

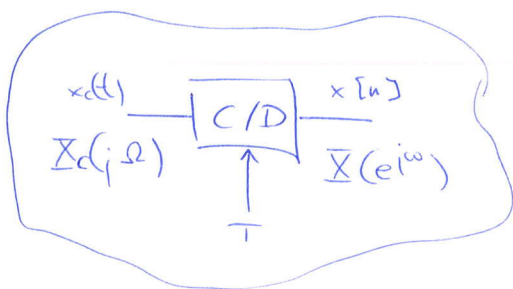
TEMA 1: TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES ANALÓGICAS

- 1.- TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL IDEAL
- 2.- TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL REAL
- 3.- CAMBIO DE LA VELOCIDAD DE MUESTREO

1.- TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL IDEAL

1.1.- CONVERSIÓN IDEAL C/D, D/C $(* 1.1 *)$

- Conversor continuo/discreto ideal:



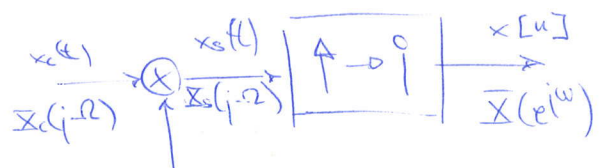
$T \equiv$ intervalo de muestreo (s)

definición en el dominio del tiempo:

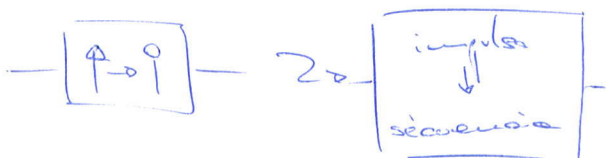
$$x[n] = x_c(n \cdot T)$$

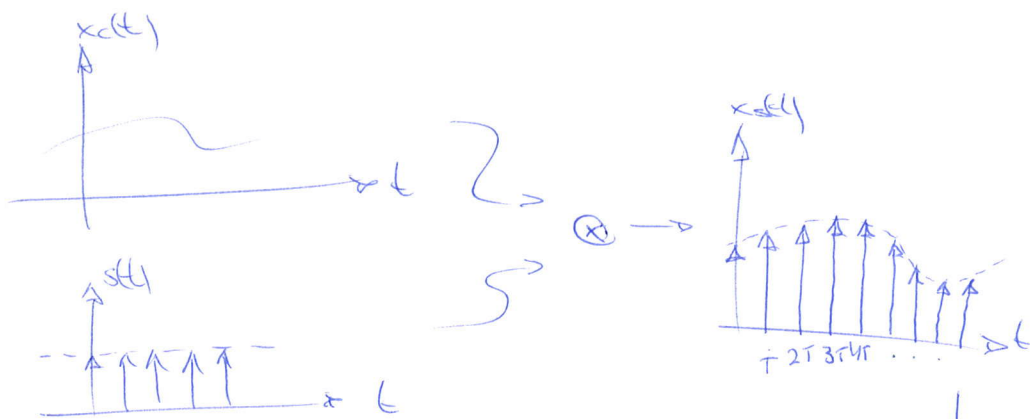
definición en el dominio de la frecuencia:

modelo de comportamiento
equivalente del C/D



$$x_s(t) = \sum_n x[n] \delta(t - nT) \leftarrow \text{tren de impulsos}$$

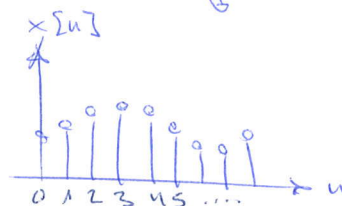
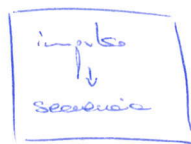




$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t)$$

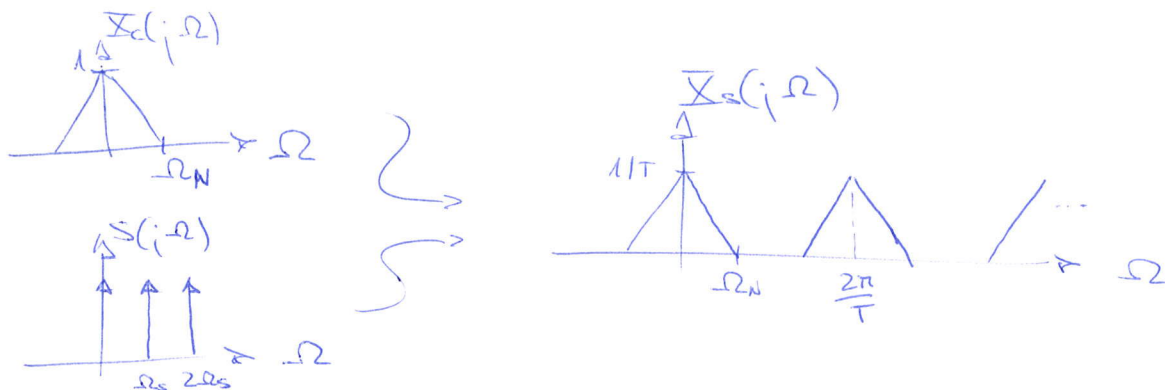
↓ TF

$$\bar{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\bar{X}_c(j\Omega) * S(j\Omega) \right)$$



Como $S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_k \delta(\Omega - \Omega_s k)$, donde $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$:

$$\bar{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k \bar{X}_c(j\Omega - j\frac{2\pi}{T} k)$$



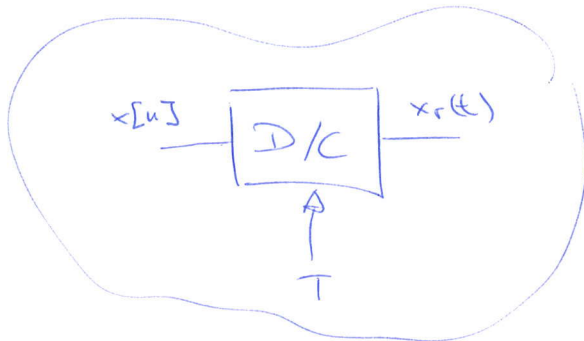
$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) = x_c(t) \sum_n \delta(t - nT) = \sum_n x_c(nT) \delta(t - nT)$$

$$\bar{X}_s(j\Omega) = \sum_n \underbrace{x_c(nT)}_{x[n]} e^{-j\Omega nT} = \bar{X}(e^{j\Omega T}) \quad \omega = \Omega T$$

$$\bar{X}(e^{j\omega}) = \bar{X}_s(j\frac{\omega}{T}) \Rightarrow \boxed{\bar{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k \bar{X}_c(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T} k)}$$

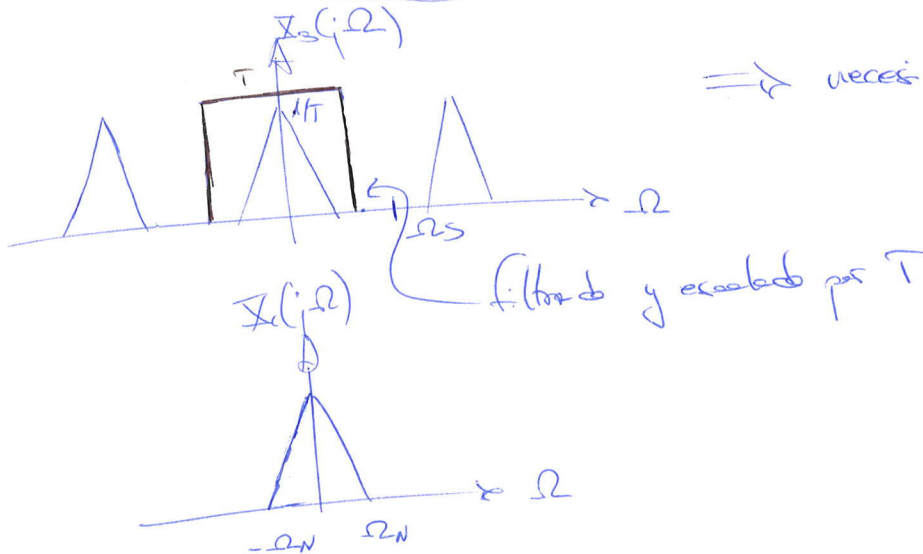
NgTA: $x\left(\frac{t-a}{T}\right)$ $\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ escalar } T \\ 2^\circ \text{ desplazar } a \end{array} \right.$ $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ desplazar } \frac{a}{T} \\ 2^\circ \text{ escalar } T \end{array} \right.$

- Convertidor discreto/continuo ideal:



recuperar $x(t)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ x[n] \rightarrow x_s(t) \text{ (escalado)} \\ 2^\circ x_s(t) \rightarrow x_c(t) \text{ (filtro paso bajo)} \end{array} \right.$$



$\Rightarrow$ necesidad de evitar aliasing

La única forma de no tener aliasing es evitarlo al muestrear.

Si la señal tiene aliasing, no se puede quitar.

En el dibujo, $\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N \Rightarrow$ criterio de Nyquist:

$$\boxed{\Omega_s \geq 2 \Omega_N}$$

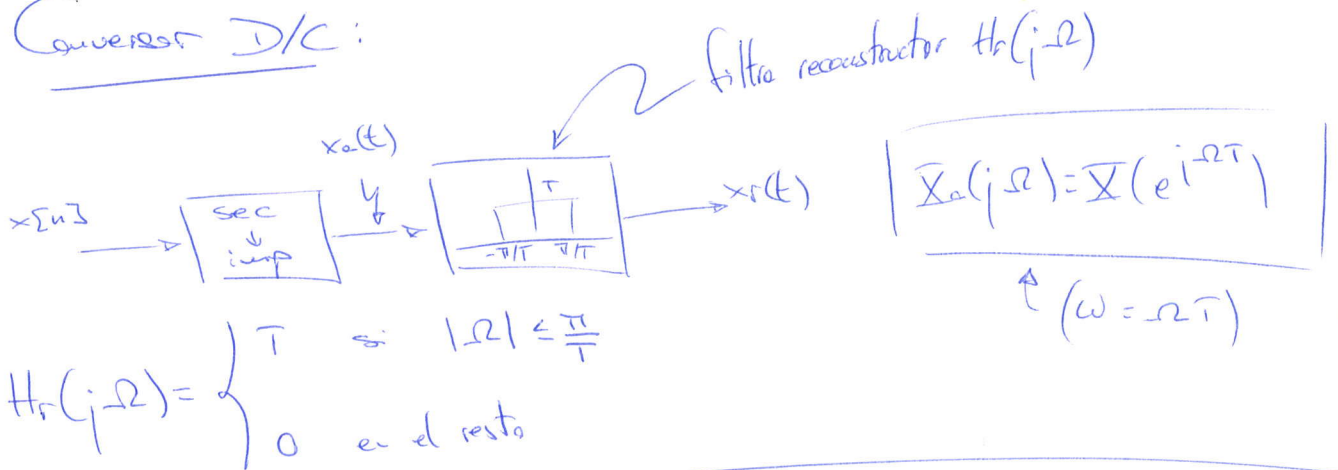
$\Rightarrow$ las señales continuas deben ser limitadas en banda

Si λ este, la se\u0219al discret\u0103 este

$$\mathcal{F}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \mathcal{X}_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| \leq \pi \quad \text{periodic}$$

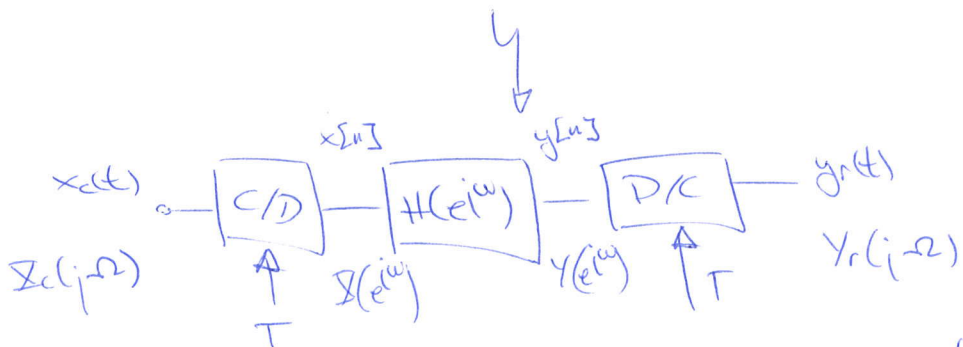
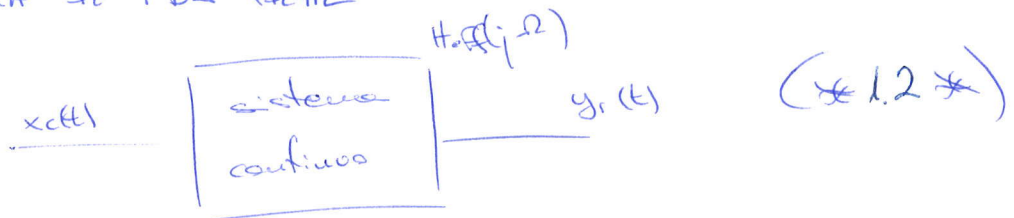
$$\left(|\Omega| \leq \pi/T\right)$$

Converter D/C:



$$X(j\Omega) \leftrightarrow X_r(j\Omega) \quad \Rightarrow \quad X_r(j\Omega) = \begin{cases} T \cdot X(e^{j\Omega T}) & \text{si } |\Omega| \leq \pi/T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1.2.- SISTEMA DE TDS DE AL



Objetivo: dadas las especificaciones del sistema continuo, hallar el discreto.

Considerando el empalme de cada uno de los bloques,
¿cómo se comporta el sistema completo?

$$\rightarrow \frac{y_d(t)}{x_d(t)} ?$$

- Análisis:

- C/D, D/C: T iguales y sincronizados

- Sistema discreto LTI: caracterizado por

$$h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$$

$$\bar{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k \bar{x}_c \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \bar{X}(e^{j\omega})$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T})$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & \text{banda de paso} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$\boxed{Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \cdot \frac{1}{T} \sum_k \bar{x}_c \left(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right)}$$

Suposiciones:

• $H_r(j\Omega)$ ideal $\rightarrow H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

• no hay aliasing en el muestreo:

$$\Rightarrow \bar{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \bar{x}_c \left(j\frac{\omega}{T} \right) \quad |\omega| < \pi$$

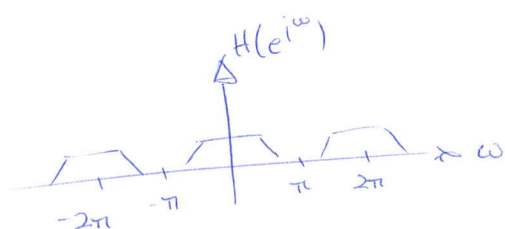
En este caso, se puede demostrar que queda:

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) \cdot X_c(j\Omega) & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

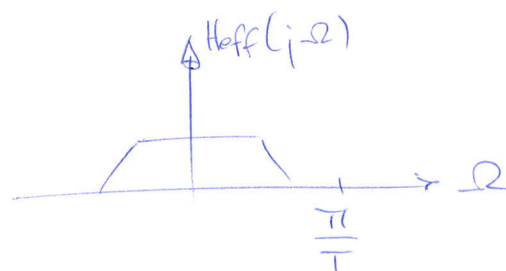
$$\Rightarrow Y_r(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega) X_c(j\Omega)$$

$$\Rightarrow H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El sistema se comporta como un sistema LTI $\rightarrow H_{\text{eff}}(j\Omega)$

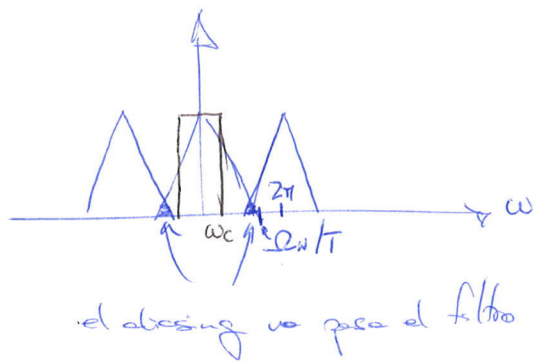


$\Rightarrow$



La respuesta global de un sistema discreto siempre es pas bajo, y que siempre hay un reconstructor a la salida.

Incluso habiendo aliasing, puede ocurrir que el sistema se comporte de la misma forma si el filtro discreto elimina el aliasing.

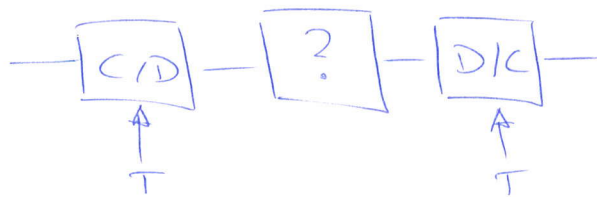


⇒ se puede bajar la superficie de que va hay aliasing:

$$\Omega_N T < 2\pi - \omega_c$$

$$\Omega_S > \Omega_N + \Omega_c$$

- Síntesis:



queremos obtener un sistema LTI con respuesta $H_c(j\Omega)$:

- Señal f_s
- Diseñar $h[n] / H(e^{j\omega})$

Se parte de $H_c(j\Omega)$ pero bajo en frecuencia de corte Ω_c
 → $f_s \geq 2\Omega_c$
 → señal de entrada limitada en banda (Ω_N)

Hay 2 pasos:

1.- Domínio de la frecuencia: $H(e^{j\omega})$ será la versión escalada en frecuencia de $H_c(j\Omega)$ y periódica:

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T}) \quad |\omega| \leq \pi$$

T se elige de forma que no hay aliasing.

2. Domínio del tiempo; conociendo $h_c(t)$:

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{T} \cdot h_c(n \cdot T)} \quad \text{(propiedad de invariancia de la respuesta al impulso)}$$

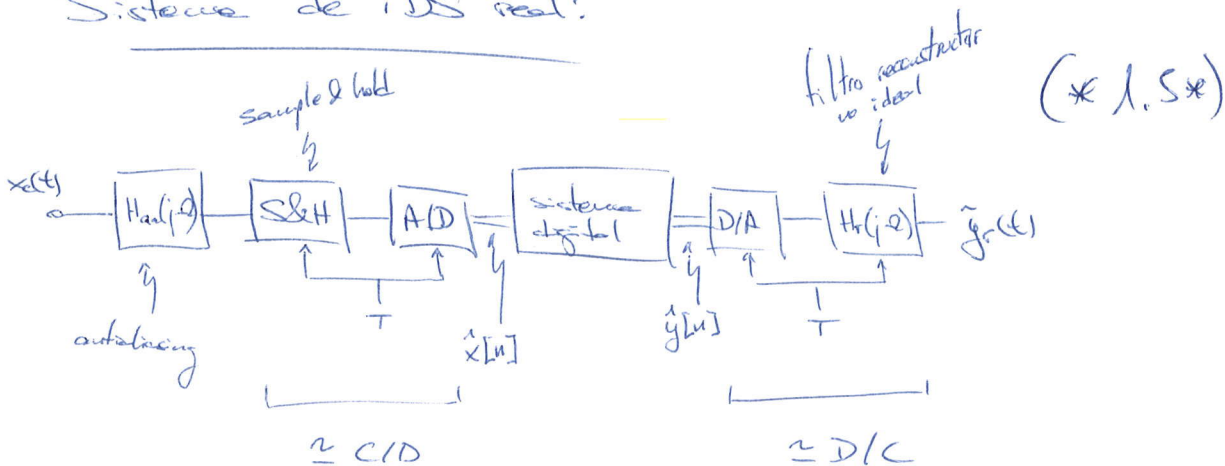
$\Rightarrow h[n]$ es la respuesta $h_c(t)$ muestreada con periodo T

2.- TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL REAL

Partimos de las siguientes hipótesis:

- señales limitadas o ilimitadas en banda
- filtros no ideales
- conversores C/D y D/C no ideales
- precisión finita (cuantificación e instante de muestreo)

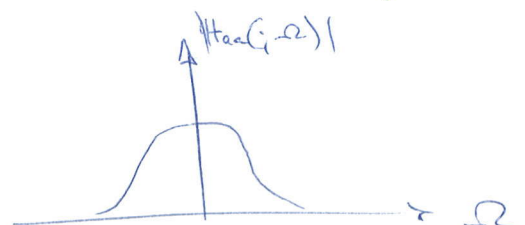
Sistema de TDS real:



a) Filtro anti-aliasing:

Señal de entrada limitada en banda $\Rightarrow$ imposible muestrear a f_c infinita
Solución: reducir la banda de interés $\Rightarrow$ filtro paso bajo, ω_c

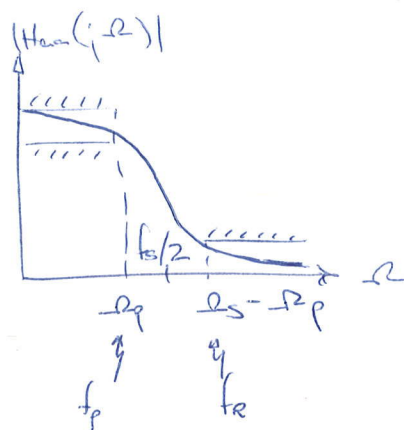
$$\Rightarrow H_{aa}(j\Omega)$$



También si la señal es limitada en banda pero llega hasta frecuencias altas, se puede usar filtro antialiasing para reducir f_s .

Se consigue reducir f_s , para luego simplificar el sistema de procesamiento digital, al haber menos muestras / s para procesar $\Rightarrow$ menor coste computacional.

Al ser un filtro en tiempo continuo, no puede ser perfectamente ideal.



el límite de la banda de rechazo no tiene por qué ser $\Omega_s/2$

El objetivo del filtro antialiasing es que en la banda de paso no haya distorsión (multiplicativa) y que se añada poca interferencia (aditiva).

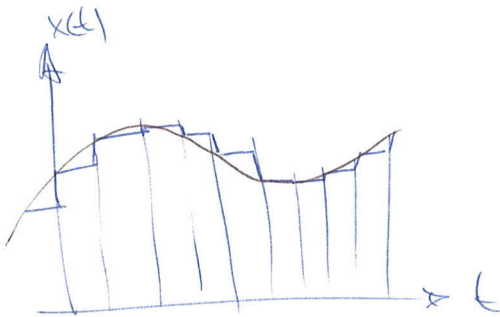
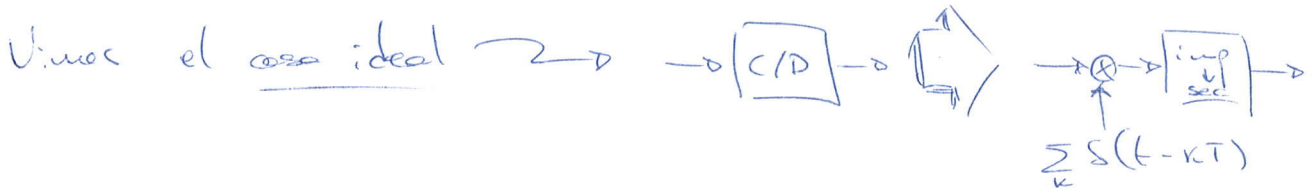
$\Omega_s - \Omega_p$ es la frecuencia que asegura cierta atenuación.

Cuanto más suave sea la zona de transición, menor el orden del filtro antialiasing necesario. Interesa que Ω_p sea bastante menor de $\Omega_s/2 \Rightarrow$ sobremuestreo

Además $\left\{ \begin{array}{l} \text{suavidad del filtro antialiasing} \Rightarrow f_s \uparrow \\ \text{suavidad del bloque digital} \Rightarrow f_s \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Compromiso para } f_s$

Si $f \uparrow \uparrow$, puede no ser necesario el filtro antialiasing.

b) Conversion C/D:

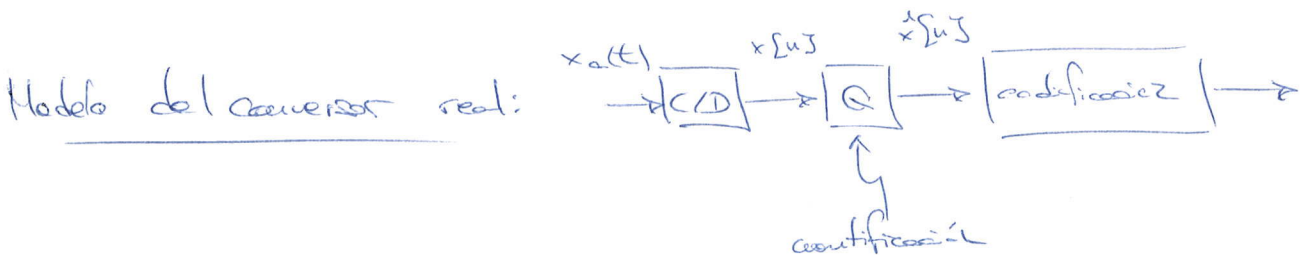


el S&H mantiene el valor de la muestra en cada periodo para facilitar el trabajo al comerciante AID

A/D = a valor de feuzoz - a u bano

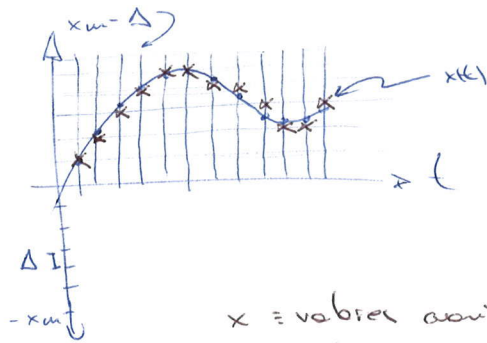
Parámetros del A/D:

- tiempo de conversión: finto, obliga a usar S&H
- precisión: cuantificación del valor continuo correspondiente
 $\Rightarrow$ n bits de resolución



Quantificação:

$$\hat{x}[n] = Q\{x[n]\}$$



x = valores amostrados
 $\bullet$ = valores originais

x_m = limite de escala: valor máximo de entrada que pode ser amostrado

Δ = passo de quantificação: o escalor

N = número de níveis

Interessa a potência de 2 e que 0 seja um nível

$$\Rightarrow \text{intervalo } [x_m - \Delta, -x_m]$$

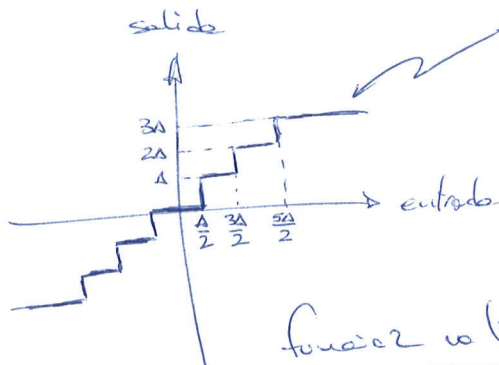
(ou nível menor para os positivos)

$$\Delta = \frac{x_m}{N/2}$$

$$N = 2^b \quad b = \text{bits de resolução}$$

$$\Delta = \frac{x_m}{2^{b-1}}$$

Releação E/S:

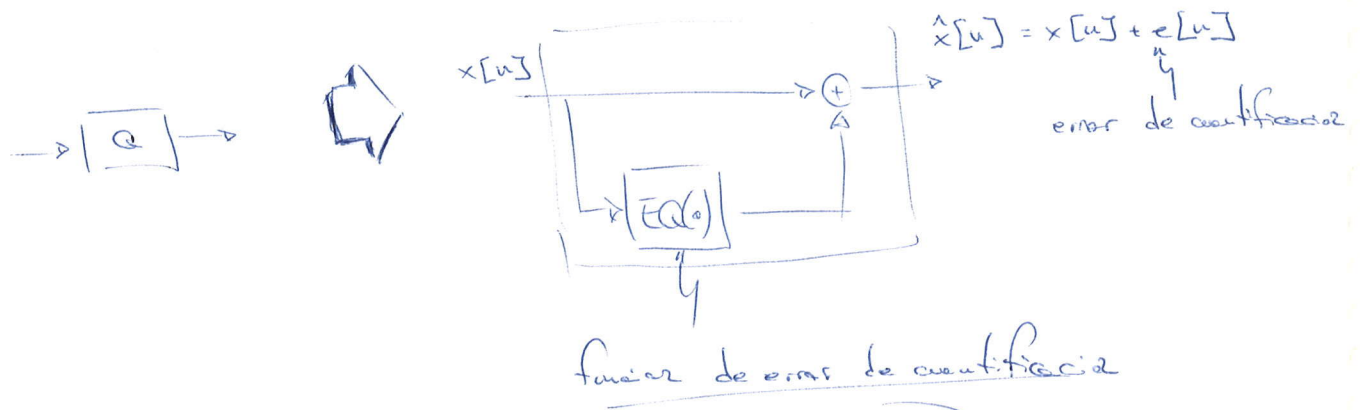


se entrada $\geq x_m (x_m - \Delta) \rightarrow$ saturação do quantificador
 se entrada $\leq -x_m$ também

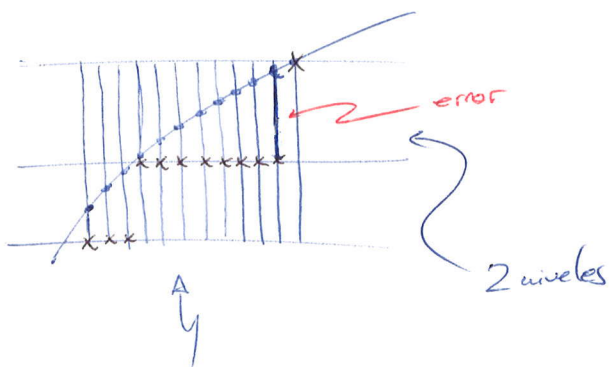
($\Rightarrow$ ENG: "clipping")

função não linear: não tem $h[n]$, etc,...

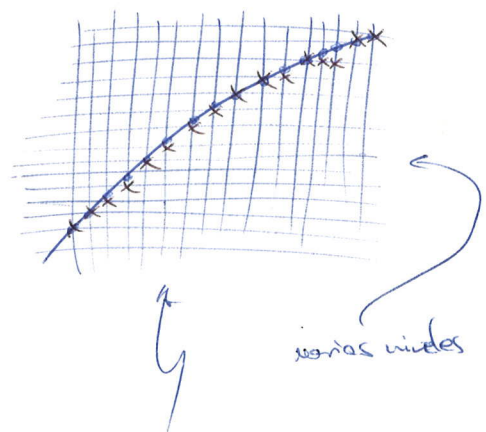
Modelo del cuantificador:



estudio del error: Suponiendo que el número de niveles del conversor es grande ($N \uparrow$), de forma que entre dos muestras consecutivas hay varios saltos de nivel.



el error "se acumula", o depende de valores anteriores



el error es independiente para cada muestra

3.º este supuesto:

1.º $e[n]$ y $e[n+1]$ son independientes (o tienden a ello)

→ incorrelados

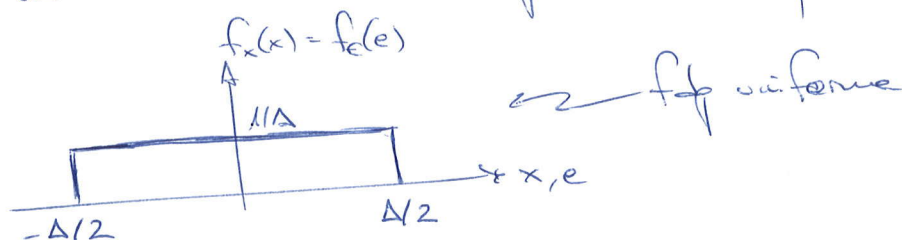
2.º Señal y error tienden a independizarse → incorrelados también

$e[n] \xrightarrow{NA} \underline{\text{señal blanca}} \Rightarrow$ podemos estudiarlo por procesos estocásticos

→ señal aleatoria: "ruido de cuantificación", ruido blanco

3.º Como señal aleatoria, su valor en cada instante es una variable aleatoria

De esta variable aleatoria, la f.d.p. será: (para resubidas)



media: $\bar{e} = \overline{e[n]} = 0$ ← señal estacionaria

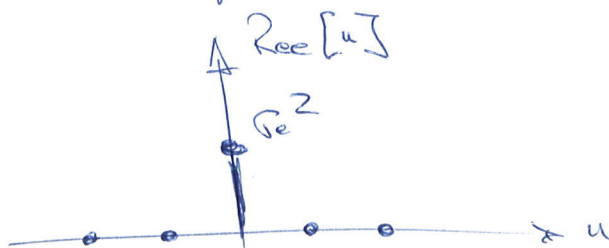
"potencia" = varianza = $\left| \sigma_e^2 = \overline{e^2} = (\dots) = \frac{\Delta^2}{12} \right|$

si media = 0

(varianza = valor cuadrático)

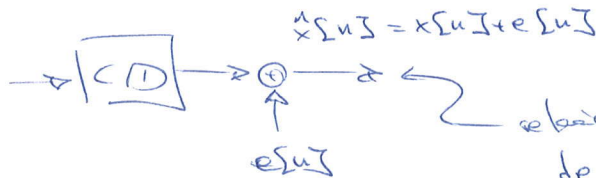
Ruido incorrelado, media 0 ⇒ muestras ortogonales

Autocorrelación



Señal de error: ruido blanco uniforme, independiente de la señal.

→ modelo del conversor C/D:



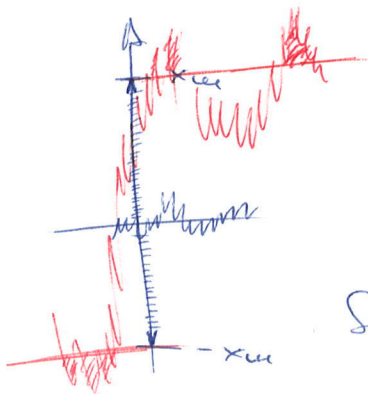
el nivel SNR a la salida debido al número de bits de resolución

$$SNR = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} ; \Delta = \frac{x_{\max}}{2^{b-1}} \quad \begin{matrix} b = n \text{ bits} \\ B = b - 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{12 \cdot 2^{2B}} \Rightarrow \boxed{SNR = 10,8 + 6,02B - 20 \log \frac{x_{\max}}{\sigma_x}}$$

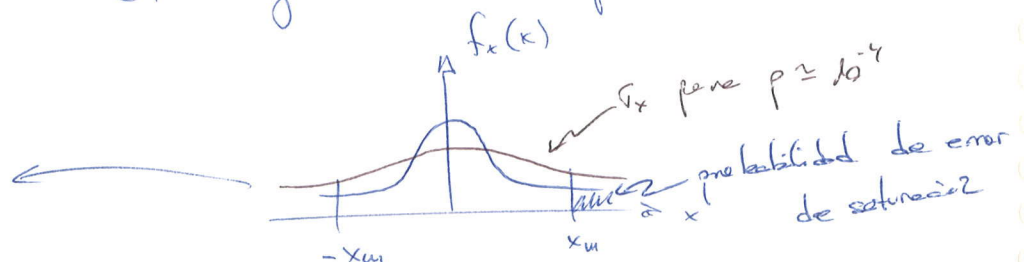
fuera de escala:



Si $x_{\max} \gg \sigma_x \rightarrow$ se desaprovechan muchos niveles $\Rightarrow$ SNR bt

Si $x_{\max} \ll \sigma_x \rightarrow$ se satura el conversor $\Rightarrow$ errores muy grandes

Si $x(t)$ es gaussiana, la fdp de sus variables será:



Si $p_{\text{error}} \approx 10^{-4}$: σ_x concreto en (correctamente es $6 \cdot 10^{-4}$)

relación usual:

$$\frac{x_{\max}}{\sigma_x} \approx 4$$

$$\left(\sigma_x < \frac{x_{\max}}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \text{y entonces: } \boxed{SNR = 6B - 1,2 \text{ (dB)}}$$

ejemplo: calidad voz telefónica $\sim 40\text{dB}$

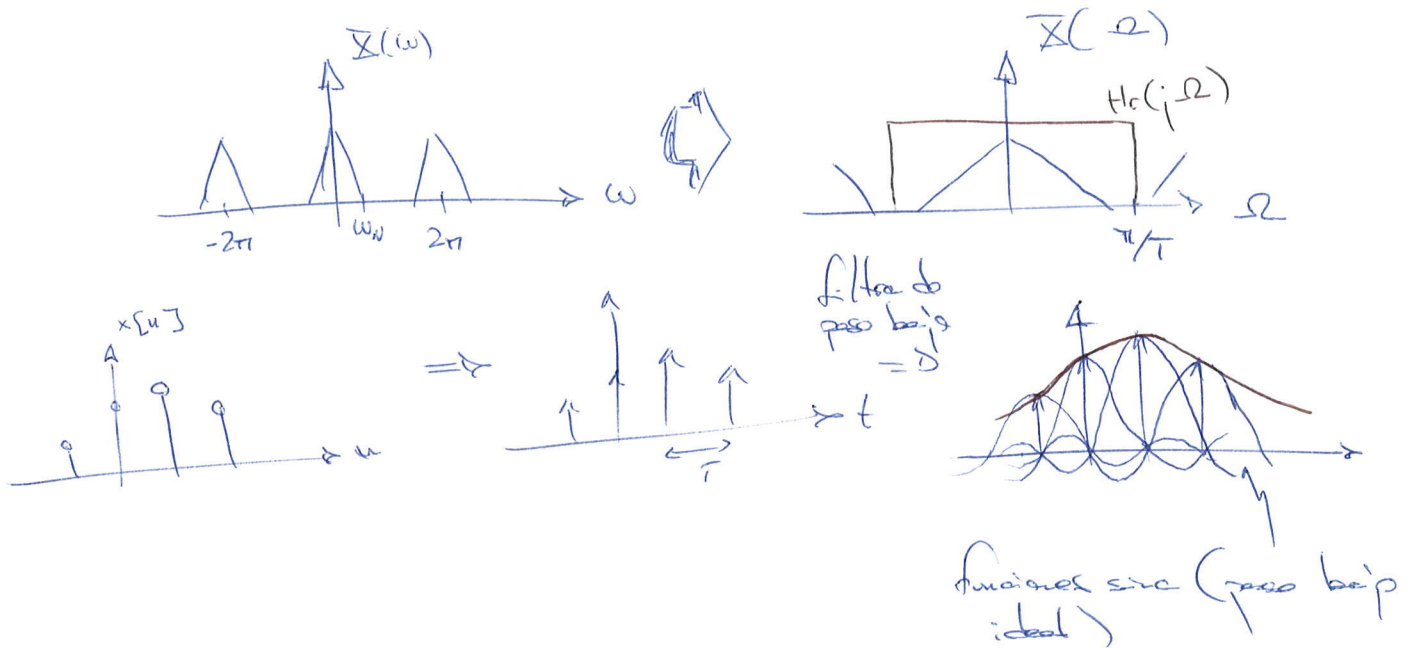
$\Rightarrow$ sustituyendo, $B=7 \rightarrow b=8$ bits

calidad audio CD $\sim 90\text{dB}$

$\Rightarrow B=15 \rightarrow b=16$ bits

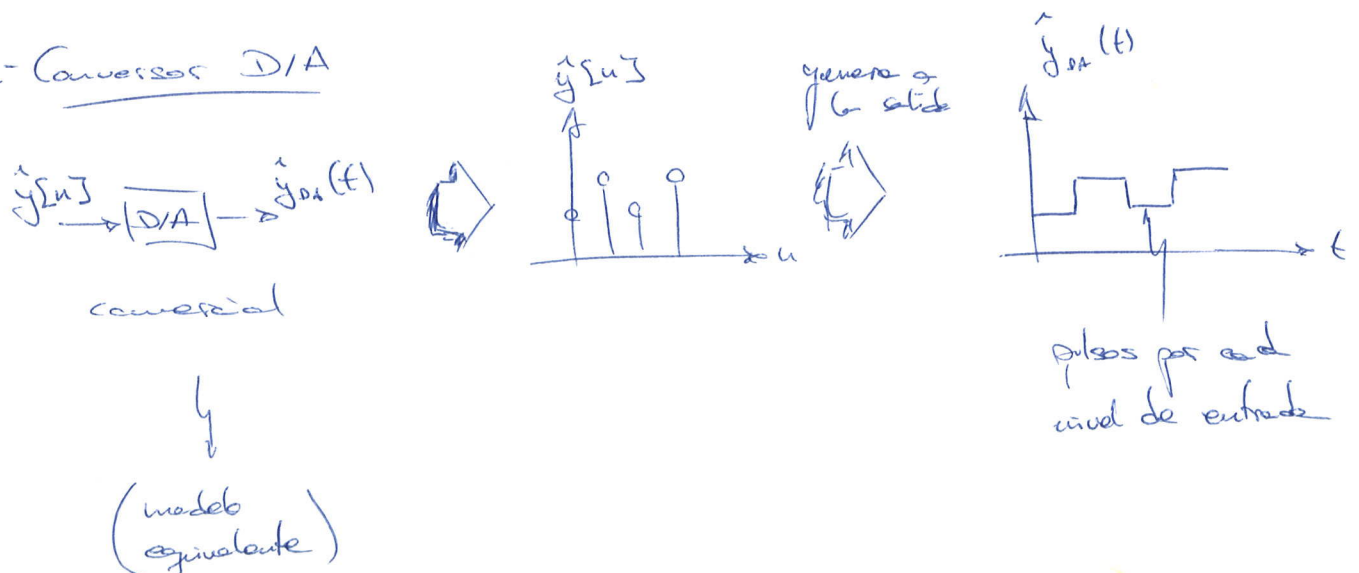
c) Conversion D/A:

Caso ideal: $\boxed{D/C} \rightarrow \boxed{\text{sec} \downarrow \text{imp}} \rightarrow \boxed{H_r(j\Omega)}$

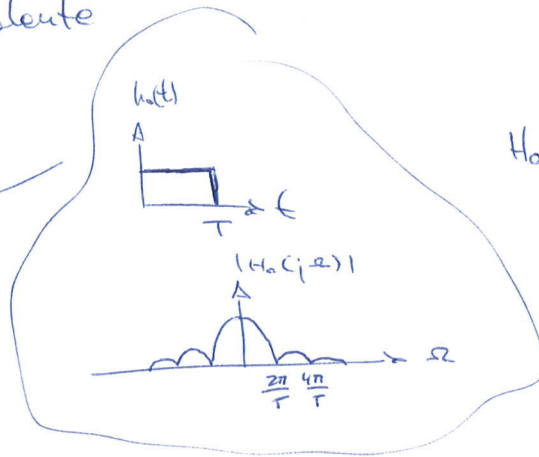
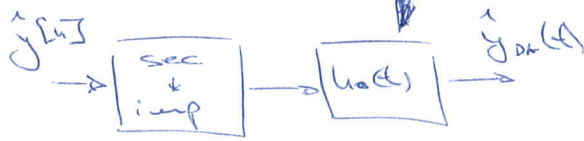


Caso real:

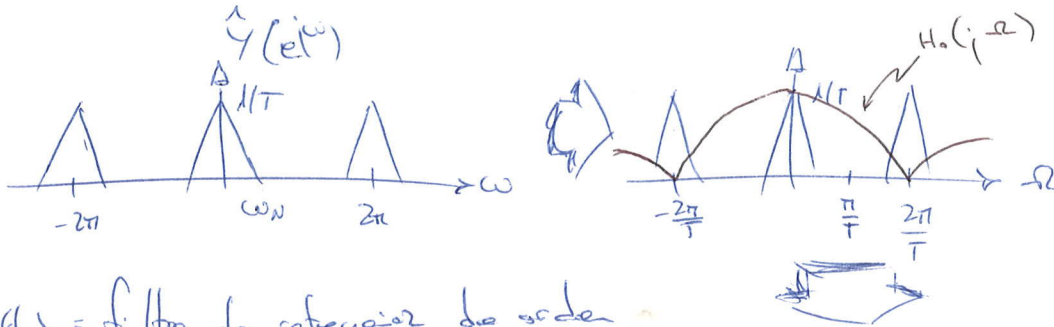
1.- Conversion D/A



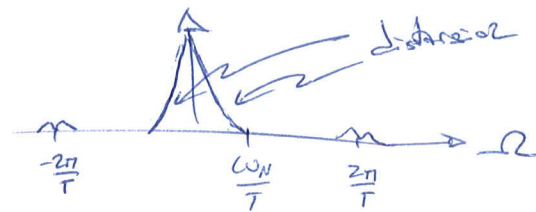
modelo equivalente



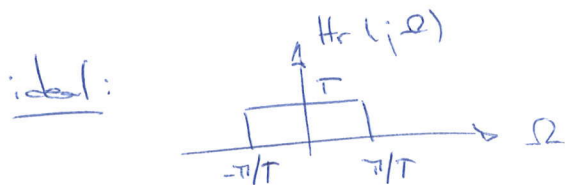
$$H_0(j\Omega) = T \frac{\sin \Omega T/2}{\Omega T/2}$$



$h_0(t)$ = filtro de retención de orden cero. Forma parte inherente del conversor D/A. El filtro reconstructor posterior y tiene parte del trabajo hecho

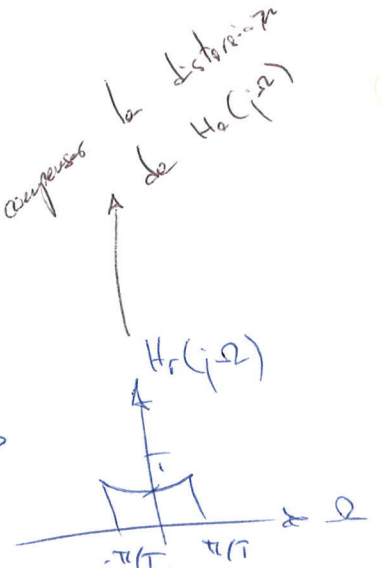


2) Filtro reconstructor:



real: debemos buscar algo próximo a 2

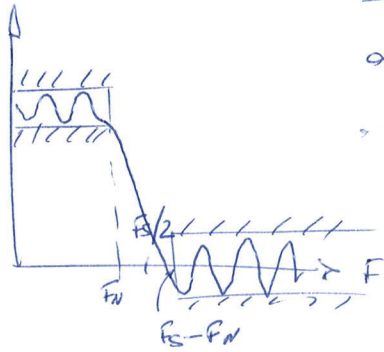
en la práctica, no podemos hacer ese filtro.



intentamos eliminar las réplicas (objetivo prioritario)

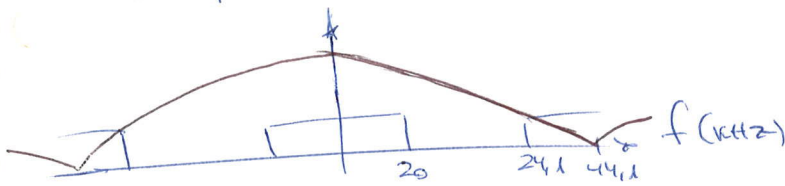
lo de adelantar la banda de paso no es tan crítico, pues se puede hacer en el procesamiento digital.

Especificaciones del filtro:



- Se observa que el submuestreo ($F_s \uparrow \uparrow$) ayuda a conseguir un filtro menor complejo.
- Caso límite: $F_s = 2F_N \Rightarrow$ filtro irrealizable.
- Debemos tener en cuenta que la banda de rechazo y la sub-atenuación en parte por el filtro de retención de orden cero.

Ejemplo: señal de CD. Valores típicos: $F_N = 20 \text{ kHz}$, $F_s = 44,1 \text{ kHz}$



atenuación debida a $H_0(j\omega)$ en $f = F_N$

$$f = F_s - F_N$$

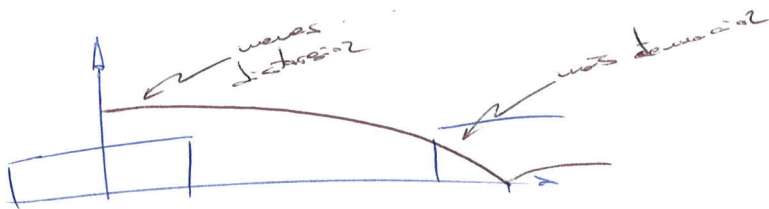
$$\alpha_0(F_N) = 3,2 \text{ dB}$$

$$\alpha_0(F_s - F_N) = 4,8 \text{ dB}$$

$\alpha_0(F_s - F_N)$ permite "relajar" las especificaciones del filtro reconstructor.

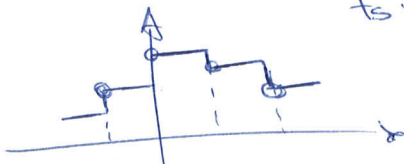
$\therefore$ experimentamos ahora $F_s = 176,4 \text{ kHz} \Rightarrow \alpha_0(F_N) = 9,2 \text{ dB}$ (caso sin distorsión)

$$\alpha_0(F_s - F_N) = 18 \text{ dB} \text{ (bastante atenuación)}$$



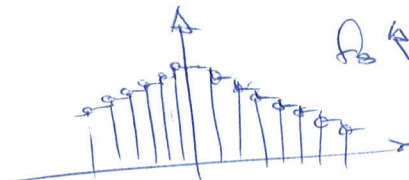
Caso límite: puede no ser necesario usar filtro reconstructor si $F_s \rightarrow \infty$

en el tiempo:



$F_s \downarrow$

VS

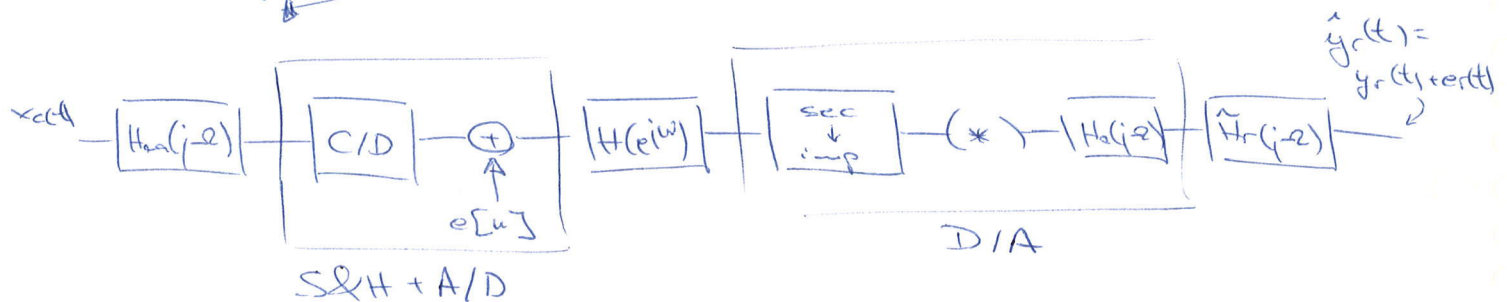


$F_s \uparrow$

otra vez: como es filtro antialiasing, mucho mejor si
 $f_s \uparrow \Rightarrow$ compromiso en procesamiento digital $\rightarrow$ de b

e) Sistema completo:

modelo completo



Sistema $H_{eff}(j\Omega)$ equivalente (sistema continuo equivalente).

Solo tiene sentido si el sistema completo es lineal (LTI)

Suposiciones:

1.- Ausencia de aliasing: filtro antialiasing, $H_{aa}(j\Omega) = 0$
 para $|\Omega| \geq \pi/T$

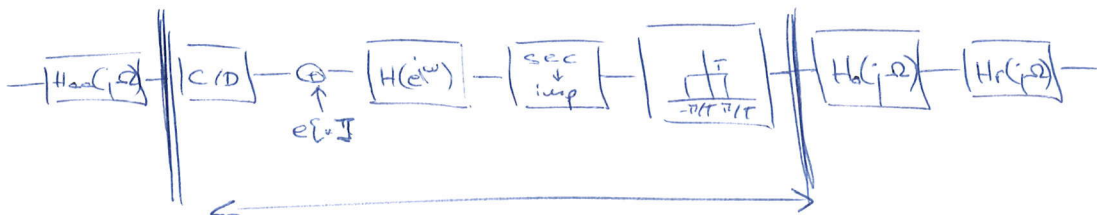
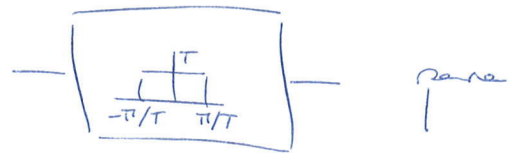
2.- Ausencia de réplicas: filtro reconstructor, $H_r(j\Omega) = 0$
 para $|\Omega| \geq \pi/T$

(réplicas debidas a la conversión D/A con $H_o(j\Omega)$)

$$\Rightarrow H_o(j\Omega) \cdot H_r(j\Omega) = 0 \text{ para } |\Omega| \geq \pi/T$$

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega) \cdot X_c(j\Omega)$$

Si en (*) paramos $\Rightarrow$
representar la superficie 2:



← sistema TDS ideal:

$$Y_r(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) H_b(j\Omega) \tilde{H}_r(j\Omega) \tilde{X}_c(j\Omega)$$

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega) \tilde{X}_c(j\Omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) \cdot H_{aa}(j\Omega) \cdot H_b(j\Omega) \cdot \tilde{H}_r(j\Omega)}$$

↑
las no idealidades de H_{aa} , H_b y $\tilde{H}_r$ se pueden compensar en el filtro digital

Ruido:

(begin { repaso señales 2 }

$\begin{matrix} a_k \\ \updownarrow \\ \text{---} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{D/C}} \rightarrow \boxed{h(t)=\delta(t)} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k p(t-kT) \leftarrow \text{código de línea}$

densidad espectral de potencia de $y(t)$:

$$S(\Omega) = \frac{1}{T} |P(j\Omega)|^2 \sum_k R_{aa}[k] e^{-j\Omega kT}$$

$$= \frac{1}{T} |P(j\Omega)|^2 S_{aa}(\omega) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

(end { repaso señales 2 }



↑
densidad espectral de potencia de ruido

$$P_e(-\Omega) = \frac{1}{T} |H_0(j-\Omega) H_c(j-\Omega)|^2 S_e(\omega) \Big|_{\omega = \Omega T}$$

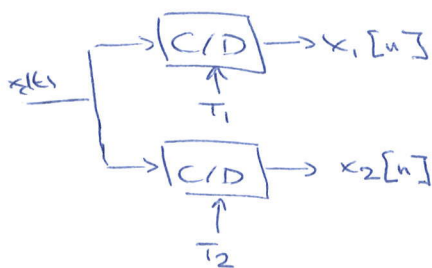
$e[n] \rightarrow$

$$S_e(\omega) = \sigma_e^2 \rightarrow S_e(\omega) = \sigma_e^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_e(-\Omega) = \frac{1}{T} |H_0(j-\Omega) \cdot H_c(j-\Omega)|^2 |H(e^{j\Omega T})|^2 \sigma_e^2}$$

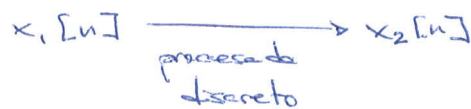
(Gran dice que no se va a usar)

3.- CAMBIO DE LA VELOCIDAD DE MUESTREO

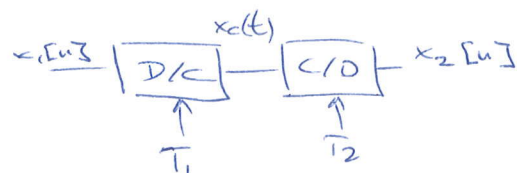


T_1, T_2 suficientes para que no haya aliasing

Se puede conseguir $x_1[n] = x_2[n]$ con $T_1 \neq T_2$



Solución trivial para obtener x_2 a partir de x_1 :



Se puede hacer sin pasar por el mundo continuo:

- cambio de velocidad

- relación entera: $T_1 = k T_2$

3.1.- INTERPOLACIÓN

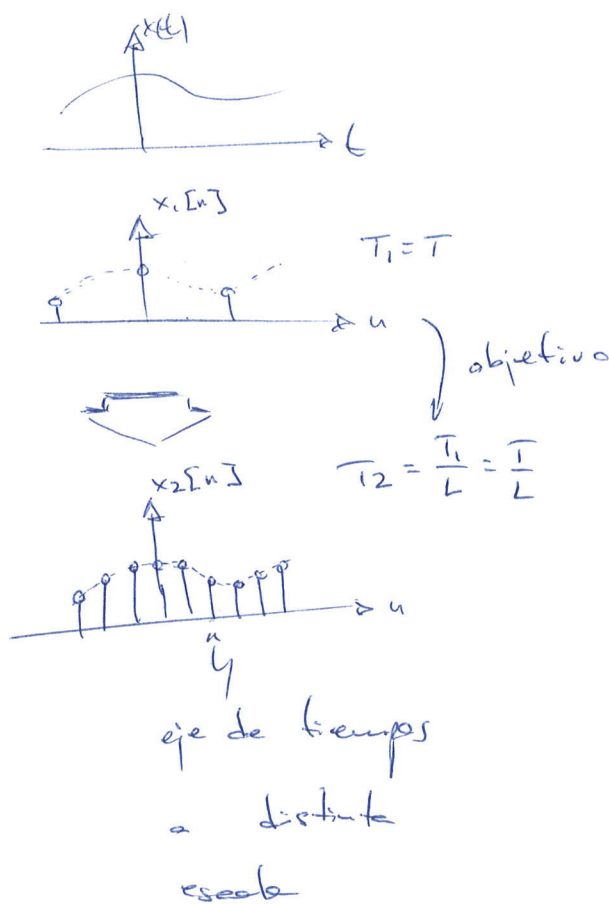
(* 1.6 *)

- Aumento de velocidad: $\rightarrow$ aumenta la velocidad (o tasa) efectiva de muestreo, no de la señal

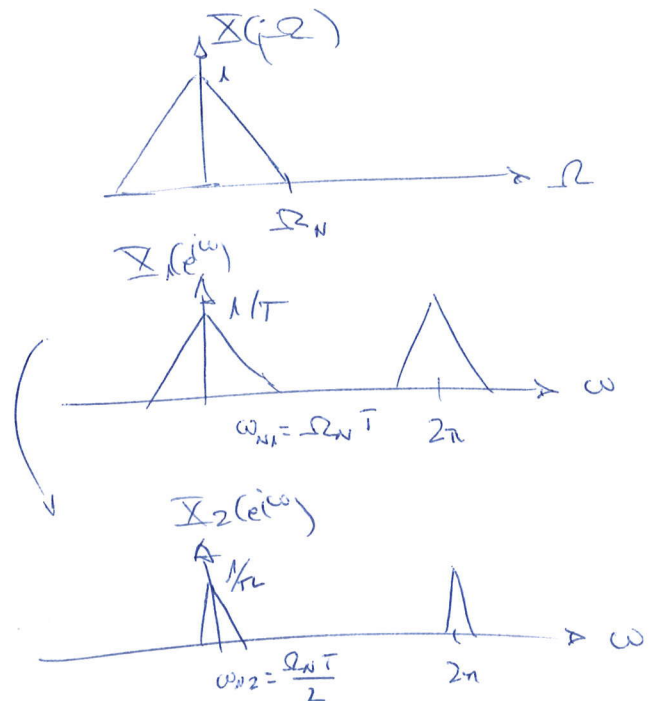
$$T_2 = \frac{T_1}{L} \quad \text{"interpolación por } L"$$

- Condición: que f_1 cumpla el criterio de Nyquist.

en el tiempo:



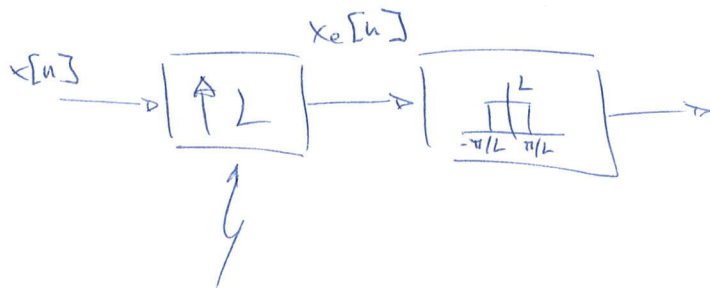
en la frecuencia:



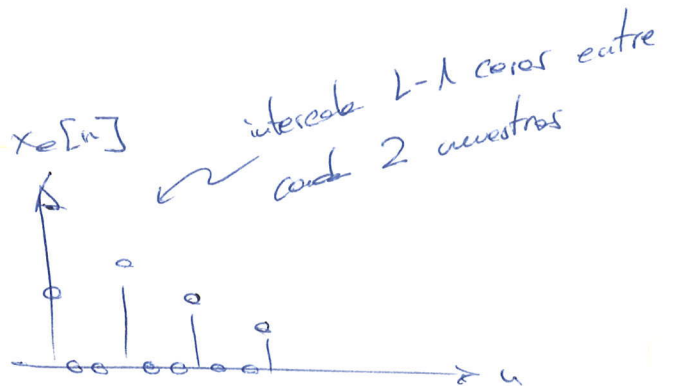
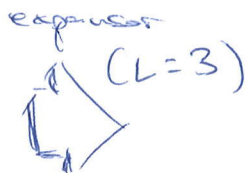
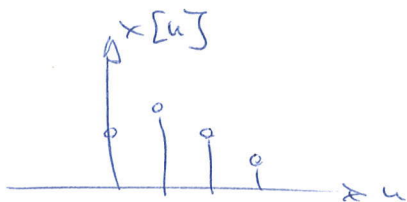
En el tiempo es difícil asegurar que se pueda interpolar $x_1[n]$, pero en la frecuencia parece factible.

¿Cómo hacerlo? $\rightarrow$ mediante señal expandida

Sistema para interpolación:

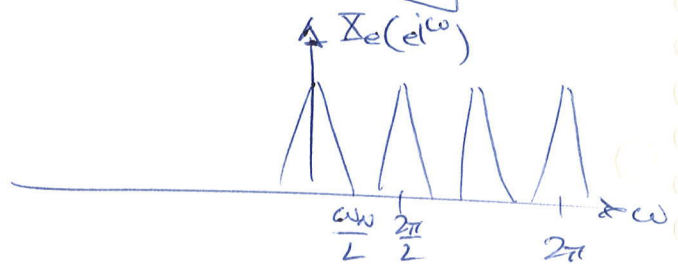
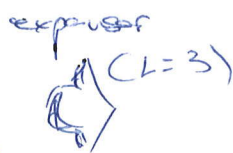
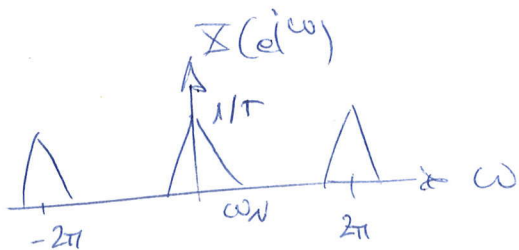


expansor



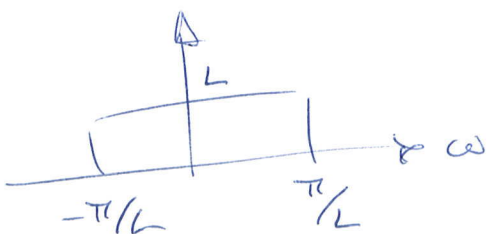
$$x_e[n] = \sum_k x[k] \delta[n - kL] \xrightarrow{\mathcal{F}} X_e(e^{j\omega}) = \sum_k x[k] e^{-j\omega kL}$$

$$X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$



=> Compresión del eje de frecuencias

=> posteriormente, filtro pas bajo: ideal en $\frac{\pi}{L}$ y amplificación L .



=>



En el dominio z : $X_e(z) = X(z^L)$

Ojo: filtros ideales $\Rightarrow$ esto no es 100% as

3.2.- DIEZMADO (* 1.7*)

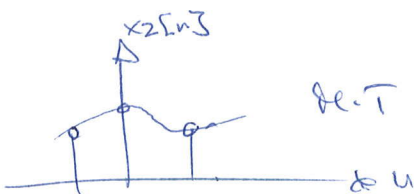
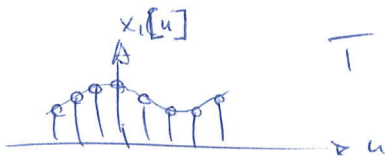
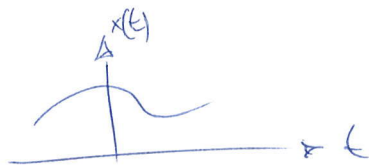
- Reducción de velocidad:

$$T_2 = M \cdot T_1 = \text{"diezmado por } M"$$

- No se debe provocar aliasing al diezmado:

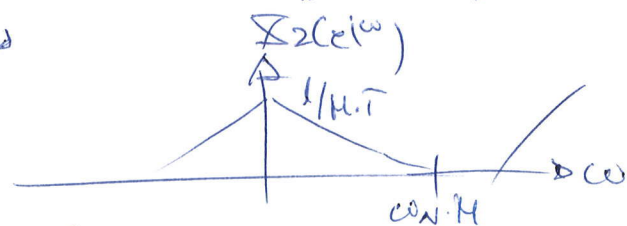
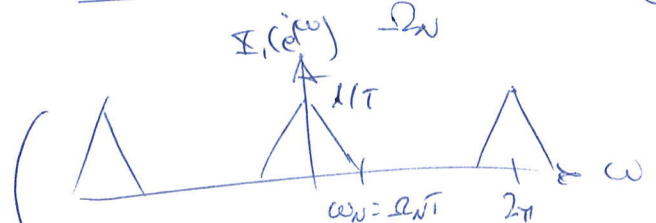
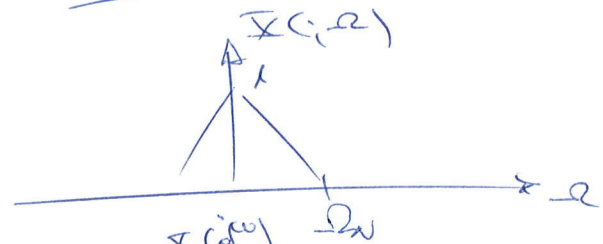
$$\boxed{\omega_N \cdot M < \pi \Rightarrow f > 2 \omega_N M}$$

en el tiempo:



objetivo

en la frecuencia:

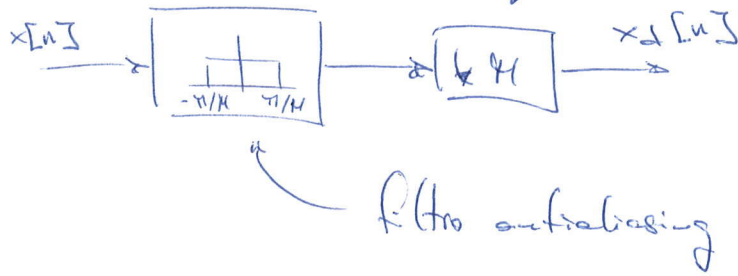


expansión del eje de frecuencias + otras

(2π se queda en 2π)

Sistema por decimado:

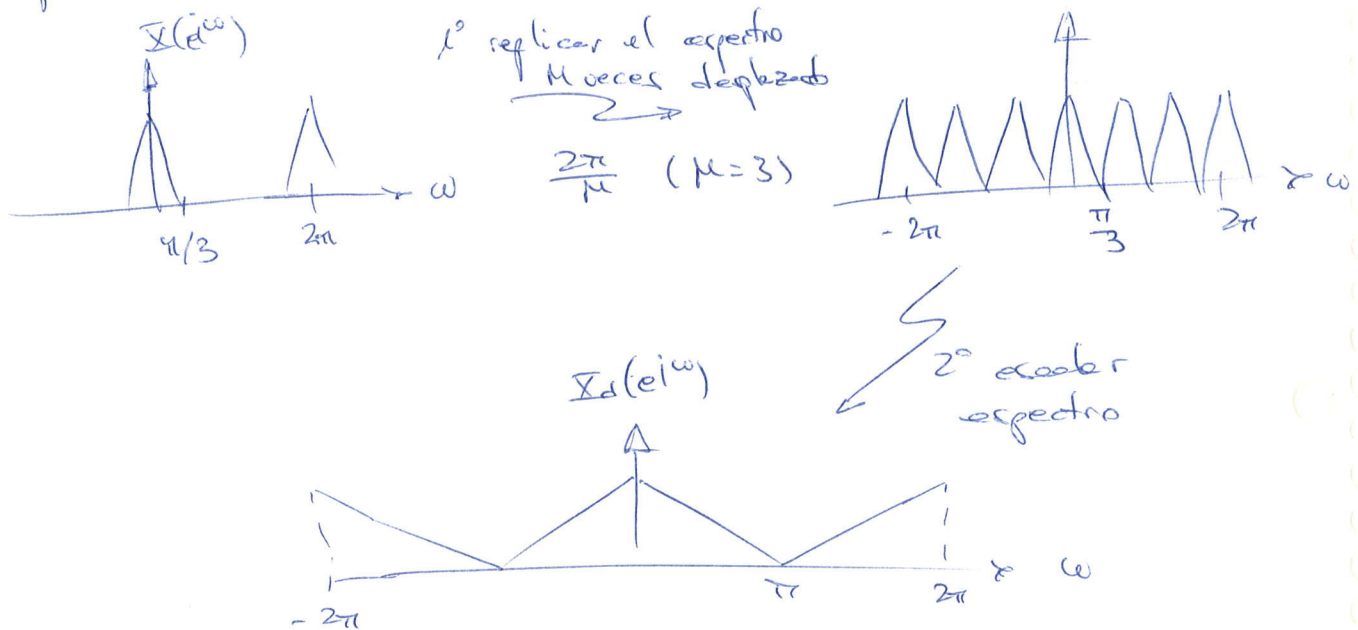
Decimado: toma 1 muestra de cada M muestras de la entrada



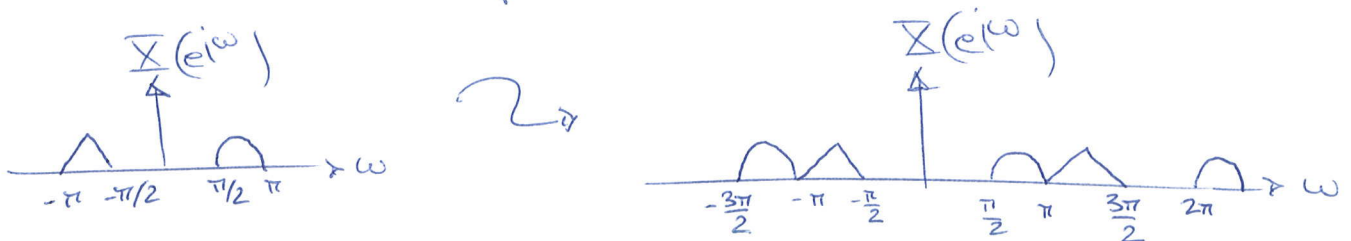
$$\boxed{x_d[n] = x[n \cdot M]} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi}{M}l)})}$$

(válido en y en $aliasing$)

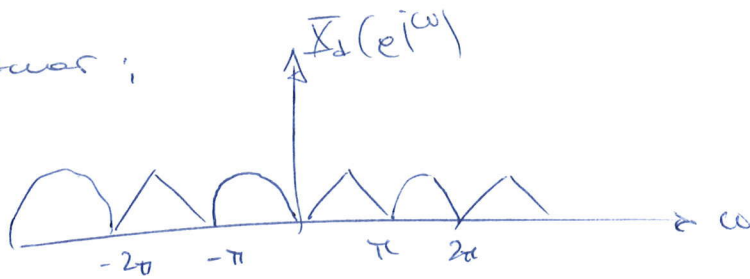
Ejemplo:



Ejemplo: obtener el espectro de la señal decimada por $M=2$:



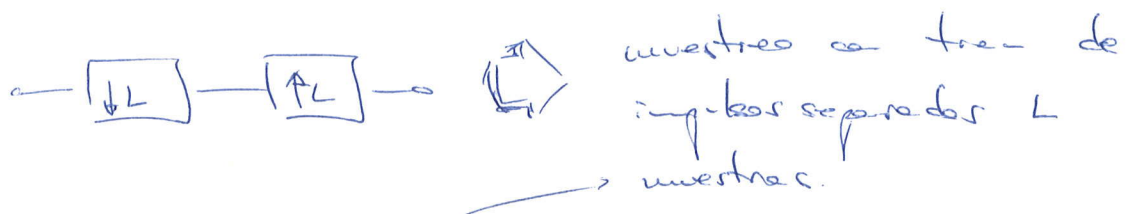
al decimar:



(* 1.8 *)

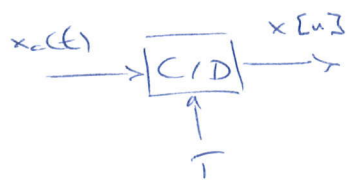
- interpolación: proceso que permite pasar de una señal a otra que se le muestrea a una velocidad mayor. Se puede hacer con la exponencial.
- decimación: proceso inverso.

Fig 1.8: se se reanuncia tal cual



$$\sum_k \delta[n - kL]$$

- Comparación de métodos vs conversión C/D:



$$x[n] = x_c(n \cdot T)$$

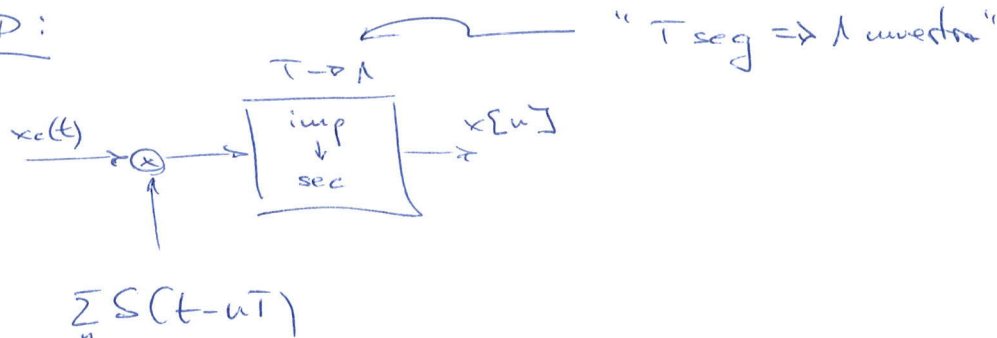
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$



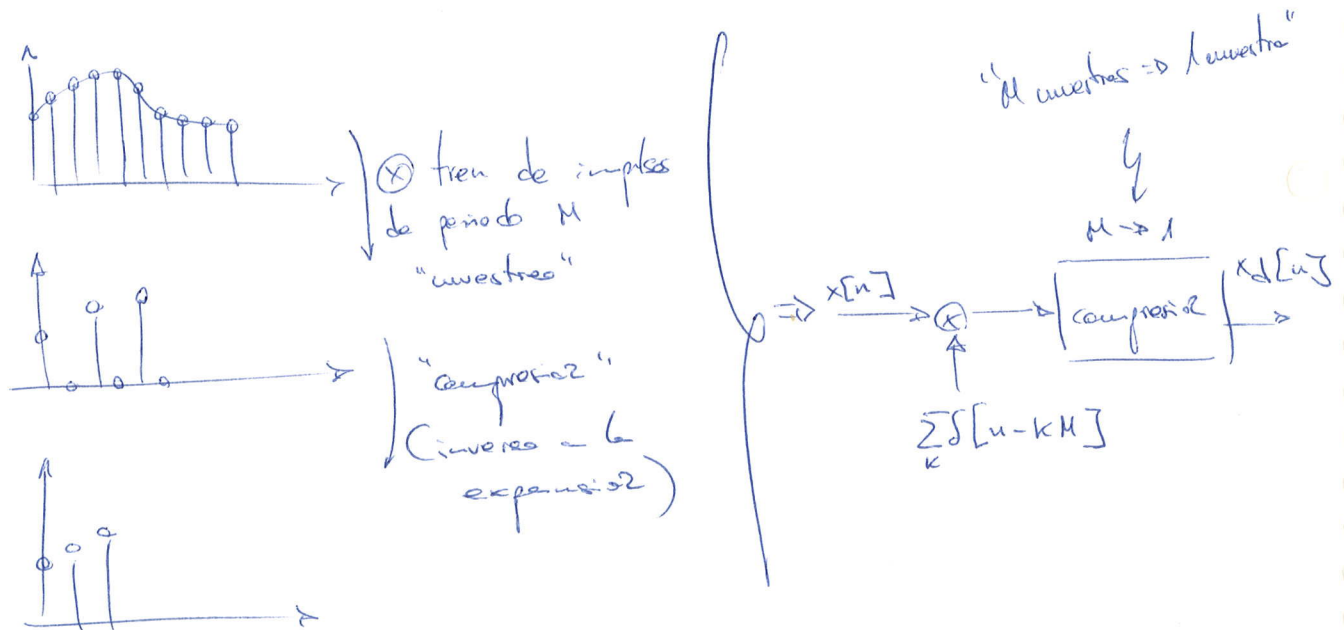
$$x_d[n] = x[n \cdot M]$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi}{M}l\right)}\right)$$

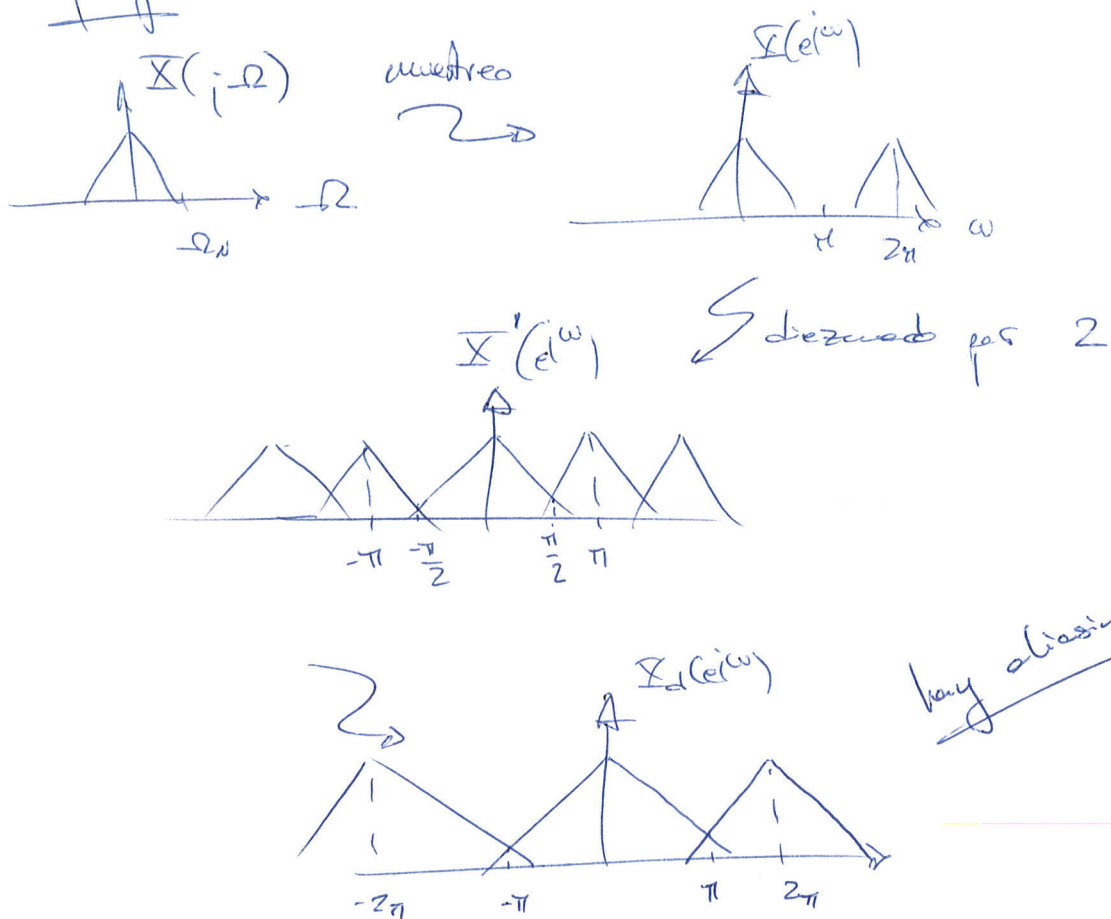
C/D:



dezmado:



ejemplo:



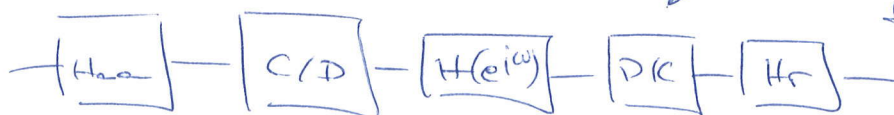
hay aliasing

3.3.- APLICACIONES

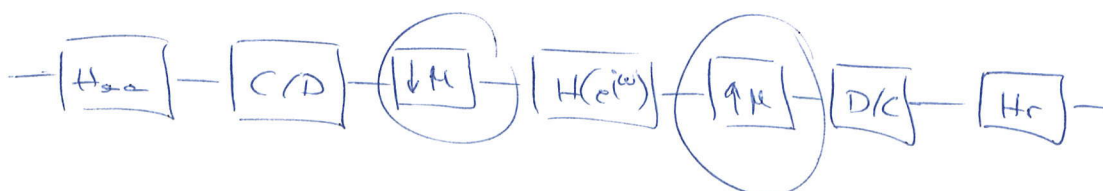
- Conversión A/D, D/A:

(* l.q. - l.l.x)

interesa sobremuestreo para simpli-
ficar o incluso prescindir de los
filtros



interesa régimen de muestreo
bajo



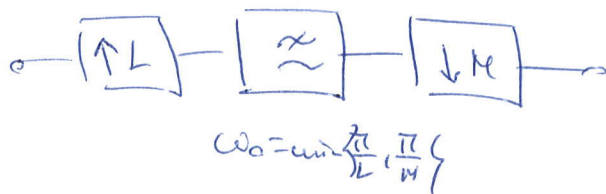
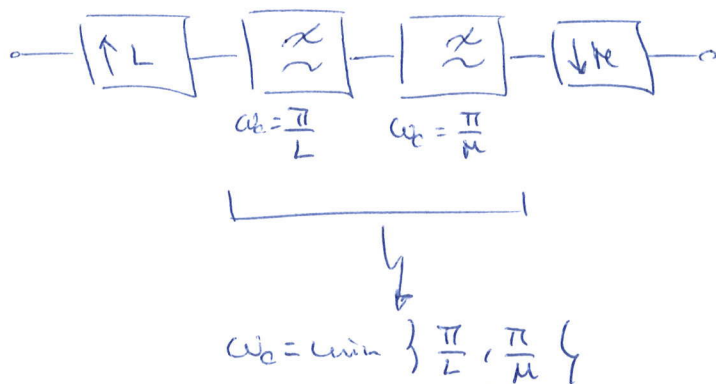
- Procesado de señales paso banda (banda estrecha):

(*1.12*)

- Cambiar la velocidad por un número racional:

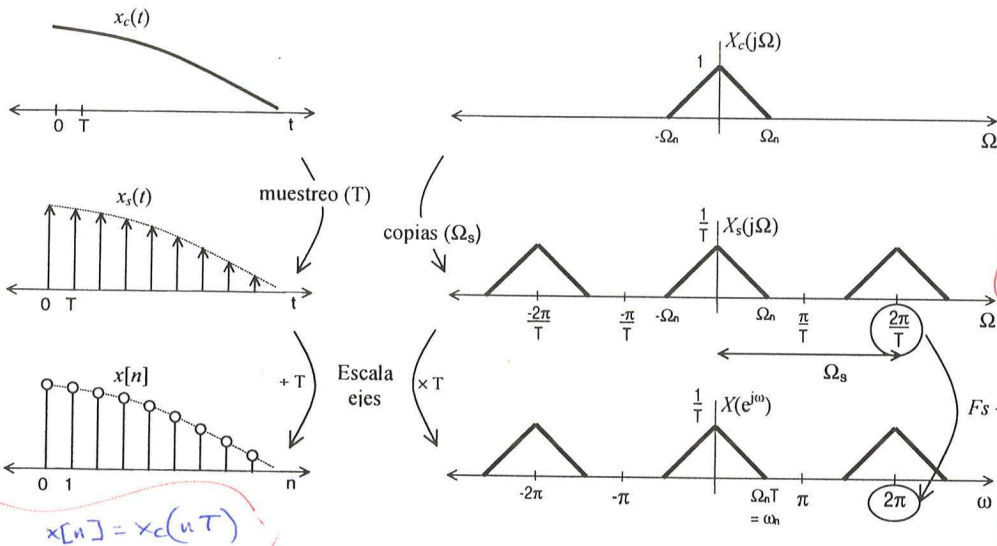
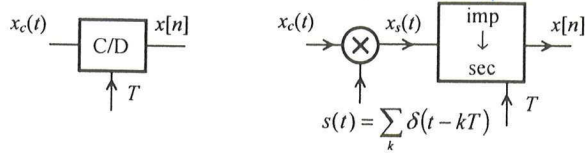
$$T' = T \cdot \frac{M}{L} \quad M, L \in \mathbb{Z}$$

$T \rightarrow$ interpolación por $L \left(\frac{1}{L} \right) \rightarrow$ decimación por $M \left(\frac{M}{L} \right)$



conversión ideal continua-discreta

conversión de
impulsos a secuencia



$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot F_s$$

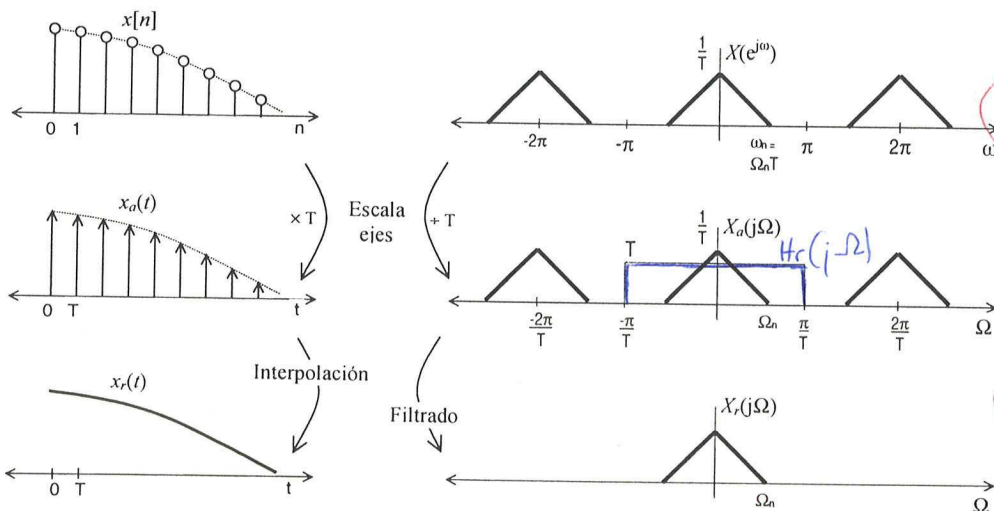
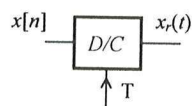
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

conversión ideal discreta-continua



$$X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

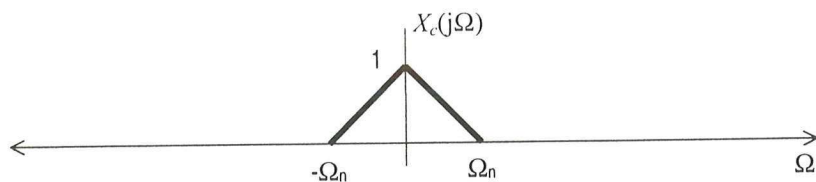
$$X_a(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})$$

$$X_r(j\Omega) = X_a(j\Omega) \cdot H_r(j\Omega) =$$

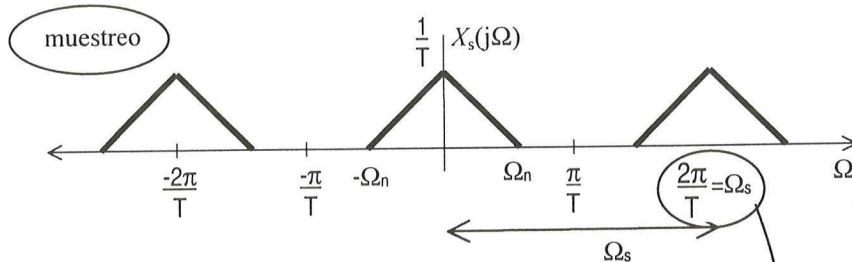
$$= \begin{cases} T \cdot X_a(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

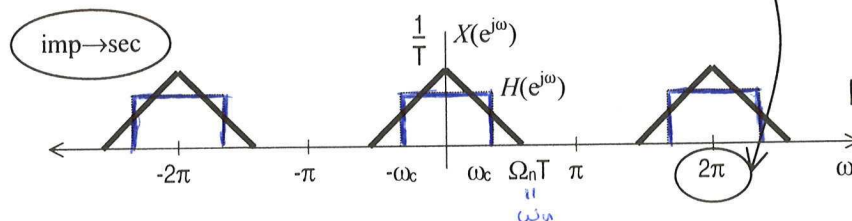
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$



para $\Omega_s > 2\Omega_n$



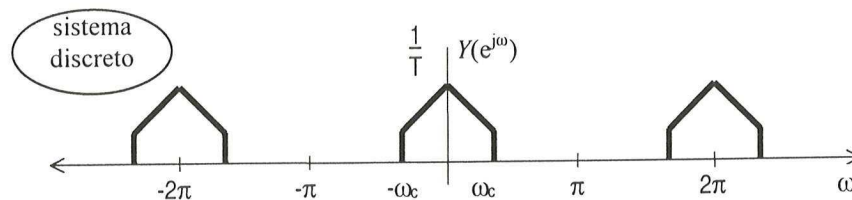
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$



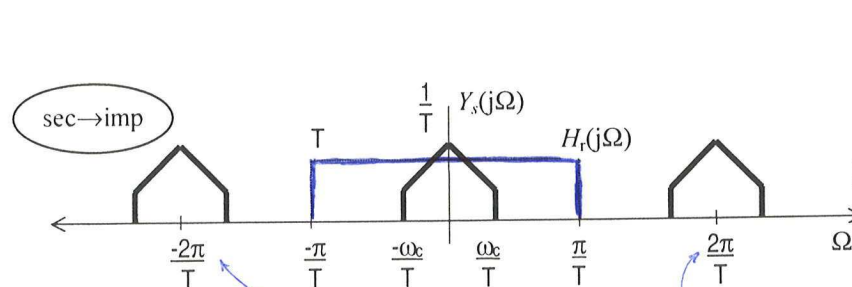
eje $\times T$

$$X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

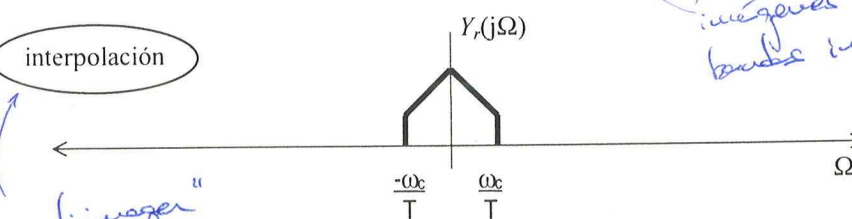


$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$



eje $\div T$

$$Y_s(j\Omega) = Y(e^{j\Omega T})$$



$$Y_r(j\Omega) = Y_s(j\Omega) \cdot H_r(j\Omega) =$$

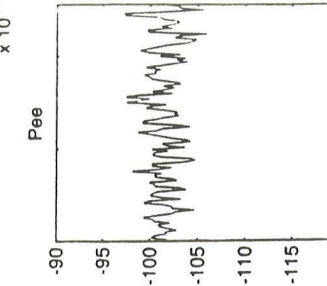
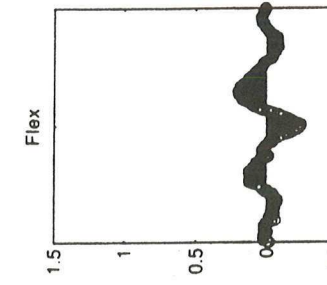
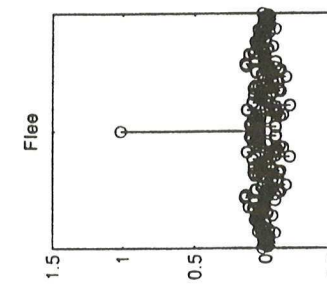
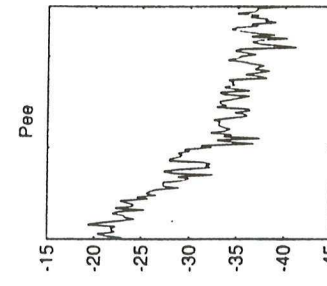
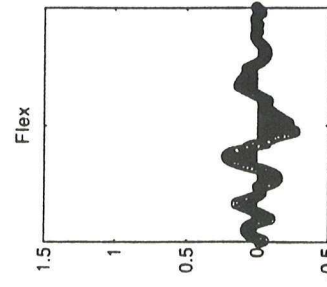
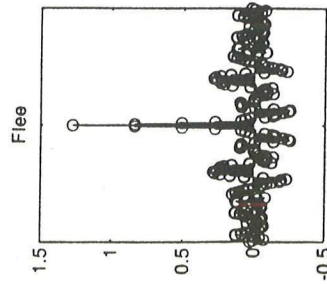
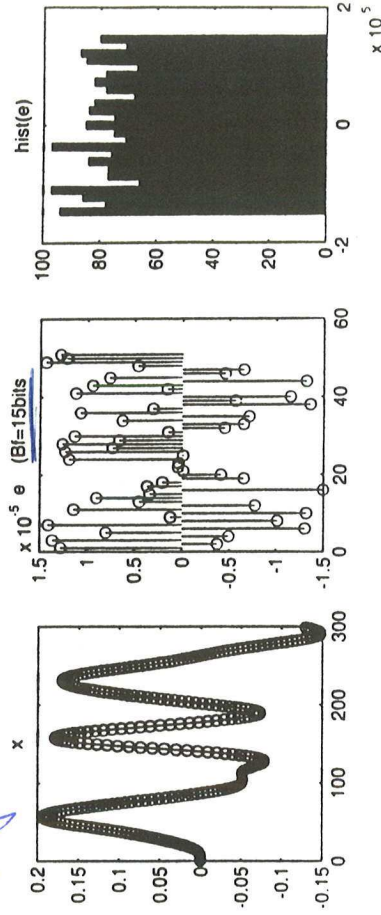
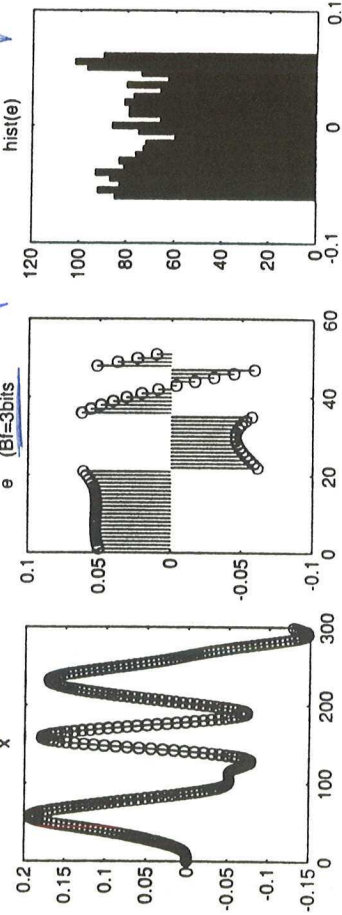
$$= \begin{cases} T \cdot Y_s(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

f. ltr. reconstructor ideal

histograma 2 uniforme

Muy sobremuestreado en pocos bits

Muy sobremuestreado en muchos bits



autocorrelación $\neq$ delta

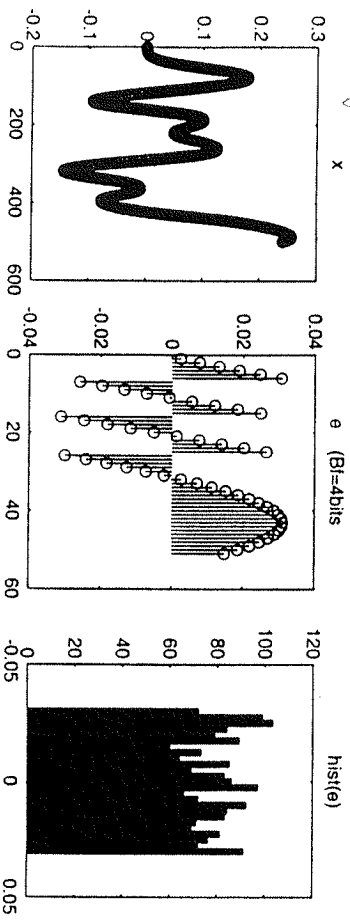
comparar autocorrelación con la señal

DEP (no blanca)

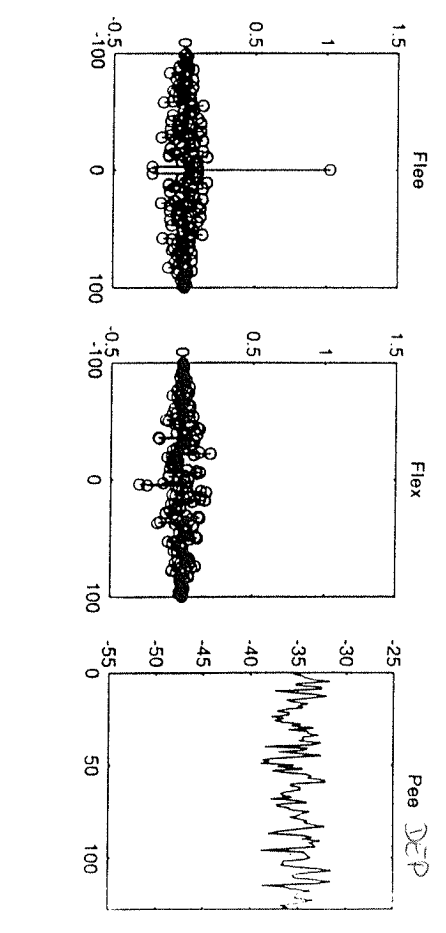
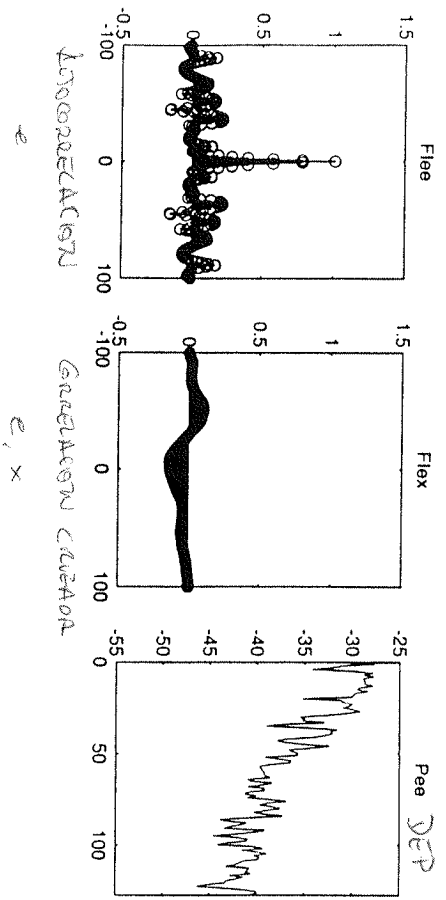
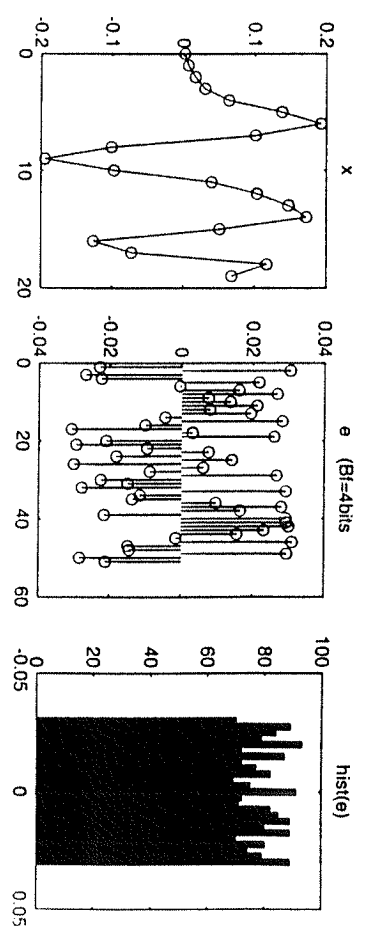
autocorrelación $\approx$ delta

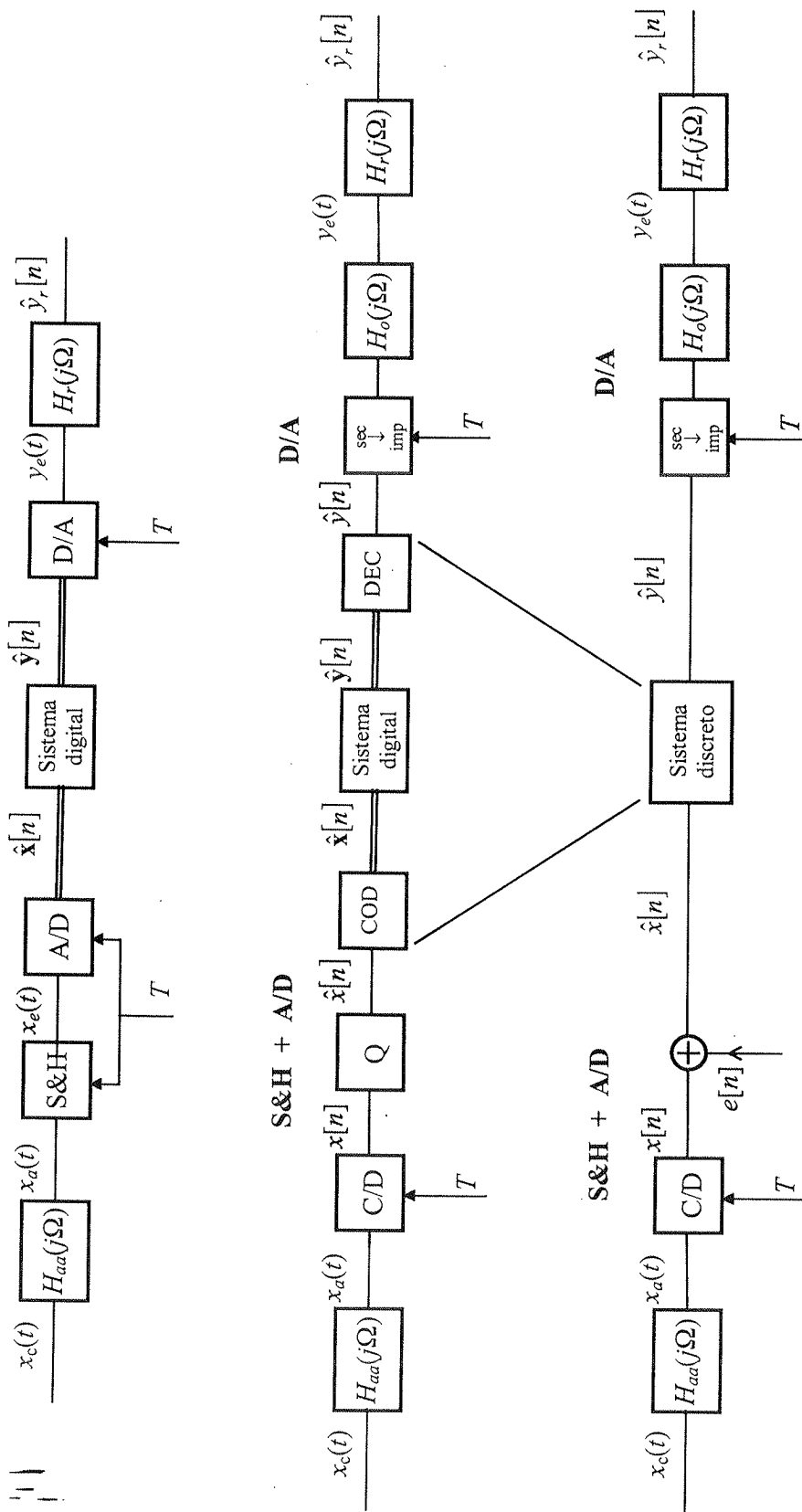
DEP blanca

My solution

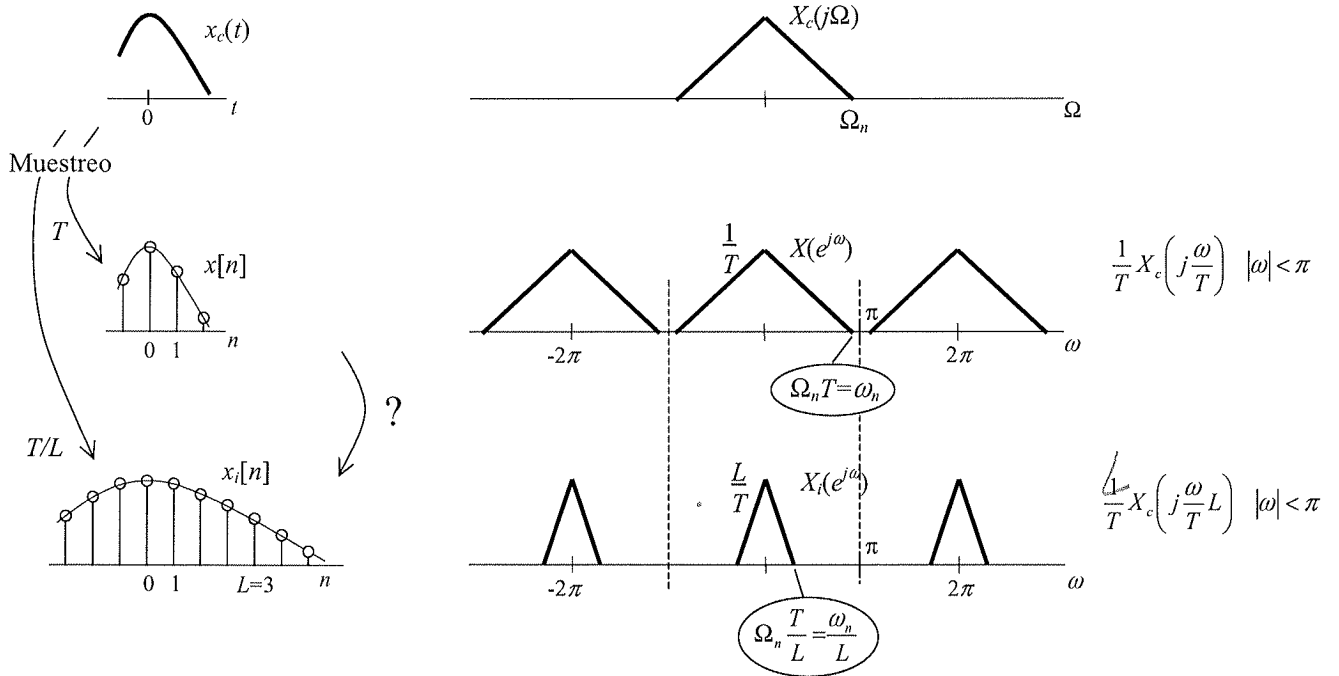


Real solution

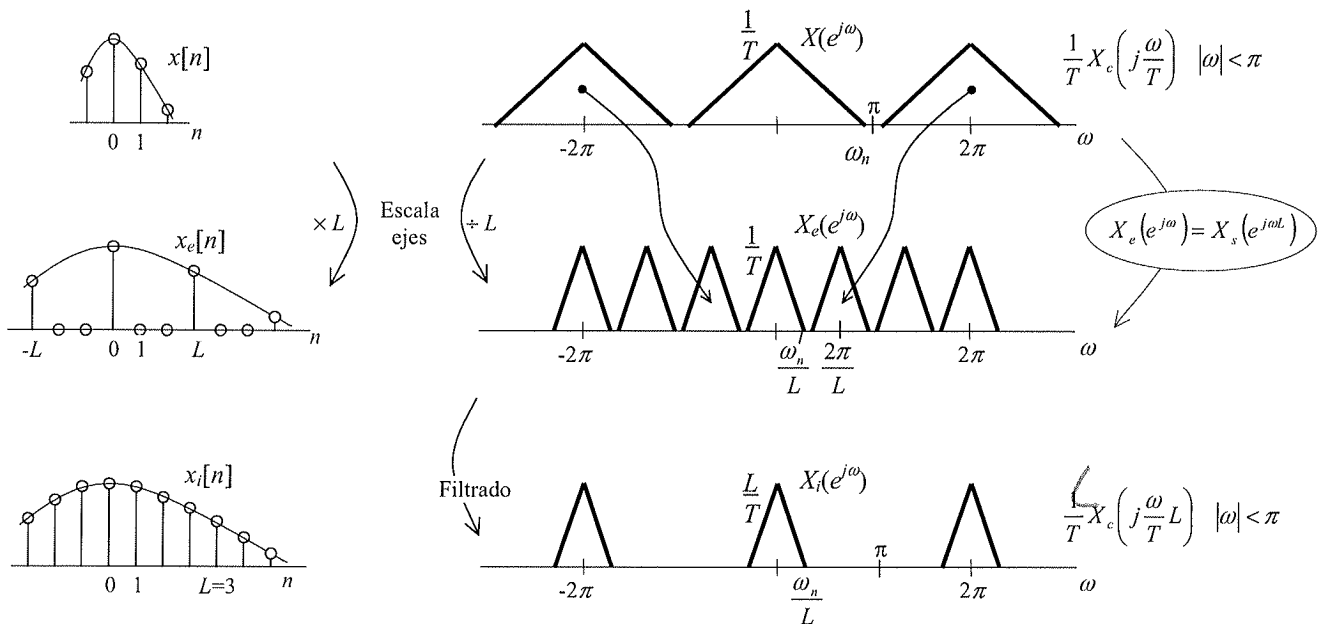




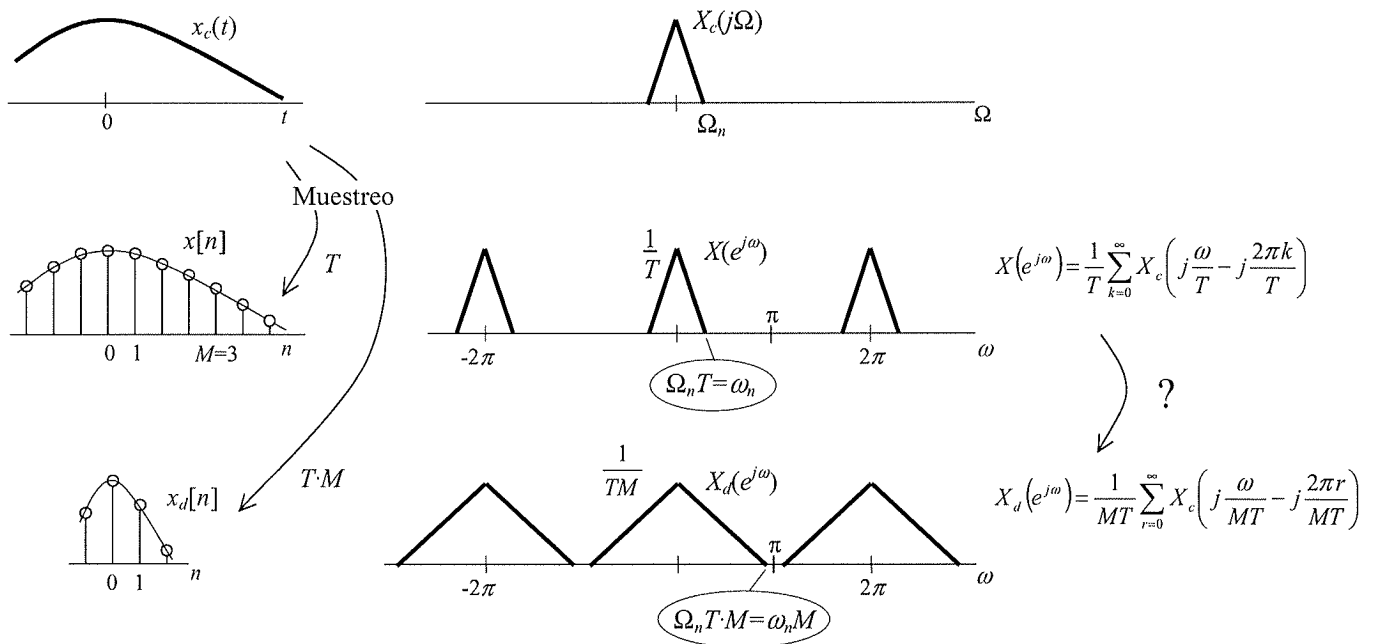
INTERPOLACIÓN



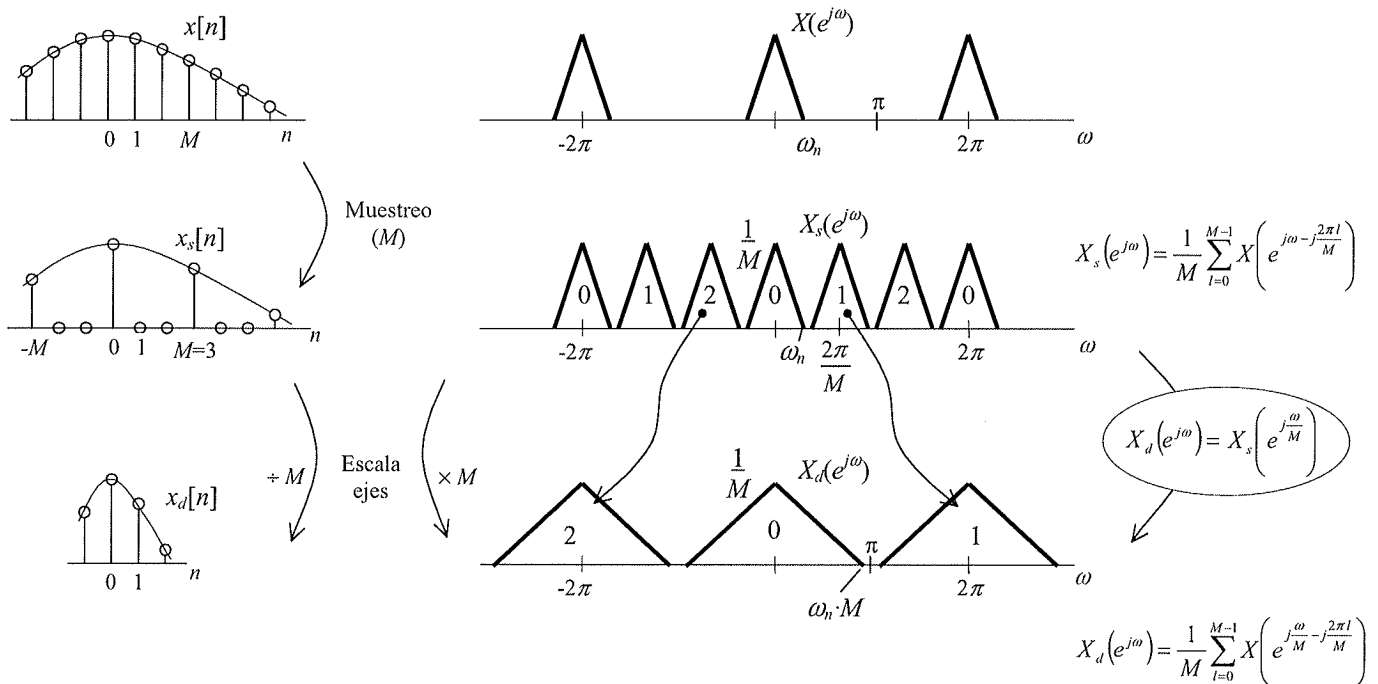
INTERPOLACIÓN

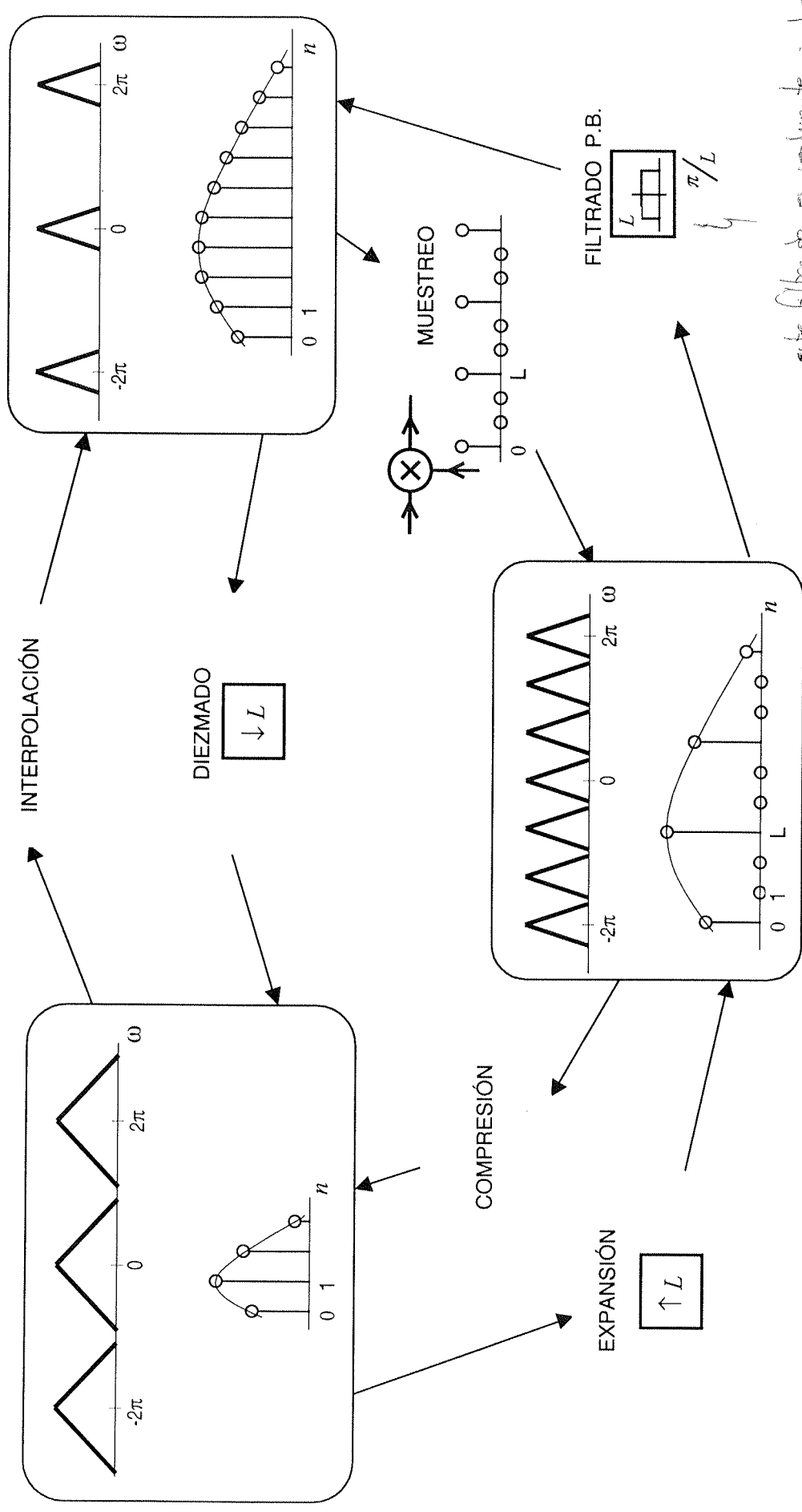


DIEZMADO



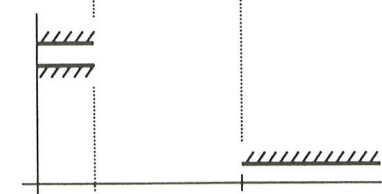
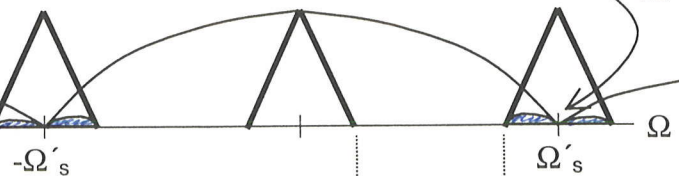
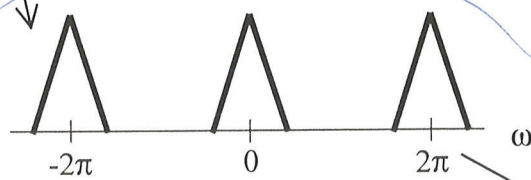
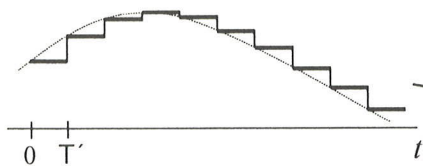
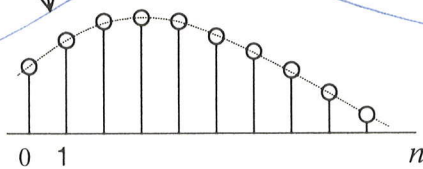
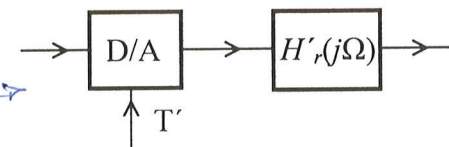
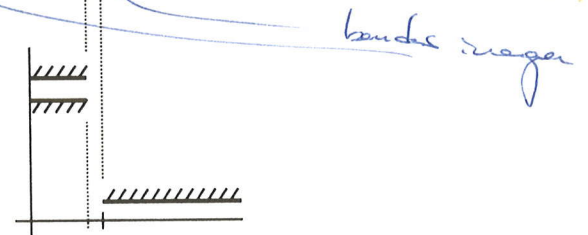
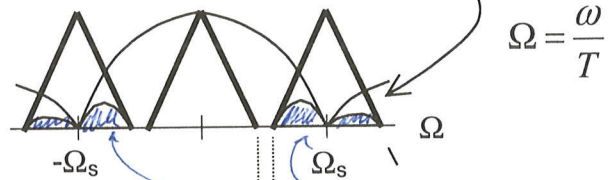
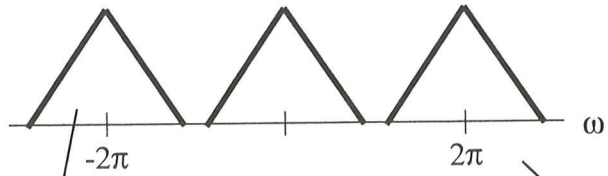
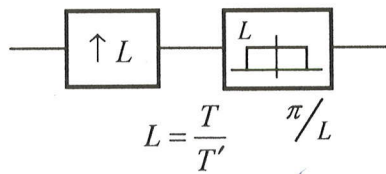
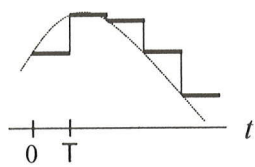
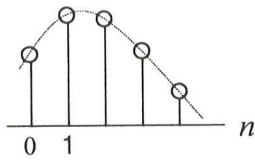
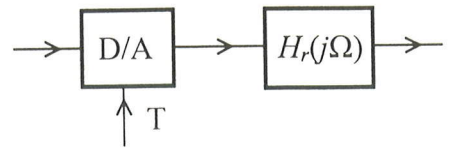
DIEZMADO





este filtro es equivalente a interpolación,
 aunque se llame así al proceso
 completo

Sobremuestreo en conversión D/A

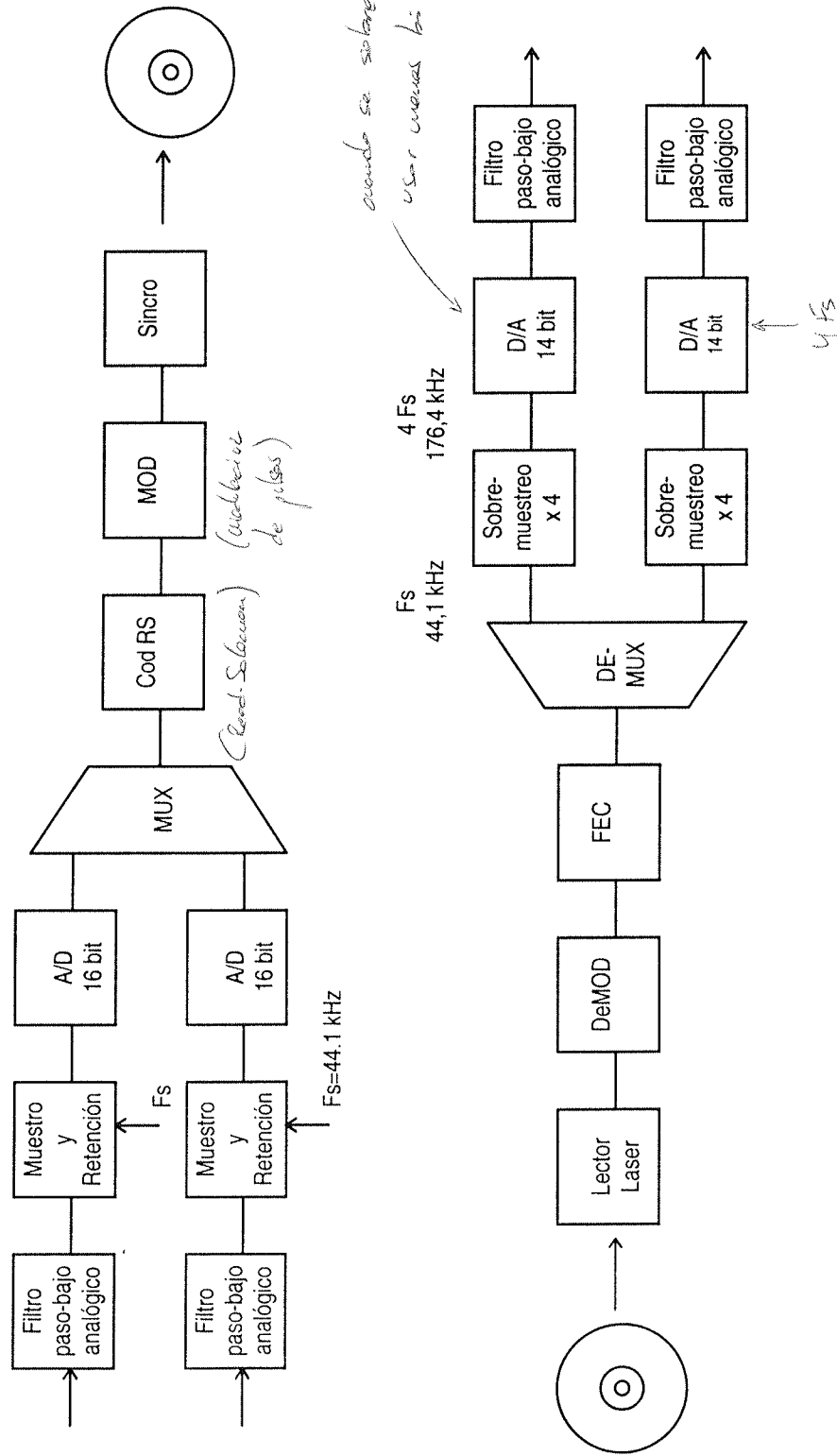


SOBREMUESTREO

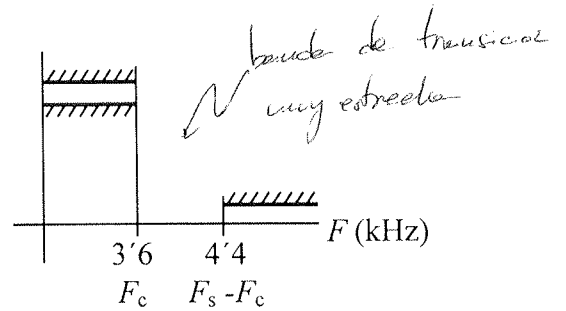
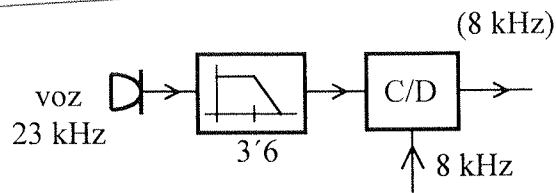
→ simplifica el filtro antiimagen

Sistema Compact-Disk
Banda de paso: 20 kHz
SNR: 90dB

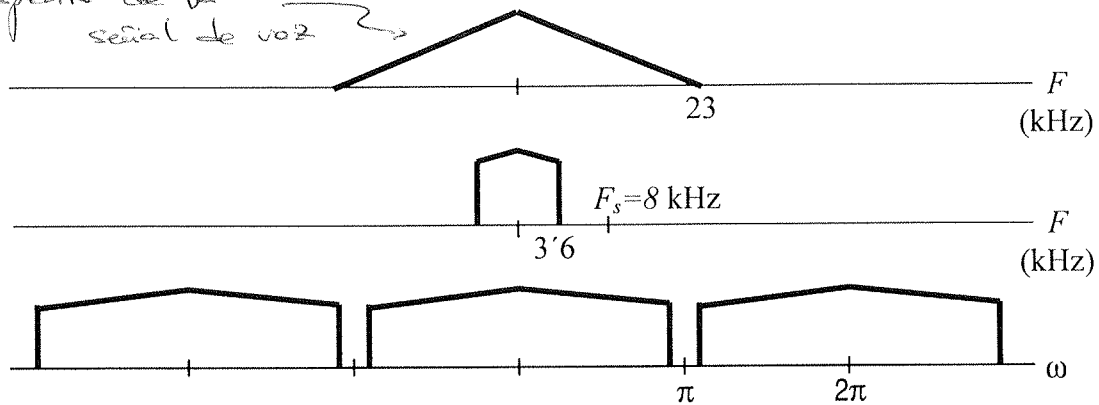
Frecuencia de muestreo F_s : 44,1 kHz
Filtro reconstructor:
- rechazo frecuencia imagen: 50 dB
- fase lineal



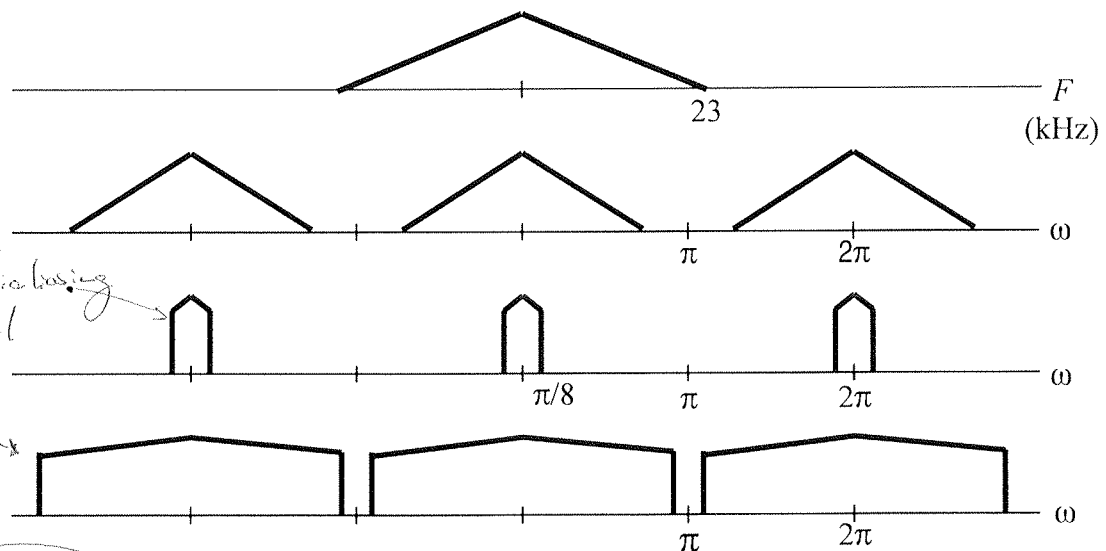
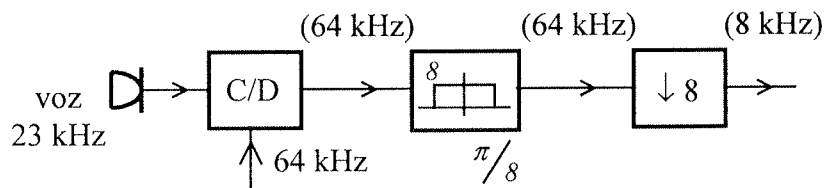
Sin sobremuestreo:



espectro de la señal de voz



SOBREMUESTREO

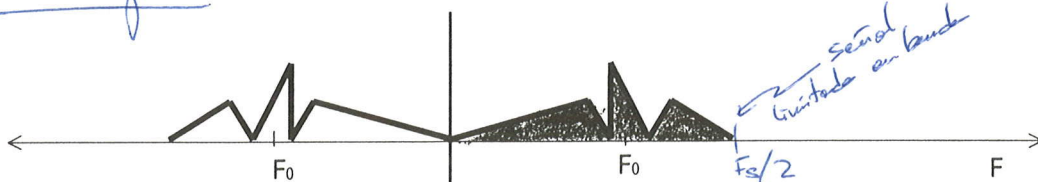


Filtro anti-aliasing digital

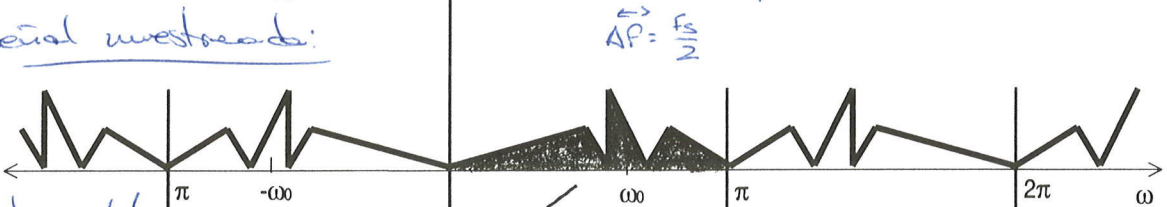
desplazado

Transmisión de señales de banda estrecha (SSB banda)

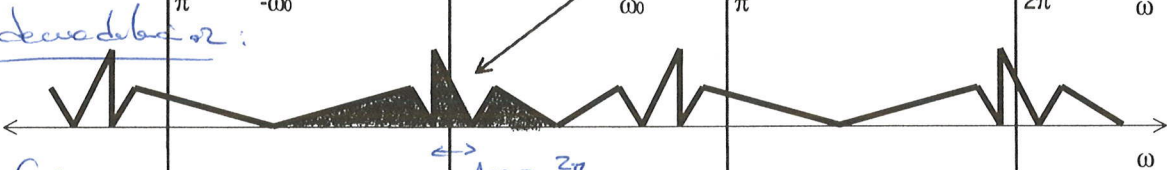
señal original:



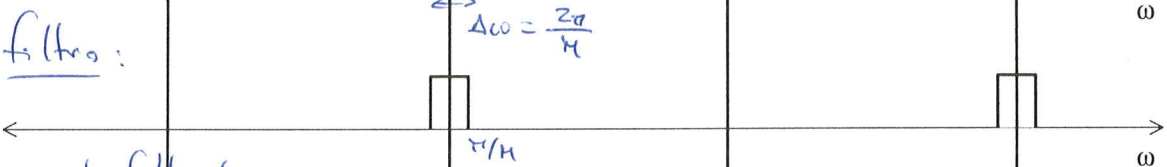
1) señal muestreada:



2) decodificador:



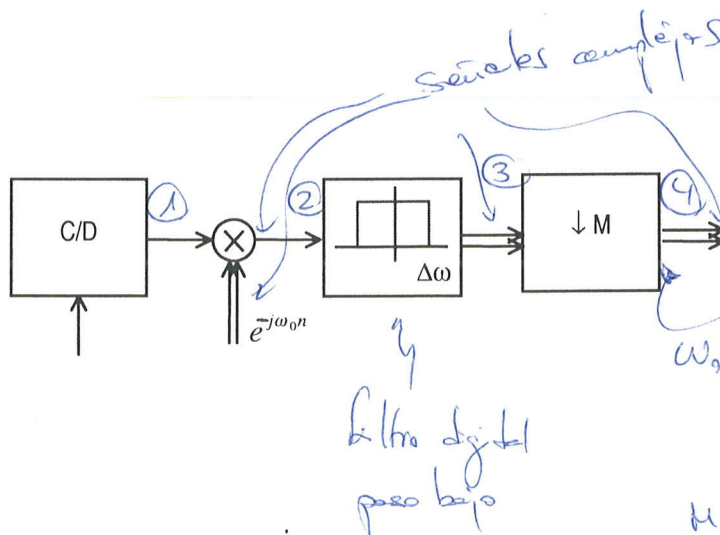
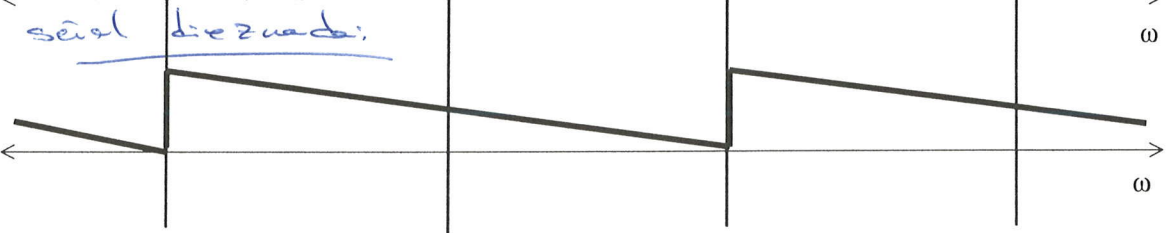
filtro:



3) señal filtrada:



4) señal desplazada:



se puede desazar por H/2 que haya aliasing

$\omega_0 \rightarrow$ elegir el canal (filtro digital)

$M \rightarrow$ elegir el ancho de banda del canal

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

<u>ESPECIFICACION</u> <i>Definir el comportamiento</i>	Respuesta en frecuencia: $H(e^{j\omega})$ - a partir de una $H(j\Omega)$ o no - con tolerancias - no depende de entrada Eliminar ruido/interferencia - mínima SNR/SIR para una clase de señales - depende de la entrada Tiempo real ? - tiempo de proceso por muestra - admitir retardo adicional	Amplitud plana <u>Fase lineal</u> <u>Igualación (amplitud/fase)</u>
<u>APROXIMACION</u> <i>función de transferencia - LTI - racional</i>	Obtener una $H(z)$ que cumpla especificaciones Normalmente $H(z)$ racional Opciones FIR (solo ceros) e IIR	Fase lineal <u>Estabilidad</u> <u>Retardo</u>
<u>REALIZACION</u> <i>Construir un sistema que tenga esa $H(z)$</i>	Algoritmo o Estructura: Cálculo de $y[n]$ a partir de $x[n]$ y de variables de estado (ej: $x[n-k]$, $y[n-k]$, otras) Problemas de precisión finita: cuantificación de coeficientes redondeo desbordamiento	Complejidad: <u>n° operaciones/muestra</u> Sensibilidad frente a <u>precisión finita</u>
<u>CONSTRUCCION</u>	Procesador HW "discreto" + D/A, A/D	Capacidad de proceso: <u>n° operaciones/segundo</u>

Tareas del diseño