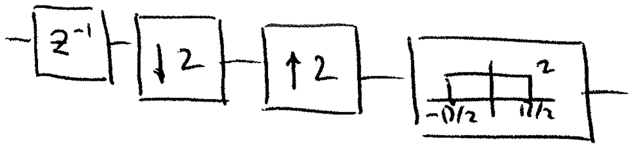
Nota: se ha tomado $y(n) = y_1(n) + y_2[n]$, según aparece en la segunda edición

EJERCICIO 3.30/4.54

a) Si n_0 par



Si n_0 impar



b) Mirar apartado 'a'.

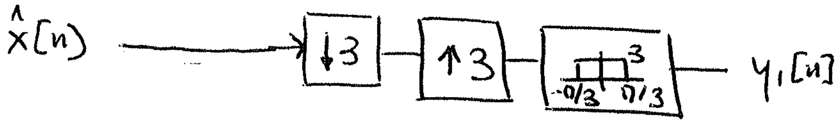
c) Opción 1: determinar la paridad de 'n_0' y aplicar a).

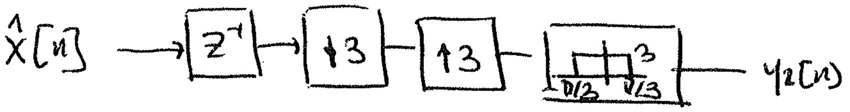
Para determinarla basta observar si

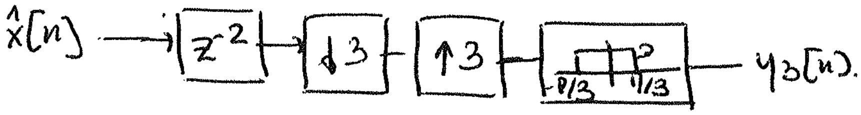
$$\hat{X}(e^{jw})\Big|_{w=\pi/2}$$ es real o imaginario,

siendo $\hat{x}[n] = x[n] + A\cdot\delta[n-n_0]$.

Opción 2:







Comparando, sabemos que dos de las señales son iguales (e iguales a x[n]) y la otra no.

EJERCICIO 5.3/5.57

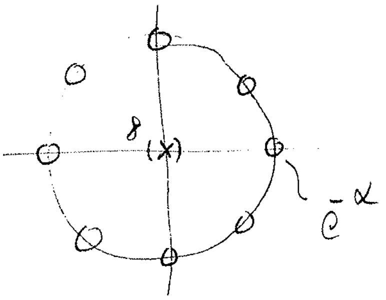
a, b, c) —

d)
1) Conversión D/C a un ritmo T
2) Retardar la envolvente $T \cdot \tau_g$
3) Retardar la portadora $T \cdot \tau_{ph}$
4) Conversión C/D al mismo ritmo T.

$\boxed{5.20 / 5.33}$

a)

$$H_1(z) = 1 - e^{-8\alpha} z^{-8}$$



b)

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha} z^{-8}} \qquad ROCs \begin{cases} |z| < e^{-\alpha} \\ |z| > e^{-\alpha} \rightarrow \text{causal y estable} \end{cases}$$

$\alpha > 0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1 \longrightarrow$

c) la causal y estable:

$$H_2(z) = H_2^a(z^8) \quad \text{con} \quad H_2^a(z) = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha} z^{-1}}$$

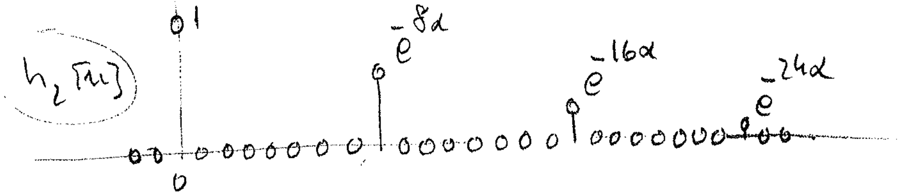
$$\begin{tikzcd} h_2^a[n] \arrow[r] & \boxed{\uparrow 8} \arrow[r] & h_2[n] \\ H_2^a(z) & & H_2(z) = H_2^a(z^8) \end{tikzcd}$$

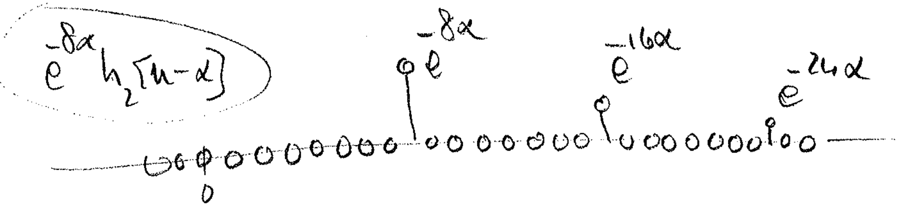
$$h_2^a[n] = e^{-8\alpha n} u[n]$$

$$h_2[n] = \begin{Bmatrix} h_2^a[n] \\ \text{expandida} \\ \text{por } 8 \end{Bmatrix} = \begin{cases} h_2[n/8] & \text{para } \frac{n}{8} \text{ entero} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} e^{-\alpha n} & \frac{n}{8} \text{ entero } \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

d)

$$h_2[n] * (\delta[n] - e^{-8\alpha} \delta[n-8]) = h_2[n] - e^{-8\alpha} h_2[n-8]$$



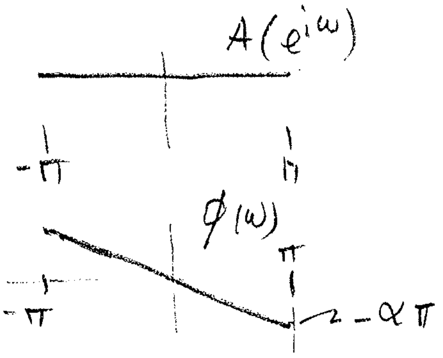


restando queda $\delta[n]$

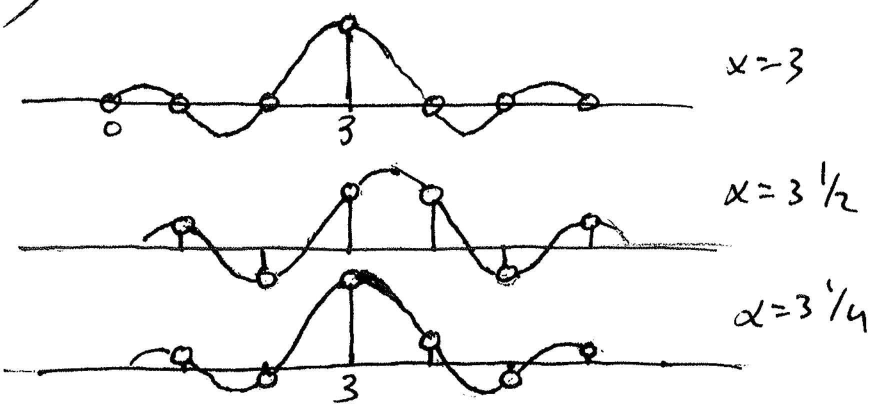
$\boxed{5.44/5.42}$

a) $A(e^{j\omega})=1$

$\phi(\omega)=-\alpha\omega$



b)



c) i, ii: h[n] es simetrica respecto a $n=\alpha$ pero en el 2º caso no hay muestra en $n=\alpha$

iii: no puede decirse nada sobre la simetria

$\boxed{5.47/5.44}$

$h_{lp}[n]$ paso bajo solo puede ser I ó II

Al multiplicar por $(-1)^n$, solo el tipo I puede seguir siendo simétrico

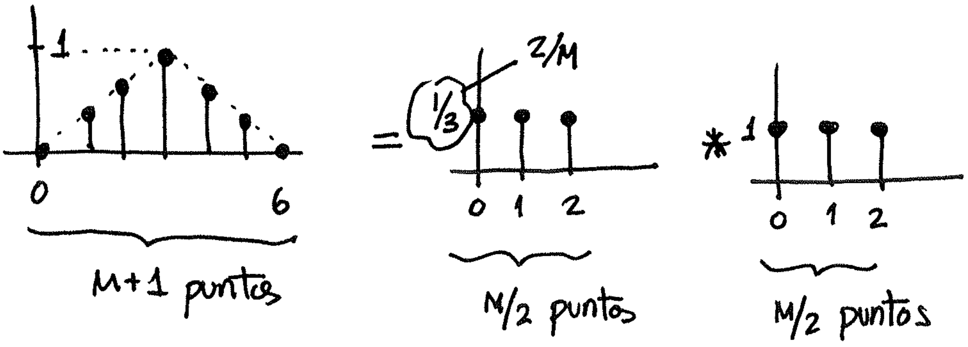
EJERCICIO 7.23/7.32

a) $\varepsilon^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|hd[n]-h[n]|^2$; b) $h[n]=hd[n]$, $n=0\ldots M$; c) $w[n]=1$, $n=0\ldots M$

Ventana Rectangular

EJERCICIO 7.25/7.34

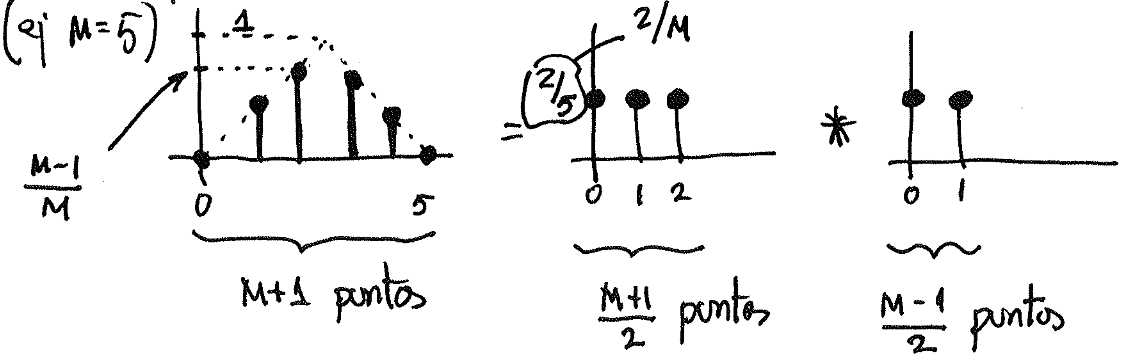
a) Sea M par
ej (M=6)



$$W_{RECTANGULAR}(e^{j\omega}) = \frac{sen(\omega\, M/4)}{sen(\omega/2)}\, e^{-j\omega M/4}$$

$$\boxed{W_B(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{M}\right) \cdot \frac{sen^2(\omega M/4)}{sen(\omega/2)}\, e^{-j\omega M/2}}$$

Sea M impar
(ej M=5)



$$\boxed{W_B(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{M}\right) \frac{sen(\omega(M+1)/4)}{sen(\omega/2)} \cdot \frac{sen(\omega(M-1)/4)}{sen(\omega/2)}\, e^{-j\omega M/2}.}$$

b)

$$W(e^{j\omega}) = \left[A\delta(\omega) + B\left(\pi\delta(\omega + 2\pi/M) + \pi\delta(\omega - 2\pi/M)\right) + C\left(\pi\delta(\omega + 4\pi/M) + \pi\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{M}\right)\right)\right]$$

$$\underset{\uparrow}{*} \; \frac{\operatorname{sen}\left(\omega\, [M+1]/4\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

Convolución periódica.

c) $W_{HANN}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}\left\{ W_R\left(e^{j\left[\omega + \frac{2\pi}{M}\right]}\right) + W_R\left(e^{j\left[\omega - 2\pi/M\right]}\right)\right\}$

7.27 / 7.35

a) Retardo $\frac{M}{2} = 24$ muestras

b) $$h_d[n] = 0{,}5 + \frac{\operatorname{sen} 0{,}3\pi(n-24) - \operatorname{sen} 0{,}6\pi(n-24)}{\pi(n-24)}$$

c)
$B = 1 \qquad C = 1/2$

$\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0075 \qquad \delta_3 = \delta_1/2$

$\omega_{p1} = 0{,}25\pi \qquad \omega_{p2} = 0{,}55\pi$

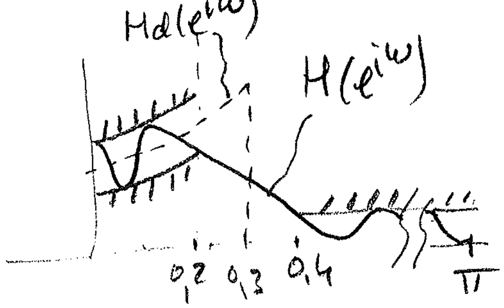
$\omega_{s1} = 0{,}35\pi \qquad \omega_{s2} = 0{,}65\pi$

7.32 / 7.49

a) $$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega} \cdot H(e^{j\Omega T}) \cdot e^{-j\frac{\Omega T}{2}} & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

b) Retardo $\frac{MT}{2} + \frac{T}{2} = \frac{(M+1)T}{2} = \frac{52 \cdot 0{,}1\,ms}{2} = 2{,}6\,ms$

c) $$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2} & 0 \le |\omega| < 0{,}3\pi \\ 0 & 0{,}3 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



$$W(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \omega/2}{\omega/2} & 0 \le |\omega| < 0{,}2\pi \\ 0 & 0{,}2\pi < |\omega| < 0{,}4\pi \\ 1 & 0{,}4\pi < |\omega| < \pi \end{cases}$$

d) $$H_d'(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \cdot \frac{1}{|H_r(j^{\omega/T})|}$$

$$W'(\omega) = W(\omega)\frac{1}{|H_r(j^{\omega/T})|}$$

EJERCICIO 7.27/7.35 (Repetido)

a) Retardo $= M/2 = 24$ muestras

b)
$$h_d[n] = \frac{\operatorname{sen}[0'3\pi(n-24)]}{\pi(n-24)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}[0'6\pi(n-24)]}{\pi(n-24)}$$

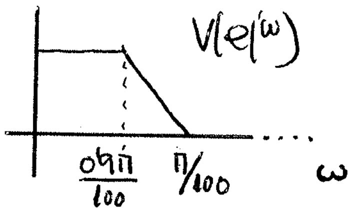
c) $\delta_1 = \delta_2 = 0'0075$; $B=1$; $\omega_{p_1} = 0'25\pi$; $\omega_{p_2} = 0'55\pi$

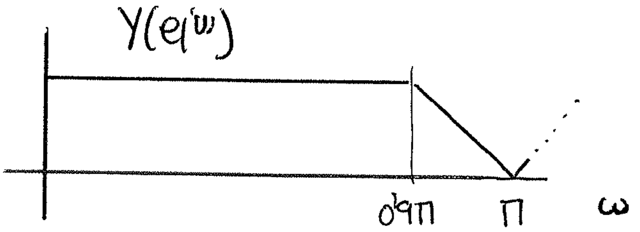
$\delta_3 = 0'0075/2$; $C = 0'5$; $\omega_{s_1} = 0'35\pi$; $\omega_{s_2} = 0'65\pi$.

EJERCICIO 7.33/7.50

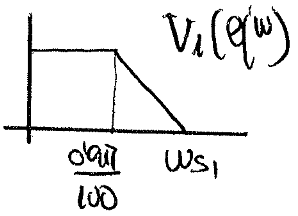
a) $M = \pi/\omega_s$

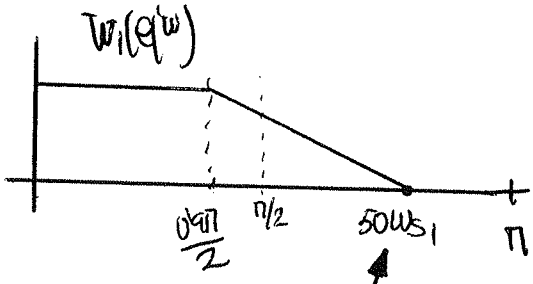
b)



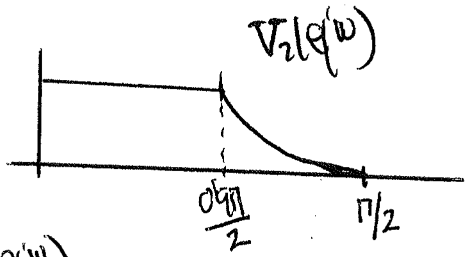


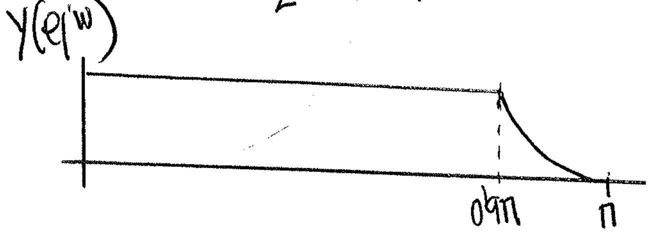
c)





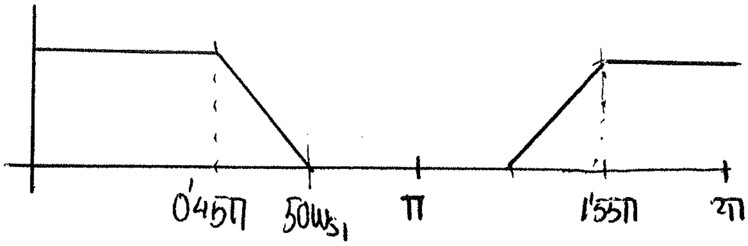
Puede ser mucho mayor, incluso mayor que π, ya se se permite aliasing.



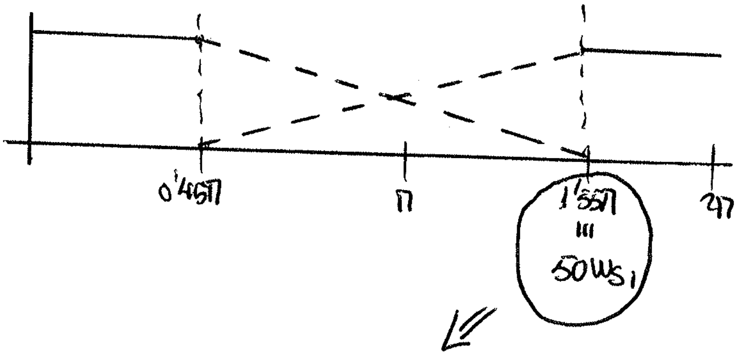


d) Se permite aliasing en la banda de transición.

Tras el primer diezmado, $\tilde{W}_1(e^{j\omega})$ tiene el aspecto....



Si admitimos el aliasing. tendremos



$$\boxed{\omega_{s1}\big|_{máx} = 0'031\pi}$$

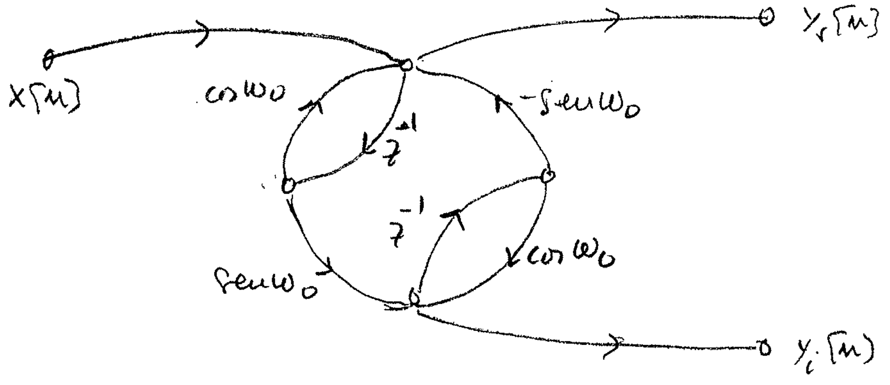
e) 2535 productos/muestra de salida.

f) $N_1 = 233$; $N_2 = 104$; En total 285 productos/muestra de salida.

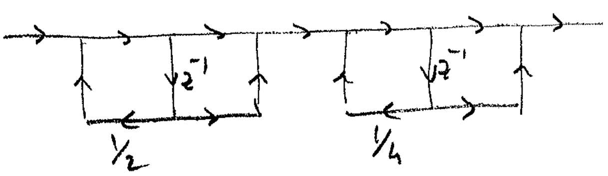
g) $N_1 = 500$; $N_2 = 112$; En total 552 productos/muestra de salida.

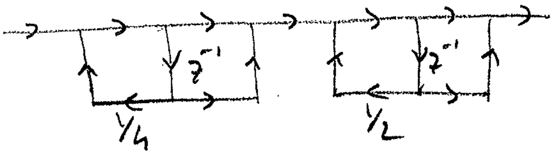
h) No; incluso podría aumentarse

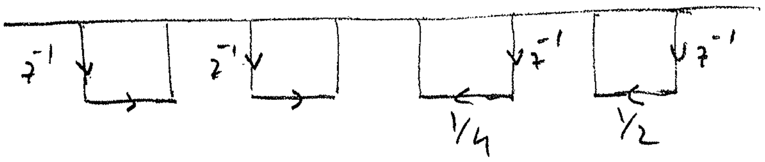
6.4 / 6.21



6.5 / 6.22





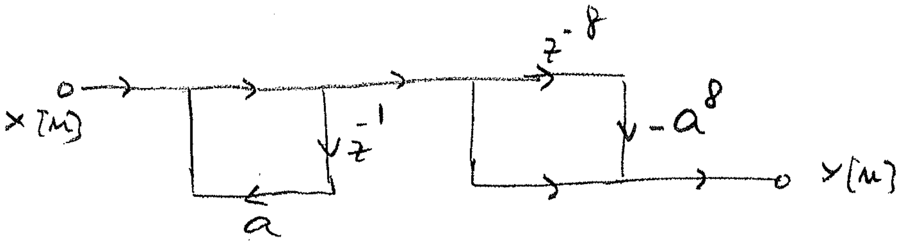


12 estructuras cambiando el orden de las secciones

6.15 / 6.29

b) $$H(z) = \sum_{n=0}^{7} (az^{-1})^n = \frac{(az^{-1})^8 - 1}{(az^{-1}) - 1}$$

c)

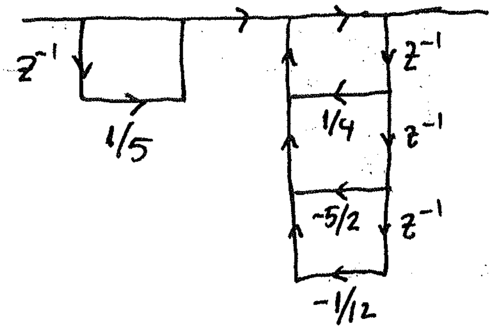


EJERCICIO 6.7

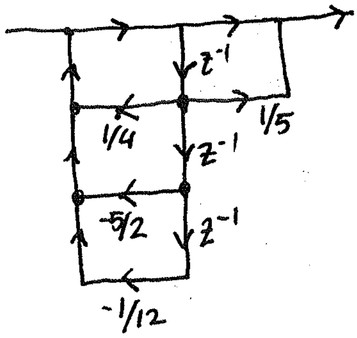
$$H(z) = \frac{(1+1/5\, z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + 1/3\, z^{-2})(1+1/4\, z^{-1})}$$

(i) DIRECTA I

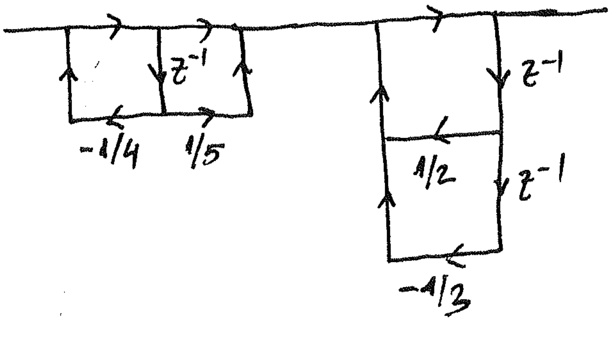
$$H(z) = \frac{(1+1/5\, z^{-1})}{(1 - 1/4\, z^{-1} + 5/24\, z^{-2} + 1/12\, z^{-3})}$$



(ii) DIRECTA II



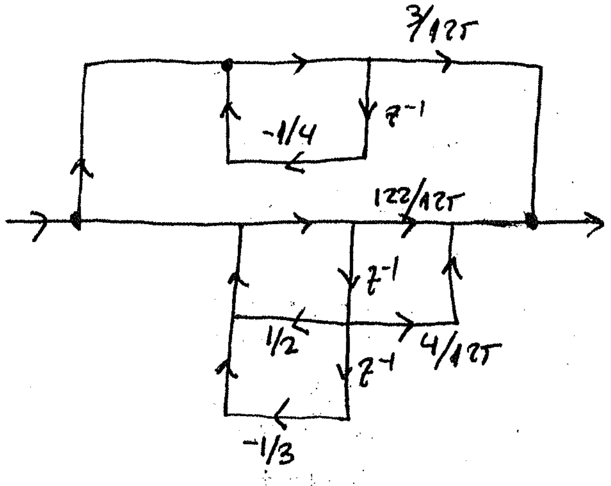
(iii) CASCADA



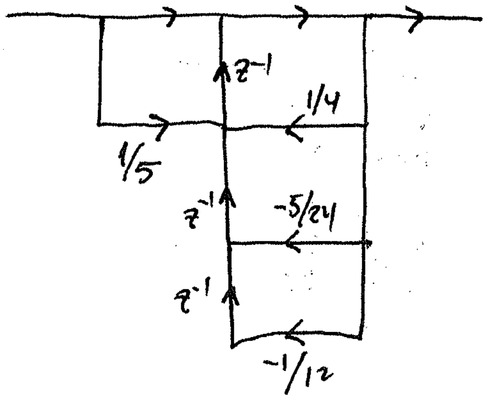
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
Apellidos: Nombre:
Asignatura: Grupo: Fecha:

(iv) PARALELO.

$$\frac{\left(122/125 - 4/125\, z^{-1}\right)}{\left(1 - 1/2\, z^{-1} + 1/3\, z^{-2}\right)} + \frac{3/125}{\left(1 + 1/4\, z^{-1}\right)}$$



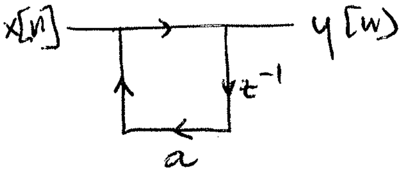
(v) DIRECTA II TRASPUESTA.



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

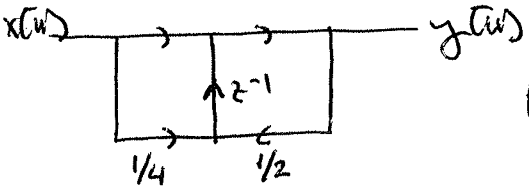
EJERCICIO 6.8/6.24

ⓐ



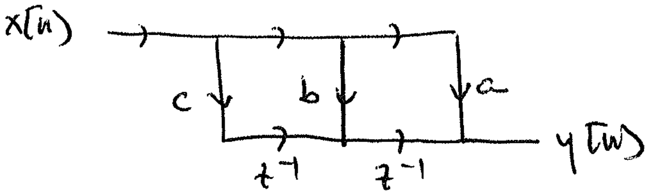
$$H_T(z)=H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

ⓑ



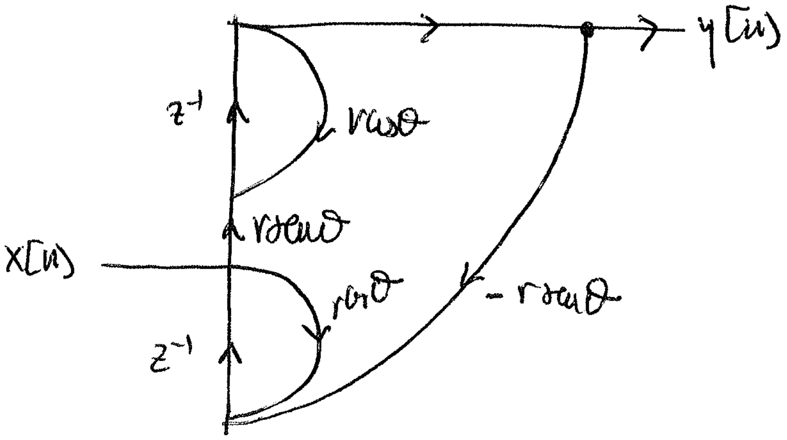
$$H_T(z)=H(z)=\frac{1+1/4\,z^{-1}}{1-1/4\,z^{-1}}$$

ⓒ



$$H_T(z)=H(z)=a+bz^{-1}+cz^{-2}$$

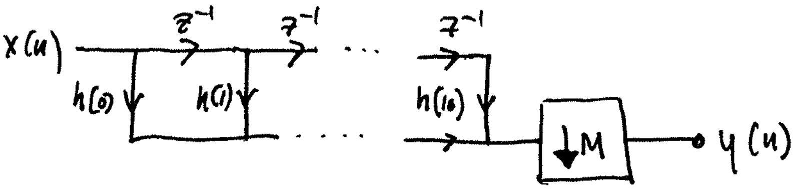
ⓓ

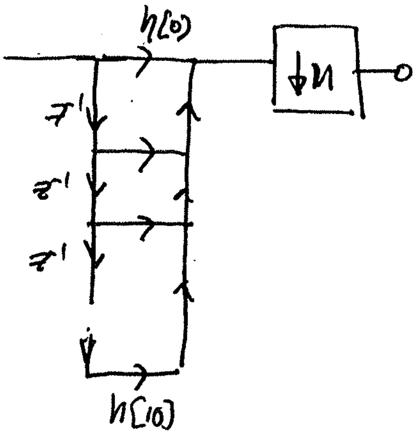


$$H_T(z)=H(z)=\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta\, z^{-1}}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

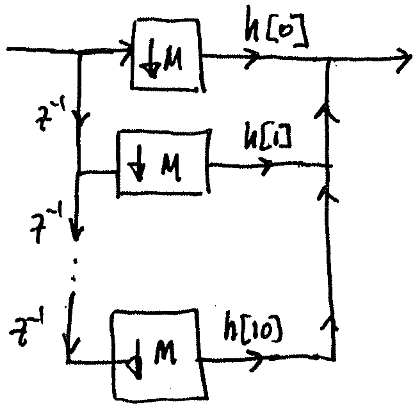
EJEMPLO 6.18

(a)



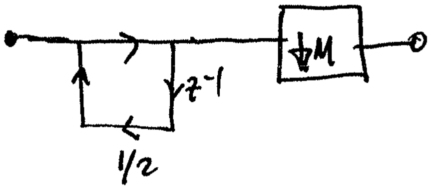


(b)



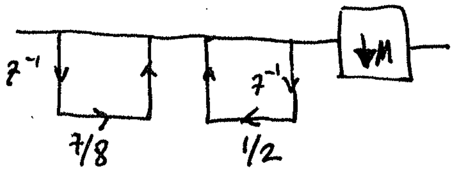
Factor M en productos y sumas

(c)

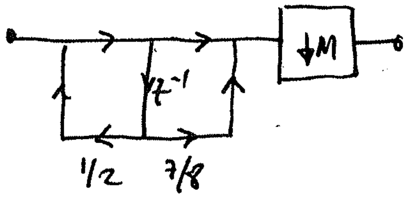


No se puede reducir

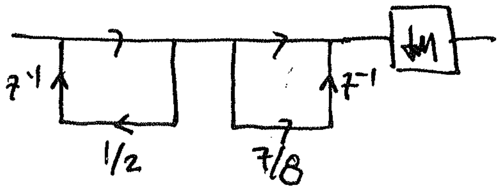
(d)



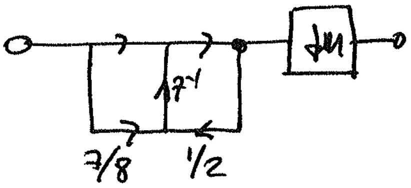
(i)



(ii)



(iii)



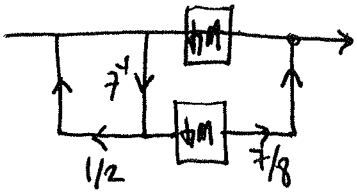
(iv).

(i) No

$\boxed{\text{(ii) Sí}}$ →

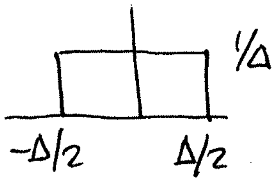
(iii) No

(iv) NO



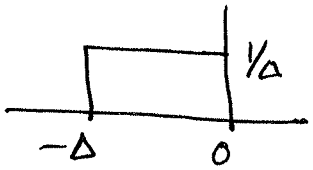
→ Parece que sí pero No se puede intercambiar con un retardo.

EJERCICIO 6.24/6.40



$\rightarrow m_e = 0$

$\sigma_e^2 = \Delta^2/12$

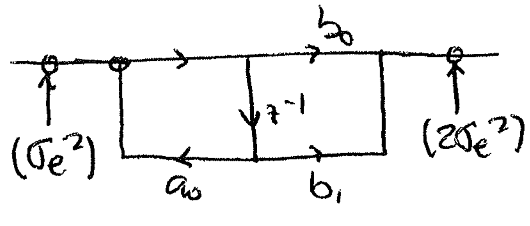


$m_e = -\Delta/2$

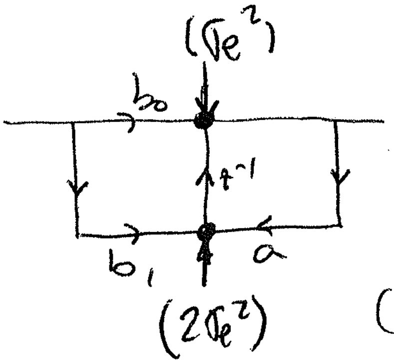
$\sigma_e^2 = \Delta^2/12$

EJERCICIO 6.27/6.42

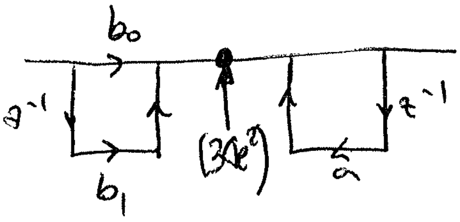
ⓐ



(a)



(b)



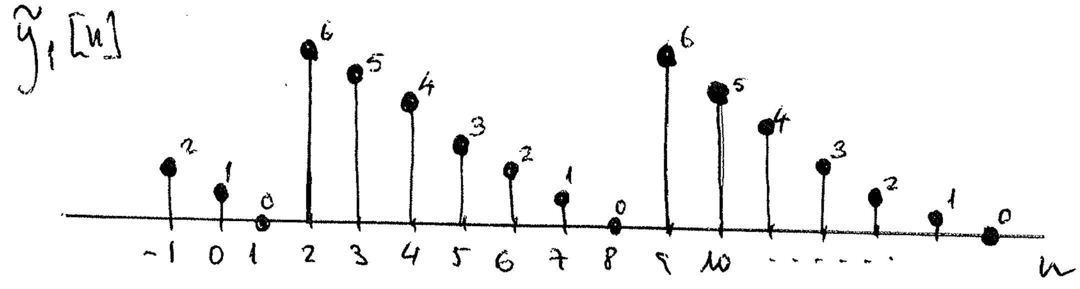
ⓑ b y c

ⓒ Estructura a: $\text{Pot} = 2\sigma^2 + \sigma^2\left[b_0^2 + \frac{(ab_0+b_1)^2}{1-a^2}\right]$

Estructura b y c: $\text{Pot} = \frac{3\sigma^2}{1-a^2}$

EJERCICIO 8.6/8.21

a) Convolución periódica.



$$\tilde{y}_1[n] = \tilde{x}_1[n-2]$$

b) $\hat{y}_2[n] = \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4]$

EJERCICIO 8.11/8.5

a) $X[k] = 1 \qquad 0 \leq k \leq N-1$

b) $X[k] = W_N^{kn_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0} \qquad 0 \leq k \leq N-1$

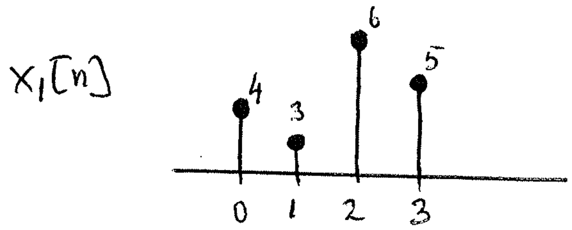
c)
$$X[k] = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{4\pi}{N}k}} = \begin{cases} N/2 & \text{para } k = 0, N/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

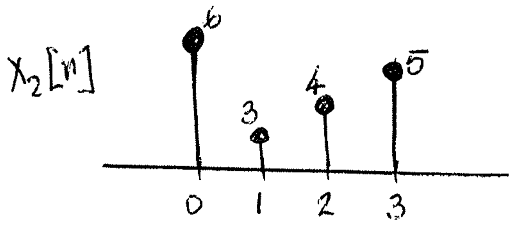
d)
$$X[k] = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = \begin{cases} N/2 & \text{para } k = 0 \\ \frac{2}{1 - e^{-j2\pi k/N}} & \text{para } k \text{ impar} \\ 0 & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

$0 \leq k \leq N-1.$

e) $X[k] = \dfrac{1 - a^N}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}$

EJERCICIO 8.16/8.28





EJERCICIO 8.17/8.32

Opción C

EJERCICIO 8.21/8.23

a) Técnica de "zero-padding". Añadir N-P ceros a la secuencia x[n] y hacer la DFT_N a la secuencia resultant

b) Tomar la DFT_N del periodo principal de x[n] hecha periodica de periodo N.

Es decir

1) Hacemos x[n] periódica de periodo N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

2) Tomamos el periodo principal

$$x_p[n] = \tilde{x}[n] \quad , n=0 \ldots N-1.$$

3) Tomamos la DFT_N

$$X[k] = DFT_N\{x_p[n]\}$$

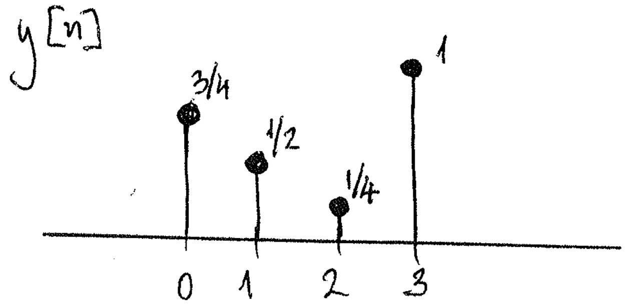
EJERCICIO 8.22/8.9

a) Hacer la DFT_5 al periodo principal de la extensión periódica de $x[n]$, con periodo 5, $\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r5]$

De la DFT resultante, $X[k]$, el valor correspondiente al índice $k=2$ es el buscado. $(M=5)$

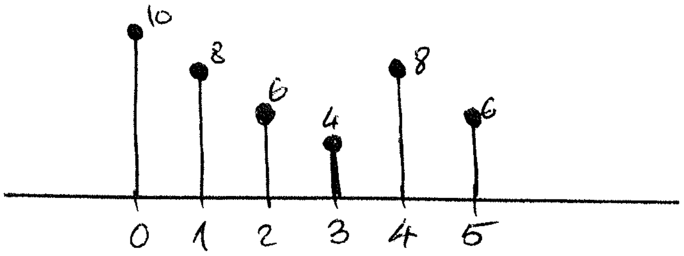
b) $(M=27)$. Extendemos $x[n]$ con ceros hasta alcanzar la longitud 27 y tomamos la DFT_{27}, resultando $X[k]$. El valor correspondiente al índice $k=5$ es el resultado.

EJERCICIO 8.24/8.25

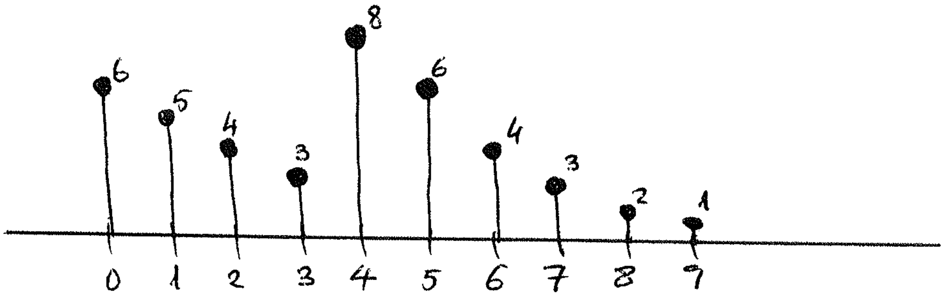


EJERCICIO 8.31/8.29

Para $N=6$



Para $N=10$ → Coincide con la convolución lineal



EJERCICIO 8.45/8.60

Coinciden para $1 \leq n \leq N-2$

No coinciden para $n=0$ ni para $N = N-1$.

$$x[n] = y[n+1] - b\,y[n-1] \qquad -\infty < n < \infty$$

$$v[n] = y\left[((n+1))_N\right] - b\,y\left[((n-1))_N\right]$$

EJERCICIO 8.47

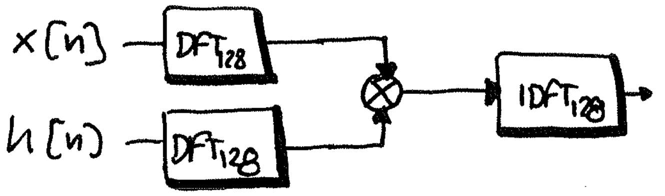
Es más sencillo comenzar por el apartado b.

(b) Siendo $x[n]$ — 63 puntos — L
$h[n]$ — 63 puntos — P

Piden $x[n] \, \textcircled{63} \, h[n]$ usando DFT's de $\underbrace{128}_{N}$ puntos

Aplicamos:

1) Convolución lineal con DFT (caso de $\boxed{N > L+P-1}$)



$y[n] = x(n) \, \textcircled{128} \, h[n]$ = CONVOLUCIÓN LINEAL

$x[n] * h(n)$.

Con esto tenemos la convolución lineal.

2) Conv. Circular$_{63}$ = Periodo principal de la convolución lineal hecha periódica de periodo 63.

$$x[n] \, \textcircled{63} \, h[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n-r63] \qquad n=0\ldots62$$

$$x[n] \, \textcircled{63} \, h[n] = \underbrace{y(n)+y(n+63)}_{\text{Basta sumar 2 en este caso concreto.}} \qquad n=0\ldots62$$

Nota: Observar que conocer la relación entre convolución lineal y circular permite tanto calcular la lineal mediante la circular (caso explicado en la teoría) como calcular la circular mediante la lineal (caso de este problema)

(a) Piden $x[n] \textcircled{63} h[n]$. con DFT_{64} (Si dispusiéramos de DFT_{63} la solución sería inmediata)

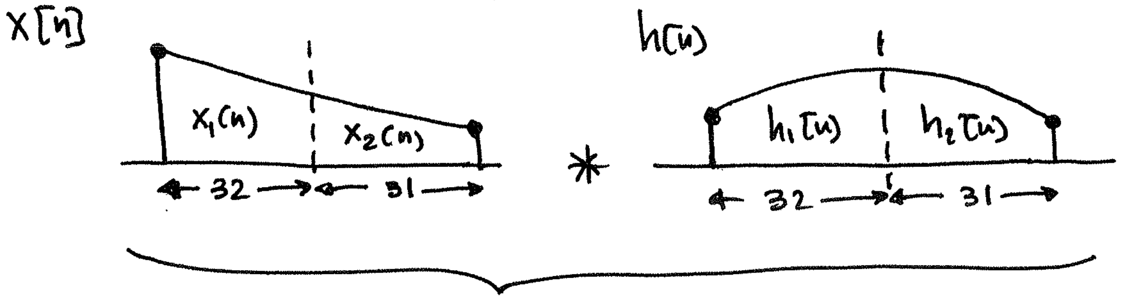
Procedemos así:

Paso 1) Calculamos la convolución lineal de $x(n)$ y $h[n]$.

Paso 2) Aplicamos los resultados del apdo (b). para obtener la circular a partir de la lineal.

Paso 1)

Dividimos $x(n)$ y $h(n)$ en 2 bloques cada una como sugiere el enunciado. Aplicando la propiedad de linealidad e invarianza en el tiempo de la convolución se tiene....



Son 4 convoluciones.

Si llamamos:

$y_1(n) = x_1(n) * h_1(n)$ ——— longitud $63 < 64$

$y_2(n) = x_2(n) * h_1(n)$ ——— " $62 < 64$

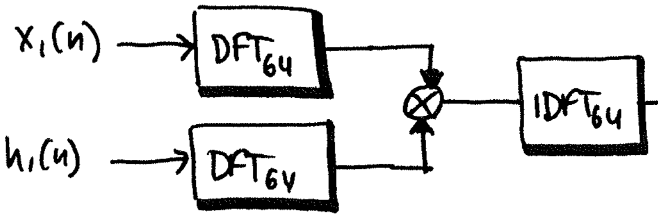
$y_3(n) = x_1(n) * h_2[n]$ ——— " $62 < 64$

$y_4(n) = x_2(n) * h_2(n)$ ——— " $61 < 64$

Entonces $y(n) = x[n] * h[n] = \underbrace{y_1(n) + y_2(n-32) + y_3(n-32) + y_4(n-64)}_{\text{los desplazamientos responden a la invariante en el tiempo.}}$

Cada una de estas 4 convolucions lineals se puede calcular con una DFT_{64}. Estamos en el caso $\boxed{N > L+P-1.}$

ejemplo para $y_1(n)$



$$\to y_1(n) = x_1(n) \textcircled{\scriptsize 64} h(n)$$
$$= x_1(n) * h(n)$$

E igual para $y_2(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$.

Paso 2)

Tenemos convolución lineal $y(n) = x(n) * h(n)$ y queremos la convolución circular de $x(n)$ y $h(n)$ de 63 puntos. Según lo explicado en apartado (b)

$$x[n] \textcircled{\scriptsize 63} h[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n-r63) \qquad n=0\ldots62$$

$$x(n) \textcircled{\scriptsize 63} h(n) = y[n] + y(n+63) \qquad n=0\ldots62$$

¿Número de DFT's ?

- 4 DFT_{64}. (la de $x_1(n)$, $x_2(n)$, $h_1(n)$ y $h_2(n)$)
- 4 $IDFT_{64}$ (la de $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$ e $y_4(n)$).

(c) Calculamos el número de productos (complejos) en cada caso.

Opción apdo a)

4 DFT_{64} + 4 $IDFT_{64}$ + 4 productos de vectores de 64 puntos.

$$\Rightarrow 8\cdot(32)\cdot\log_2(64) + 4\cdot 64 = \boxed{1792 \text{ productos}}$$

Opción apdo b)

$$2\,DFT_{128} + 1\,IDFT_{128} + 128 \Rightarrow 3\cdot(64)\log_2(128) + 128$$

$$= \boxed{1472 \text{ productos}}$$

Opción apdo c)

Cálculo de la convolución de forma directa $\Rightarrow 63^2 = \boxed{3969 \text{ prod}}$

(Suponemos señales complejas)

La opción más favorable es la del apdo b).

EJERCICIO 8.48/8.43

a) 65 DFTs
64 IDFTs

b) 66 DFTs
65 IDFTs

c) Overlap add : productos : $129 \times 1024 = 132096$
sumas : $129 \times 2048 = 264192$

Overlap save : productos : $131 \times 1024 = 134144$
sumas : $131 \times 2048 = 268288$

Convolución directa: productos : $100(10000) = 1000000$
sumas : $99(10000) = 990000$

EJERCICIO 8.49/8.63

a) $V = 49$; b) $M = 51$; c) $49 \leq n \leq 99$

PROBLEMA 8.50

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

- $x[n]$ sufre distorsión debido al filtro $h[n] = \delta[n] - 1/2\,\delta[n-n_0]$
- Se pretende recuperar $x[n]$ mediante procesado de $y[n]$ empleando un filtro FIR.
- El filtro inverso ideal es IIR como se comprueba más adelante

(a)

$$H(z) = 1 - 1/2\, z^{-n_0}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 1/2\, e^{-j\omega n_0}.$$

$H[k]$ son muestras de $H(e^{j\omega})$ $\boxed{H[k] = 1 - 1/2\, e^{-j \underset{\substack{\uparrow \\ N=4n_0}}{\frac{2\pi}{N}} k n_0} \qquad k = 0 \ldots 4n_0 - 1}$

(b) Este apartado corresponde a lo estudiado en Señales y Sistemas 1.

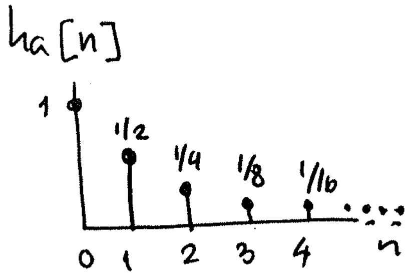
$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - 1/2\, z^{-n_0}} \xrightarrow{TZ^{-1}} h_i[n] = ?$$

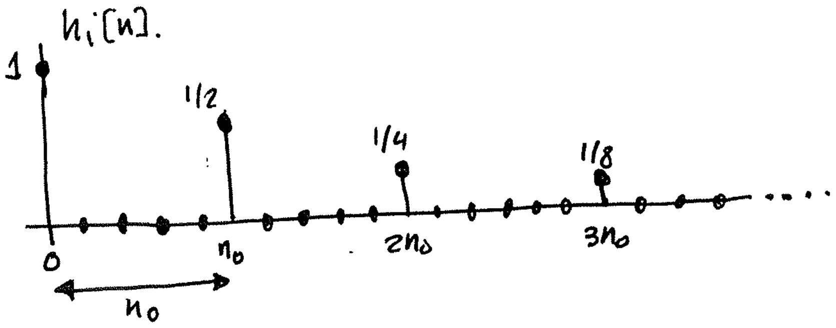
Recurrimos a la siguiente relación conocida.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x[n] & & x_e[n] \\ X(z) & \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow & X_e(z) = X(z^L) \end{array} \qquad x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n/L \text{ ent} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

Llamando $H_a(z^{n_0}) = H_i(z)$ donde $H_a(z) = \dfrac{1}{1 - 1/2\, z^{-1}} \xrightarrow{TZ^{-1}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h_a[n]}$

Tenemos... $\boxed{h_i[n] = \begin{cases} h_a[n/n_0], & n/n_0 \text{ entero} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$





Expansió

$$h_a[n] - \boxed{\uparrow n_0} - h_i[n].$$

(c)

$$G[k] = \frac{1}{H[k]} = H_i[k]. \qquad k = 0 \ldots N-1 \quad (0 \ldots 4n_0-1)$$

$$\Downarrow$$

G[k] son $4n_0$ muestras de la G($H_i(e^{j\omega})$ equiespaciadas entre $0 \ldots 2\pi$.

$$\Downarrow \text{IDFT}_{4n_0}$$

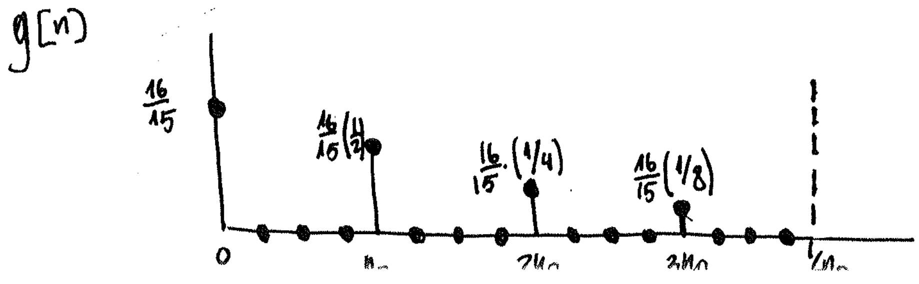
$$\boxed{g[n] = \underbrace{1 \text{ periodo}}_{\text{realmente es el periodo principal.}} \text{ de } h_i[n] \text{ hecha periódica de periodo } 4n_0.}$$

$$g[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_i[n + 4n_0 \cdot r] \qquad n = 0 \ldots 4n_0 - 1.$$

— A continuación se trata de calcular dicha suma. —

Verificar qe $h_i[n + 4n_0 \cdot r] = h_i[n] \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^r$ por tanto...

$$\boxed{g[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_i[n] \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^r = \frac{16}{15} \cdot h_i[n] \qquad n = 0 \ldots 4n_0-1}$$



(d)

$$\underbrace{G[k] = \frac{1}{H[k]}}_{} \quad \not\Rightarrow \quad G(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

Sólo se cumple para un número determinado de frecuencias. (para $4n_0$ puntos de frecuencias solamente).

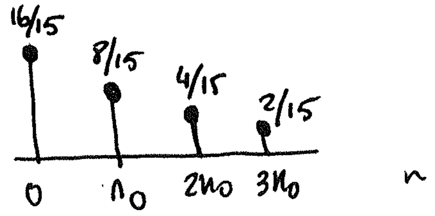
Esto no garantiza evidentemente que se cumple para el resto de frecuencias!

(e) Para que fuese $g(n)$ el filtro inverso de $h[n]$, debería ocurrir que $g[n] * h[n] = \delta[n]$.

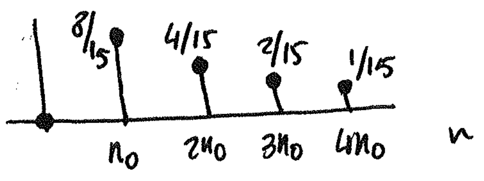
Veamos qué ocurre:

$$g(n) * h[n] = g[n] - 1/2\, g[n-n_0].$$

$g(n)$



$1/2\, g[n-n_0]$

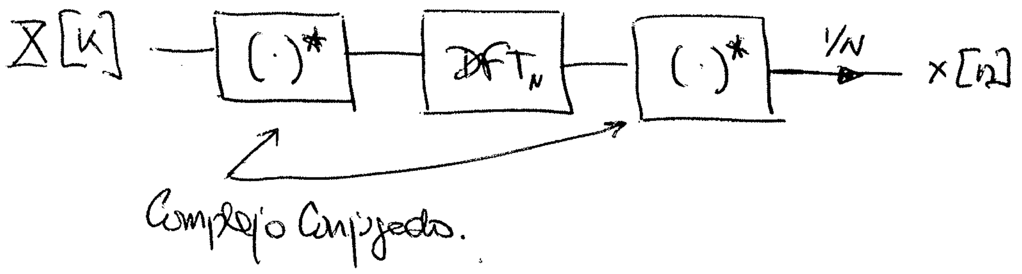


$g[n] - 1/2\, g[n-n_0]$

→ Es muy parecido a una delta

Nota: Si se hubiese empleado un $N > 4n_0$ (ejemplo $5n_0$, $6n_0$, etc) la aproximación cada vez es mejor.

EJERCICIO 9.1/9.1.



Otra alternativa...

EJERCICIO 9.3/9.2

a) $-W_N^2$; b) En general sólo uno.

c) —

EJERCICIO 9.5/9.22

En general, el coste es $N/2 \log_2(N) = 128$ productos complejos
$N \log_2(N) = 256$ sumas complejas.

$\Rightarrow$ 128×4 productos reales $= 512$ productos
$256 \times 2 + 128 \times 2$ sumas reales $= 768$ sumas.

Esta es una cota superior. En la práctica el número puede ser menor, por lo siguiente:

Si tenemos en cuenta que:

- W_{16}^{0} supone $0P + 0S$ puesto que $W_{16}^{0} = 1$.
- W_{16}^{4} " $0P + 0S$ puesto que $W_{16}^{4} \cdot (a+bj) = -j(a+bj)$ $= b - aj$
- W_{16}^{2} " $2P + 2S$ " $W_{16}^{2}(a+bj) =$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + j\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$
- W_{16}^{6} " " " "
- W_{16}^{3}, W_{16}^{5}, W_{16}^{7} → no permiten ahorro ⇒ $4P + 2S$

Haciendo balance se puede comprobar que el coste total es: $\boxed{28P + 148S}$

Nota: P ≡ productos ; S ≡ sumas.

EJERCICIO 11.1/10.1

a) $F_s = \frac{10\,KHz}{1000} \times 150 = 1'5\,KHz$

b) $F_s = \frac{10\,KHz}{1000} \left|1000 - 800\right| = 2\,KHz.$

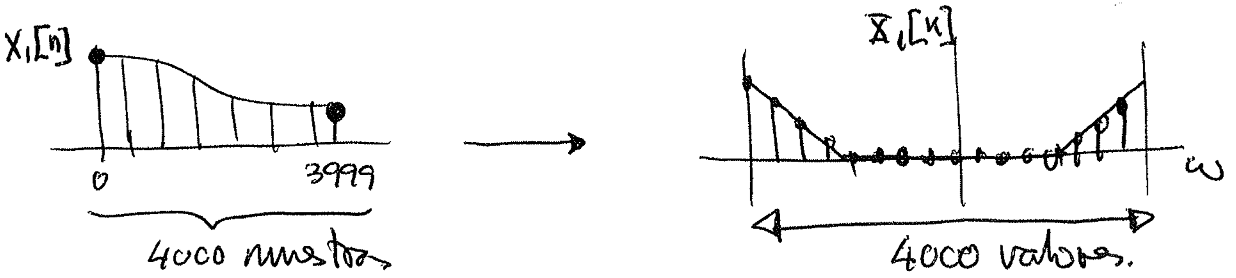
EJERCICIO 11.2/10.2

$10000 < 1/T < 10240 \quad sg^{-1}.$

$N = 2048$

EJERCICIO 11.3 /10.23

Método 1

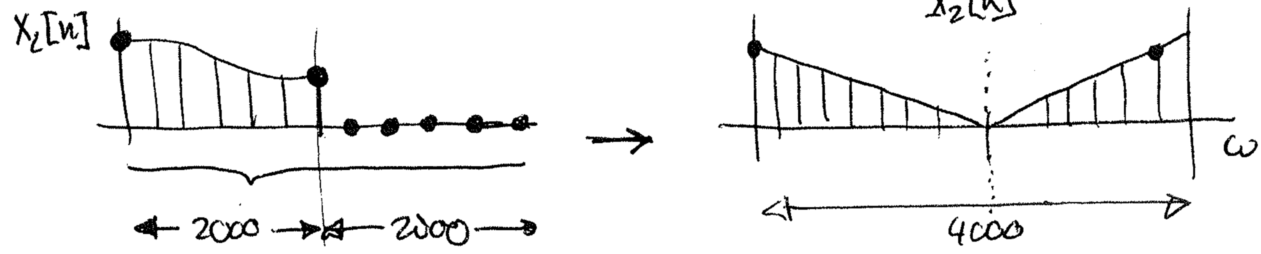


Separació de frecuencias $\rightarrow$ $\frac{F_s}{N} = \frac{40000}{4000} = 10\,Hz.$ $\boxed{\text{NO VALE}}$

$$X_1[k] = \frac{1}{T} X_c\left(j\,\frac{2\pi F_s}{N} k\right) \qquad 0 \leq k \leq 2000$$

$$= \frac{1}{T} X_c\left(j\,2\pi \cdot 10 k\right) \qquad 0 \leq k \leq 2000$$

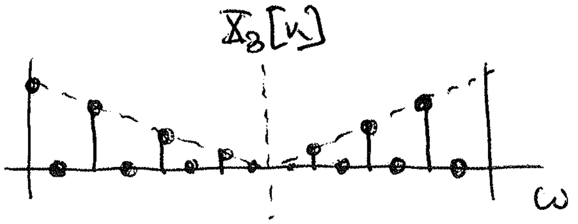
Método 2



Separación de frecuencias $\rightarrow$ $\frac{F_s}{N} = \frac{20000}{4000} = \boxed{5\ Hz}$ $\leftarrow$ VALE

$$\bar{X}_2[k] = \frac{1}{T} X_c\left(j 2\pi \frac{F_s}{N} k\right) = \frac{1}{T} X_c\left(j 2\pi \cdot 5 \cdot k\right) \qquad 0 \leq k \leq 2000$$

Método 3



Separación de frecuencia $\rightarrow$ $\frac{F_s}{N} = 5 Hz$ pero como no tenemos nada para k impar, realmente la separación entre muestras diferentes de cero es el doble $= \boxed{10 Hz}$

NO VALE

$$x_3[n] = x_2[n] + x_1[n-2000]$$

$$\downarrow$$

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\left[1 + e^{-j2000\omega}\right]$$

$$X_3[k] = X_2[k]\left[1 + (-1)^k\right]$$

EJERCICIO 11.11/10.26

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \, TF\{C_v[m]\} = \frac{1}{LU} \, TF\left\{ \sum_{n=0}^{L-1} v[n]\, v[n+m] \right\} =$$

$$= \frac{1}{L\cdot U} \cdot \sum_{n=0}^{L-1} v[n] \, TF\{v[n+m]\} = \frac{1}{LU} \, V(e^{j\omega}) \cdot \sum_{n=0}^{L-1} v[n]\, e^{j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{L\cdot U} \cdot V(e^{j\omega}) \cdot V^{*}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} \, |V(e^{j\omega})|^2$$

EJERCICIO 11.12/10.36

a) $Q = 200000$;

b) $F_s/N < 10\,Hz \rightarrow N > 2000 \rightarrow N = 2048$

c) $K = Q/L = Q/N = 97 + 0'656$

d) Hay que aumentar K por un factor de 10. No se debe modificar ni Fs ni N para que el espaciado de frecuencias no cambie.

Opción 1

Reducir tamaño de bloques por factor 10
⇒ habrá 10 veces más bloques.

A cada bloque se le aplica una DFT_{2048} con "zero-padding"

Inconveniente: se reduce la resolución

Opción 2

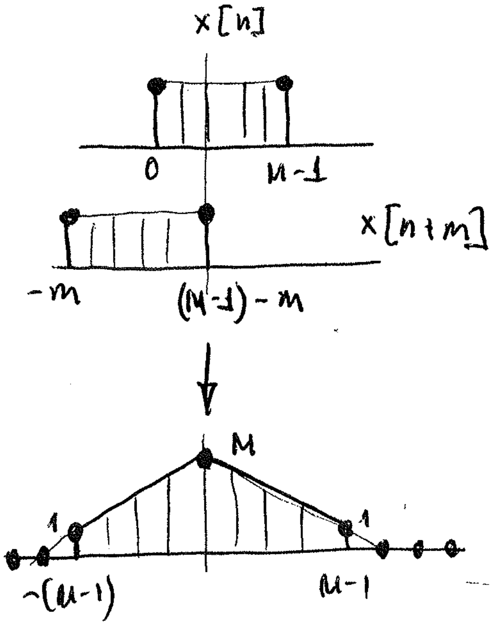
Aumentar el intervalo de observación 10 veces => registro de datos 10 veces mayor => 10 veces más bloques

EJERCICIO 11.16/10.28

a) $x[n] = u[n] - u[n-M]$.

$$C_{xx}[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]\, x[n+m] =$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1-m} 1 = M - m \quad , \; m > 0$$



Por simetría

$$C_{xx}[m] = \begin{cases} M - |m| & |m| \le M-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

b) $TF\{C_{xx}[m]\} = TF\{x[n] * x[-n]\} = |X(e^{j\omega})|^2$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{sen(\omega M/2)}{sen(\omega/2)} e^{-j\omega[M/2 - 2]}$$

Por tanto....

$$W_B(e^{j\omega}) = \left| \frac{sen(\omega M/2)}{sen(\omega/2)} \right|^2$$

40

c) Cualquier ventana que se pueda expresar como autocorrelación de otra, va a tener transformada no negativa.

Procedimiento:

1) Elegir una secuencia $w_1[n] \neq 0 \quad 0 \leq n \leq M-1$

2) Definir la ventana como $w_2[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_1[n] w_1[n+m]$

EJERCICIO 11.20 / 10.41

a) $\phi_{yy}[m] = \sigma_x^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h[k+m]$

b) $P_y(\omega) = \sigma_x^2 \cdot |H(e^{j\omega})|^2 = \sigma_x^2 \cdot \left| \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2$

c) MA ⇒ no polos ⇒ FIR

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

$\phi_{yy}[m]$ es la convolución de 2 secuencias de M-1 puntos: $h[n] * h[-n]$, por tanto valdrá distinto de cero solo en $-M \leq m \leq M$

d) $\phi_{yy}[m] = \sum_{k=0}^{N} A_k \alpha_k^{|m|}$ donde α_k es el polo k-ésimo de $H(z)$ y A_k es una constante

e) $$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n].$$

$$\Phi_{yy}[m] = E\left[y[n+m]\,y[n]\right] = \sum_{k=1}^{N} a_k E\left[y[n+m]\,y[n-k]\right] + E\left[y[n+m]\,x[n]\right]$$

Para $m=0$

$$\Phi_{yy}[0] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[k] + \underbrace{E\left[x(n)\cdot\left(\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x(n)\right)\right]}_{\underbrace{E\left[x^2[n]\right]^2}_{\sigma_x^2}}$$

Para $m \geq 1$ el segundo sumando se anula

$$\Phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \Phi_{yy}[m-k] \qquad m \geq 1.$$

f) Dado que una autocorrelación es una función par, se puede escribir

$$\Phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[|m-k|] \qquad m \geq 1.$$