

TEMA 2: FILTROS DIGITALES: TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN

1.- FASES DEL DISEÑO DE FILTROS

2.- DISEÑO DE FILTROS FIR SELECTIVOS EN FRECUENCIA

2.1.- SISTEMAS FIR DE FASE LINEAL

2.2.- TÉCNICA DE ENVENTANADO

2.3.- TIPOS DE VENTANAS

2.4.- RIZADO UNIFORQUE

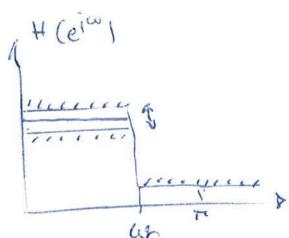
1.- FASES DEL DISEÑO DE FILTROS

(* 2.1 *)

1.- Especificación: determinar las requisitos fruenciales

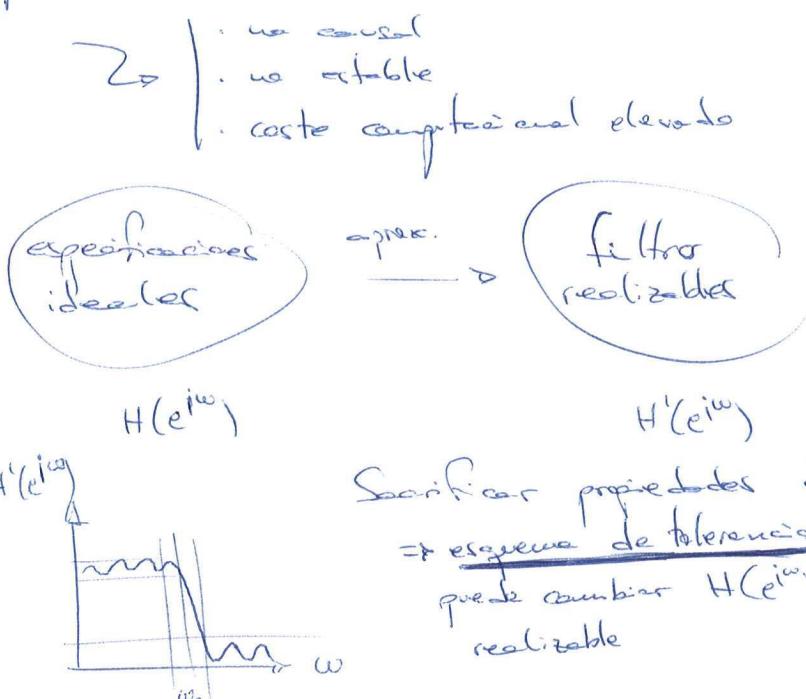
$H(z)$: ideal + tolerancia

. Diseño determinista o selectivo en frecuencia: el de todo lo visto



. Diseño estatístico: minimizar error de aproximación \rightarrow problema de mínimos cuadrados (MSE) \Rightarrow filtro de Wiener (TDS.2)

2.- Aproximación: $H(z)$ no suele ser realizable

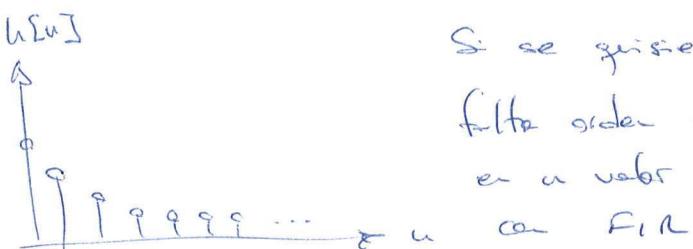


Decidir si usar FIR o IIR:

- FIR: ✓ permite implementar filtros con fase lineal exacta
✓ son siempre estables
- IIR: ✓ menor coste computacional

Normalmente se usa IIR, salvo cuando se requiere fase lineal exacta

Ejemplo: $h[n] = \alpha^n$ $n \geq 0, |\alpha| < 1$



Si se quisiera implementar con FIR, hace filtro orden infinito \Rightarrow aproximar y truncar en un valor de n . Así así es costoso

Si se implementa con IIR:

$$y[n] = a y[n-1] + x[n] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

\rightarrow exacto, sin -proximación.

3.- Realización: decidir el algoritmo para, a partir de $h(z)$, obtener $y[n] = f(x[n], x[n-1], \dots)$

Dado que $h(z)$, hay distintas formas de calcular $y[n]$, según como se ordenen las operaciones se podrá obtener una solución mejor.

A tener en cuenta:

- número de operaciones por muestra
- sensibilidad frente a errores de cuantificación

En este contexto, el algoritmo se denominará estructura

4.- Construcción: implementación del algoritmo en HW/SW

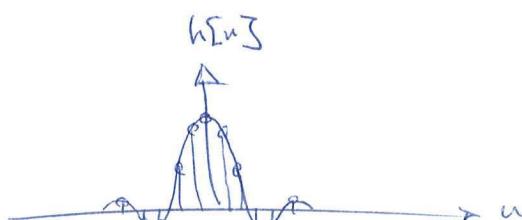
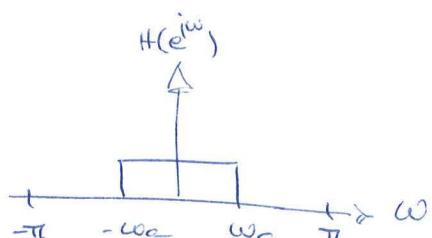
A continuación vamos a ver la fase de aproximación para filtros FIR.

2.- DISEÑO DE FILTROS FIR SELECTIVOS EN FRECUENCIA

1.- Especificaciones:

- amplitud constante
- fase lineal

$\left\{ \begin{array}{l} H_I(z) \\ \end{array} \right.$



→ coste bajo, estable



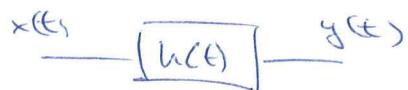
¿Qué se le pide hacer a la respuesta para variar la fase?

→ Se sacrifica la respuesta de amplitud

Es más difícil mantener la fase lineal exacta.

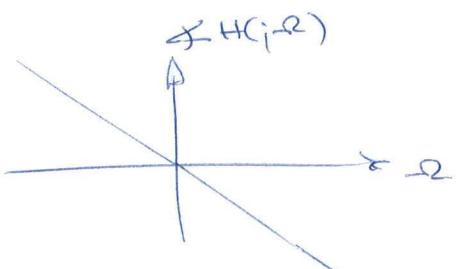
2.1.- SISTEMAS FIR DE FASE LINEAL

Sistema en tiempo continuo:



$$H(j\omega) = k e^{-j\omega t_0}$$

⇒ respuesta en
fase lineal



$y(t) = k \cdot x(t - t_0)$ ⇒ no se distorsiona la señal de entrada,
sólo se retrasa y atenúa

Sistema en tiempo discreto:

$$H(e^{j\omega}) = k e^{-j\omega\alpha}$$

$|\omega| < \pi$ y periodo 2π

α entero

$$h[n] = k \cdot S[n - \alpha]$$

S: α entero ⇒ retraso fijo

$x[n] \rightarrow k \cdot x[n - \alpha]$: cambia amplitud y retrasa la señal.
No cambia su forma
No distorsiona la señal / amplitud constante
fase lineal

Fase: $-\alpha \cdot \omega_0 =$ linea recta en la frecuencia

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si la amplitud no es constante: distorsión de amplitud} \\ \text{Si la fase no es lineal: distorsión de fase} \end{array} \right.$

- Medida de la distorsión: retardo de grupo

$$\boxed{\tilde{\tau}_g(\omega) = -\frac{d \arg H(e^{j\omega})}{d\omega}}$$

(unilateral)

Fase lineal $\Rightarrow \tilde{\tau}_g(\omega) = \alpha$ (constante)

- respuesta en frecuencia: $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega + j\beta}$

generalizar

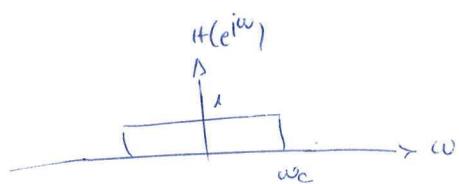
$$H(e^{j\omega}) = A(\omega) e^{-j\omega\alpha + j\beta}$$

$A(\omega)$ real, positiva o negativa

respuesta lineal en fase: fase lineal generalizada (FLG)

- Ejemplos de filtros / sistemas de fase lineal generalizada: ideal:

1.- Filtro pasa bajo ideal: (*2.2*)



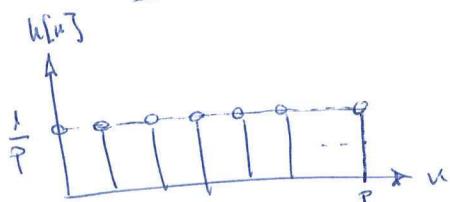
$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0, \beta = 0 \end{array} \right\}$$

sistema de fase cero

Irrealizable: no causal, infinitas muestras

2.- Sistema generalizado: (*2.3*)



$$\xrightarrow{\text{TF}} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{P} \frac{\sin \frac{\omega P}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{P-1}{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{P-1}{2}, \beta = 0 \end{array} \right\}$$

3.- Transformada de Hilbert: (* 2.19 - 2.20 *)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases} \rightarrow \text{frecuencias pares desfasadas } \frac{\pi}{2} \text{ y negativas } -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{h[n] = \frac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi n/2}}$$

$$\boxed{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad -\pi < \omega < \pi$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & -\pi < \omega < 0 \\ -j & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

Los tres ejemplos tienen respuesta al impulso simétrica.

Propiedad importante:

$h[n]$ simétrico

$\boxed{\text{Si } h[n] = \pm h[2\alpha - n] \text{ con } 2\alpha \text{ par o impar, entonces } \alpha \text{ es entero o entero } + 1/2 \text{ y el sistema es FLG}}$

$\boxed{\text{Al revés no tiene por qué ser: un sistema FLG que de ve tener } h[n] \text{ simétrico.}}$

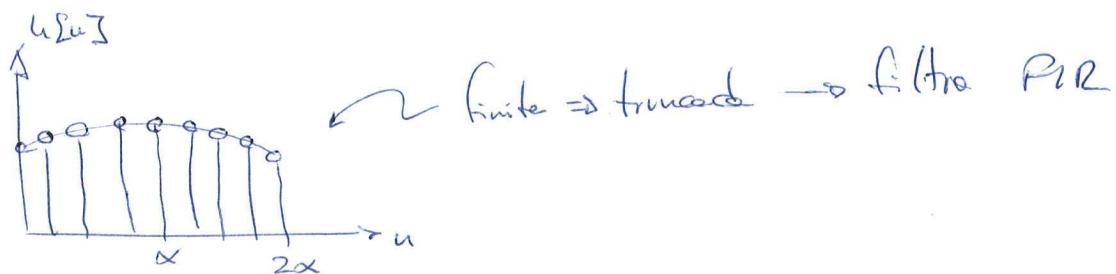
Para hacer filtros realizables manteniendo la fase lineal:

desplazar $h[n]$ "L" muestras $\rightarrow h[n-L]$

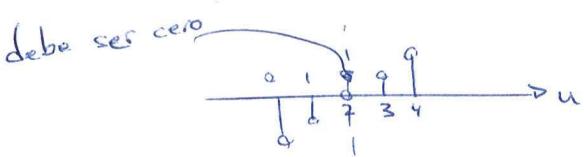
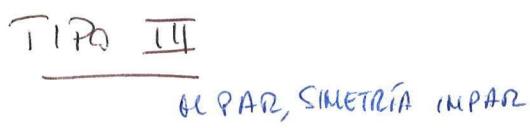
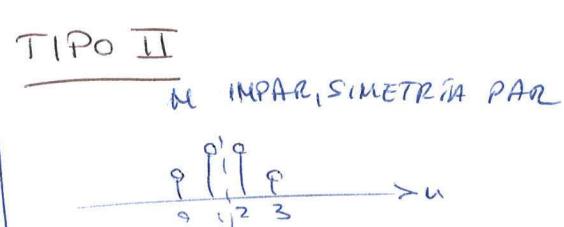
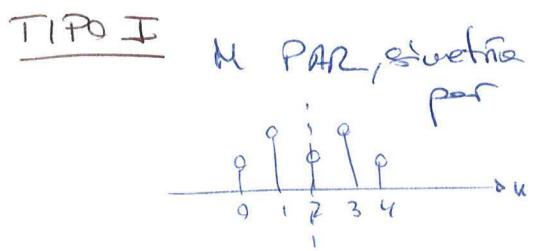
Se mantiene la fase. En la frecuencia, es equivalente a multiplicar por $e^{-j\omega L}$ con L entero \Rightarrow fase se mantiene lineal y $\alpha \rightarrow \alpha + L$.

\rightarrow se puede desplazar $h[n]$ por el eje

- buscar $h[n]$ simétrica y causal \Rightarrow finita



$$\boxed{M = 2x} = \text{orden del filtro}$$



		$M = 2x$	
		par	impar
respuesta	par	I	II
	impar	III	IV

- Aproximación:

• desplazar $h[n]$: $\rightarrow [e^{-j\omega L}] \rightarrow$

L : desplazamiento

$\left. \begin{array}{l} \text{L entero} \Rightarrow \text{FIR tipo I o III} \\ \text{L entero} + 1/2 \Rightarrow \text{FIR tipo II o IV} \end{array} \right\}$

Si $L \omega_0$ es entero o entero + 1/2, dejar de ser simétrico.

(*2.2*)

- * truncos: "multiplicar por la ventura rectangular"
 - de la frecuencia: conclusion: car me sinc \Rightarrow la respect ideal se transforma mucho.

Otra opción: multiplicar por otro tipo de ventanas, para mantener la respuesta en lo posible \Rightarrow técnica de envolventes

- Diagnosar polo - cero FIR - FLG :

En general, por FIR-FLG, si $h[n]$ es:

- impar (tipos III, IV): no pasa las bajas frecuencias
 - par (tipos I, II): pasa bajas

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^N h[N-n] z^{-n} = \sum_{k=0}^N h[k] z^{-N+k} =$$

↗ \downarrow
 simétrico $k = N - n$

$$= \pm \sum_{k=0}^M h[k] z^k = \underline{\underline{z^{-M} H(z^{-1})}}$$

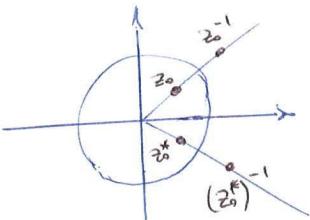
Si z_0 es en cero $\Rightarrow H(z_0) = 0 = \pm z_0^{-\mu} H(z_0^{-1})$, con $z_0 \neq 0$

$$\Rightarrow H(z_0^{-1}) = 0 \rightarrow z_0^{-1} \text{ er ein zero}$$

- si z_0 es un cero, su inverso z_0^{-1} tambié es un cero
 - si z_0 es un cero, z_0^* tambié

\Rightarrow los ceros aparecen de 4 en 4: $z_0, z_0^{-1}, z_0^*, (z_0^*)^{-1}$

Si un cero está en el círculo $|z|=1$, entonces es doble.



- Esto es así porque $h[n]$ es real
- Los polos de un filtro FIR están todos en el origen, por eso se dice que solo tiene ceros

Si $h[n]$ es par, $H(z) = z^{-N} H(z^{-1})$

$$\text{En } z=-1, \quad H(-1) = (-1)^{-N} \cdot H(-1)$$

\rightarrow H impar: $H(-1) = -H(1) = 0 \Rightarrow$ existe cero en $z=-1$

\rightarrow H par: $H(-1) = H(1) \Rightarrow$ normal

FIR tipo II

$z = -1$: frecuencia $\pi \Rightarrow$ no será paso alto / $\begin{cases} \text{tipo II} \\ \text{tipo III} \end{cases}$

Si $h[n]$ impar, $H(z) = -z^{-N} H(z^{-1})$

$$\text{En } z=-1, \quad H(-1) = -(-1)^{-N} \cdot H(-1)$$

\rightarrow H impar: $H(-1) = H(1) \Rightarrow$ normal

\rightarrow H par: $H(-1) = -H(1) = 0 \Rightarrow$ existe cero en $z=-1$

FIR tipo III

$$\text{En } z=1, \quad H(1) = -1^N \cdot H(1)$$

\rightarrow H impar: $H(1) = -H(1) = 0 \Rightarrow$ existe cero en $z=1$

\rightarrow H par: $H(1) = -H(1) = 0 \Rightarrow$ existe cero en $z=1$

\Rightarrow tipos III, IV no pueden ser paso bajo

- Ceros
- tipo I: —, —
 - tipo II: $z_0 = -1$, —
 - tipo III: $z_0 = -1$, $z_0 = 1$
 - tipo IV: —, $z_0 = 1$
-

2.2.- TÉCNICA DE ENVENTANADO

Partidas del filtro pasa alta ideal ($\Rightarrow h[n]$ no causal, infinitos muestras)



$$h[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n} \quad \forall n$$

\rightarrow desplazar $h[n]$ hacia la derecha y truncar de forma simétrica

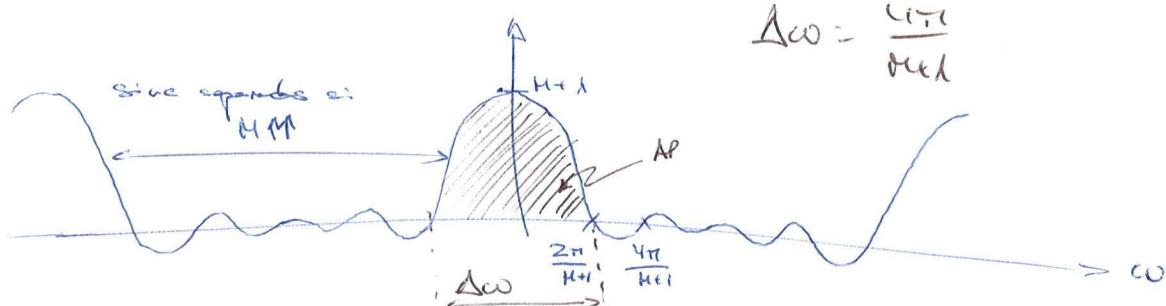
El sistema resultante debe ser causal y mantener la fase lineal.

Habrá que optar por una de las 4 situaciones

$$\boxed{h[n] = h_{\text{ideal}}[n-L] \cdot w[n]} \quad w[n] = \text{ventana}$$

Ventana rectangular de $0 \sim \pi$: $w(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}(M+1)}{\sin \omega/2} e^{j\omega M/2}$

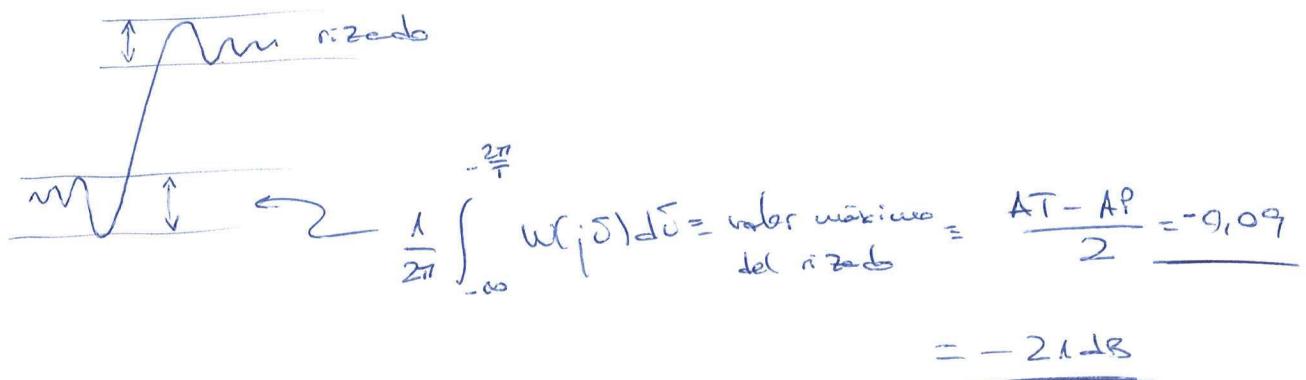
Función sinc periódica, explicando el grande \rightarrow muchas lóbulos hasta $\pi \rightarrow$ precisión a más sinc



El área dentro de cada lóbulo principal es constante, independientemente de H: si $H \uparrow$: $\omega_m \rightarrow \omega_m$ se estrecha, pero aumenta su amplitud

Área del lóbulo principal: $AP = 1,18$ Área total: $AT = 1$

($\approx 2.5 \times$) \rightarrow convolución de sinc con escalón:



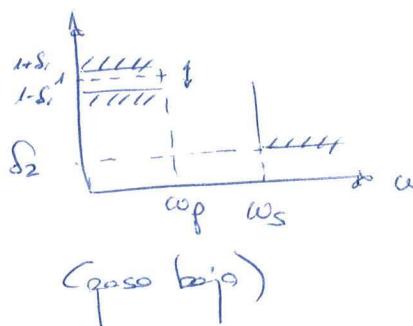
El rizado no desminuye al variar la anchura de la ventana.

- Dado un tipo de ventana, tendrá un rizado determinado y característico

ej: ventana rectangular \rightarrow rizado = -21 dB

- El ancho de la ventana modifica el ancho de la zona de transición \Rightarrow fenómeno de Gibbs

- Diseño del filtro: se parte de un esquema de tolerancias



- rizado simétrico en bandas de paso y de rechazo \Rightarrow elegir la más restrictiva:

$$\delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2\}$$

- zona de transición = $\omega_s - \omega_p$ < ancho del lóbulo principal, Δu

(paso bajo)

(máximo rizado - mínimo rizado)

$$\omega_s - \omega_p = 0,45 \Delta u = \frac{1,8\pi}{M} \quad (\text{ventana de longitud } M+1)$$

$$\text{ejemplo } \Rightarrow (2,7*)$$

El ancho cuando con ventana rectangular solo vale con rizados mayores de $-21dB$ ($0,99$)

Si no hay problema con el rizado, se calcula el orden:

$$\omega_s - \omega_p = \frac{1,8\pi}{M} \Rightarrow M = \frac{1,8\pi}{\omega_s - \omega_p}$$

para solucionar: $w_u = \frac{\sin \omega_c (u - M/2)}{\pi(u - M/2)}$ para $0 \leq u \leq M$ (0 en el resto)

siendo $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$ (simétrico)

En decibelios: (rizados máximos para esta ventana)

banda de paso: $\frac{1+0,99}{1} = 0,75dB$

banda de rechazo: $-21dB$

2.3.- TIPOS DE VENTANAS

- RECTANGULAR: $w[n] = 1, \quad 0 \leq n \leq M$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{1.8\pi}{M} \quad A = -21dB$$

Se pueden mejorar las especificaciones de rizado de los filtros usando otras ventanas

(* 2.8*)

- HAMMING: $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M} \quad 0 \leq n \leq M$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{6.6\pi}{M} \quad A = -53dB$$

Peores resultados en el dominio del tiempo, pero mejor en frecuencia

✓ mayor atenuación del rizado

✗ zona de transición más grande (no es muy grave)

La ventana es un coseno alzado con un pedestal de 0,08

- rizado depende de la forma de la ventana

- zona de transición depende de la longitud de la ventana

- BARTLETT (TRIANGULAR): $w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M} & M/2 \leq n \leq M \end{cases}$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{2.37\pi}{M} \quad A = -25dB$$

- HANNING:

$$w[n] = 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} \quad 0 \leq n \leq N$$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{6.2\pi}{N} \quad A = -44 \text{ dB}$$

Es un coseno alizado

- BLACKMANN:

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N} \quad 0 \leq n \leq N$$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{11\pi}{N} \quad A = -74 \text{ dB}$$

Proceso de Diseño:

1- Elegir $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y elegir la forma de la ventana.

rectangular: -2 dB | Hanning: -44 dB | Hamming: -53 dB | Blackmann: -74 dB

2- Determinar N a partir de ω_s y ω_p , y $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$

3- Determinar la respuesta impulsiva:

$$h[n] = \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N}{2}\right)}{\pi \left(n - \frac{N}{2}\right)} w[n]$$

El problema de tener un juego de 5 ventanas es que hay que escoger un tipo para ampliar S_{win} , y queda que desproveches el filtro.

Esto nos lleva a una ventana en 6 que queda haber ventanas rizadas. Queremos una ventana que tenga el rizado que necesitemos, y según el rizado variaremos la forma de la ventana.

→ VENTANA DE KAISER (* 2.14 *)

- MÉTODO DE KAISER: ventana ajustable (* 2.14 - 2.18*)

Dado un rizado \rightarrow calcular $\beta \Rightarrow$ forma de la ventana

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2|n|}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N \quad (\text{no estandar})$$

$I_0(\cdot)$ = función de Bessel modificada de orden cero

Parámetros / β = parámetro de forma ($\beta=0 \Rightarrow$ rectangular)
 μ = longitud \Rightarrow grado del filtro

La atenuación sib depende de β

Ade más, la anchura de la zona de transición es mínima

para la atenuación dada \Rightarrow Mínima

Para $A=44, 53, 74$ la ventana de Kaiser no se convierte en las anteriores, y que tiene el óptimo.

Z_0 (* 2.17*)

- Pasos del método de Kaiser:

1.- $S = \min\{S_1, S_2\}$ para hacer simétrico

2.- Elegir forma, mediante curva $\beta/\text{rizado}:$

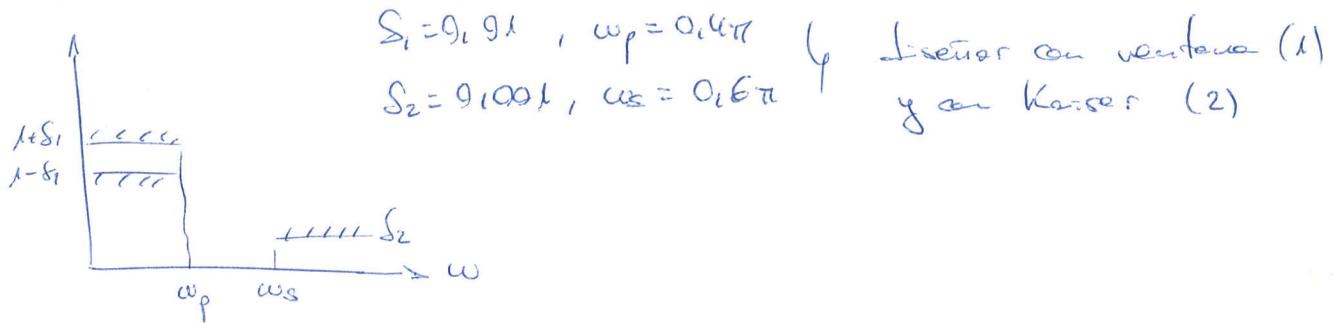
A en dB!

$$\beta = \begin{cases} 9,1102(A-8,7) & A > 50 \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \quad \Rightarrow \text{v.rect.} \end{cases}$$

$$4.- \omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}, \quad W[n] = (\dots) \cdot w[n] \quad (\text{ignal zur unter})$$

$$\boxed{\mu = \frac{A - 8}{2,285(\omega_s - \omega_p)}}$$

Ejemplo:



$$1.- \delta = \min \{S_1, S_2\} = 0,001 \Rightarrow A = -20 \log \delta = 60 \text{dB}$$

\Rightarrow Blochmauer ($A = 74 \text{dB}$)

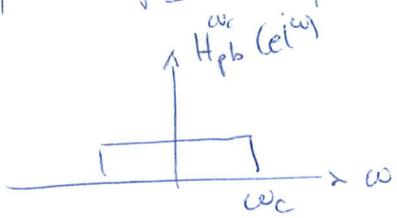
$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{10\pi}{\omega_s - \omega_p} = 55}$$

$$2.- \text{Kaiser: } \beta = 9,1102(A - 8,7) = 5,653$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{A - 8}{2,285(\omega_s - \omega_p)} = 36,3 \Rightarrow \boxed{\mu = 37}$$

- GENERALIZACIÓN A FILTROS NO PASE BAJO

Paso bajo:



$$\xrightarrow{\text{TF}^{-1}} h_{pb}^{w_c}[n] = \frac{\sin w_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Paso alto:



$$\xrightarrow{} H_{pa}^{w_c}(e^{jw}) = 1 - H_{pb}^{w_c}(e^{jw})$$

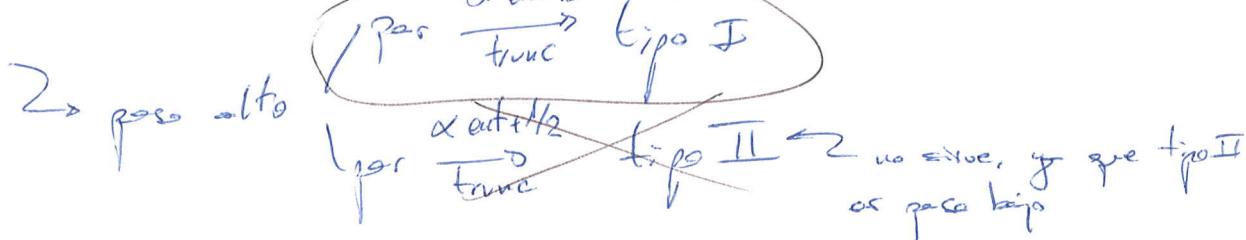
$$\xrightarrow{\text{TF}^{-1}}$$

$$h_{pa}^{w_c}[n] = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin w_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

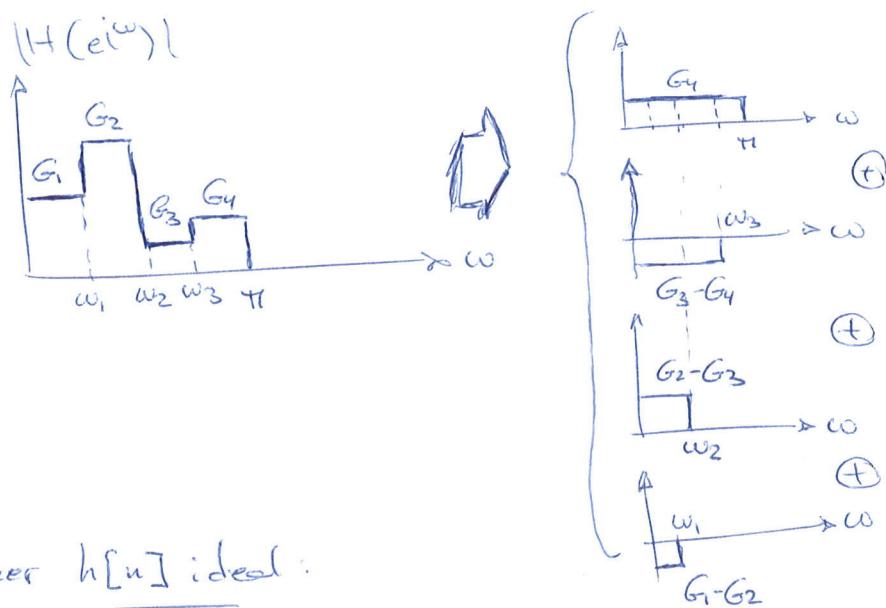
Respecto para si $\alpha=0$

$\frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} = \text{respuesta paso alto, para que sea } \alpha \text{ entero o } \omega$



Se puede discutir con cualquier reunión.

- Filtros compuestos (multibanda):



1.- Obtener $h[n]$ ideal:

$$H(e^{j\omega}) = G_4 H_{pb}(e^{j\omega}) + (G_3 - G_4) H_{pb}(e^{j\omega}) + (G_2 - G_3) H_{pb}(e^{j\omega}) + (G_1 - G_2) H_{pb}(e^{j\omega})$$

$$TF^{-1} \left| \begin{array}{l} h[n] = \sum_{k=1}^N (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin(\omega_k(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \\ \text{con } G_{N+1} = 0 \\ \omega_N = \pi \end{array} \right.$$

2.- Desplazar α y truncar para obtener respuesta simétrica

los anchos de las zonas de transición son todos iguales, ya que sólo dependen del ancho del tránsito principal de la ventana.

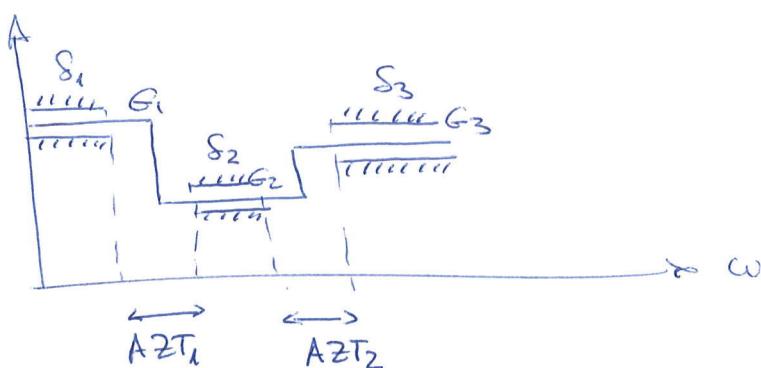
A ambas lados de cada transición el rizado es igual.

El nivel de rizado no depende del salto de una transición a otra, es proporcional al salto.

Salto Rizado hay que normalizar los
 1 → S rizados

$$|G_k - G_{k+1}| \rightarrow S |G_k - G_{k+1}|$$

Quedan las siguientes especificaciones:



Para el enventanado, seleccionamos la mínima anchura de la zona de transición:

$$w_s - w_p = A2T = \min_i \{ A2T_i \}$$

Y para el rizado, compraremos los rizados para saltos mixtos:

$$S = \min_i S'_i = \min_i \left\{ \frac{S_i}{|G_{i+1} - G_i|} \right\}$$

a ambos lados
del salto

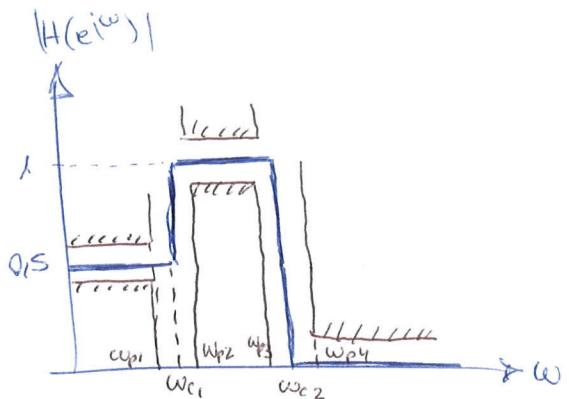
Así, con $A2T$ y S , se elige el tipo de ventana.

Ejemplo:

$$\omega_{p1} = 0,25\pi \quad \omega_{p3} = 0,67\pi$$

$$\omega_{p2} = 0,35\pi \quad \omega_{p4} = 0,65\pi$$

$$S_1 = 0,01 \quad S_2 = 0,05 \quad S_3 = 0,01$$



1.- Filtro ideal: $h[u] = h_{pb}[u] - \frac{1}{2} h_{pb}^{w_c}[u]$

2.- Diseñar ventanas:

$$2T_1 = 0,1\pi \quad 2T_2 = 0,05\pi \rightarrow 2T = 0,15\pi$$

$$\begin{cases} S'_1 = \frac{0,01}{0,5} = 0,02 & S'_2 = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 \\ S''_2 = \frac{0,05}{1} = 0,05 & S''_3 = \frac{0,01}{1} = 0,01 \end{cases}$$

$$S_{min} = 0,01 \rightarrow A = -20 \log S_{min} = 40 \text{ dB}$$

Para diseñar con ventanas de Kaiser:

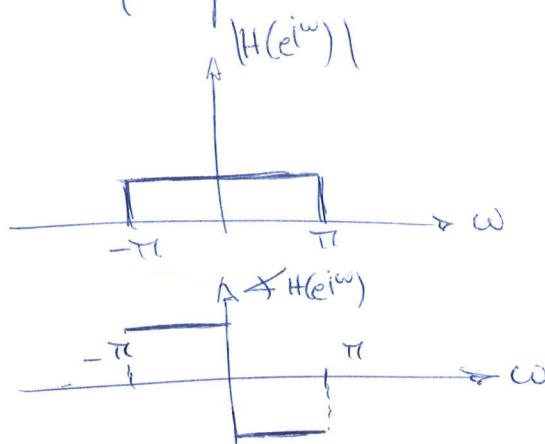
$$\beta = 3,39 \quad M = 90$$

Este filtro va es paso alto, por lo que la igual
que desplace H por a impair.

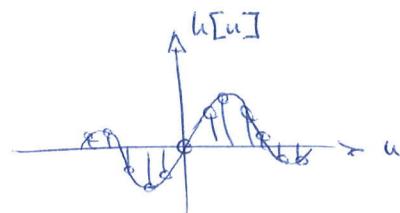
Referencia: Oppenheim 7.35

- FILTROS CON SIMETRÍA IMPAR:

Por ejemplo: transformador de Hilbert



$$\xrightarrow{\text{TF}^{-1}} h[n] = \frac{\sin^2 \frac{\pi(n-\alpha)}{2}}{\frac{\pi(n-\alpha)}{2}}$$



S. α entero y truncado \Rightarrow FIR III

S. α entero + $1/2$ y truncado \Rightarrow FIR IV

Amplitud: filtro paso-fondo. Al desplazar y truncar, la fase es lineal generalizada (o r!) pero,

• si FIR III, la amplitud tiene polos (ceros en $z=1$ y $z=-1$)

• si FIR IV, también (cero en $z=1$)

\Rightarrow mejor tipo IV, entonces, mejor desplazar entero + $1/2$

Sigue sin ser paso-fondo: limitación de la frecuencia de corte fija

(* 2.19, 2.20*)

- INCONVENIENTES DE LA TÉCNICA DE ENVENTANADO:

- No se consiguen soluciones óptimas para cumplir las especificaciones. Es sólo una de las muchas soluciones posibles.

Optimice el KSE.

Mejores soluciones: otras técnicas que sí optimizan.

Ejemplo:

$h_d[n]$, $H_d(e^{j\omega})$ = filtro ideal deseado

Aproximar con FIR $h[n]$, $H(e^{j\omega})$ tal que $h[n] \neq 0$ para $0 \leq n \leq M$ y 0 en el resto.

Elegir los $M+1$ valores de $h[n]$ tales que se minimice la función de error:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad \begin{array}{l} \text{(error cuadrático medio)} \\ \text{en frecuencia} \\ \uparrow \\ \text{criterio KSE} \end{array}$$

a) Paralelo → tiempo

$$\epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2$$

b) Minimizar ϵ^2 para $h[n]$

Como $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M$:

$$\epsilon^2 = \sum_{n \notin [0, M]} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=0}^M (h_d[n] - h[n])^2$$

← término de error

→ independiente de $h[n]$

para minimizarlo, basta con hacer $h_d[n] = h[n]$ para $n \in [0, M]$

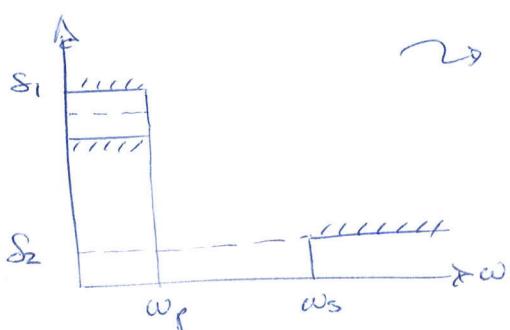
Entonces: $h[n] = h_d[n]$ para $n \in [0, M]$ y 0 en el resto
 ≈ función de respuesta

c) Usando ventaja:

Rectángulo de 0 a H $\Rightarrow h[n] = w[n]h_d[n]$

⇒ optimizar del error cuadrático medio en frecuencia (MSE)

las especificaciones suelen ser:



\Rightarrow no suele ser el criterio MSE el óptimo, pues se ajusta al filtro ideal, no sólo a las especificaciones (ej: banda de transición no impone su error).

Ventaja: optimiza también la banda de transición, obliga a ser $S_1 = S_2$, luego el ancho de las dos bandas irrever separadas; ademas, risada decreciente.

Conclusión: diseño con ventajas demanda límites (lo es el menor orden posible para una misma especificación)

2.4.- RIZADO UNIFORME

AKA filtras de rizado constante

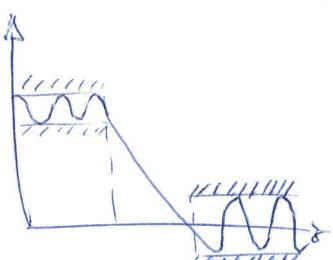
Criterio óptimo: minimizar el error máximo en la frecuencia

$$\min (\max |E(\omega)|), \text{ donde } |E(\omega) = W(\omega) |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|$$

$$y W(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_p \text{ y } \omega \geq \omega_s \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

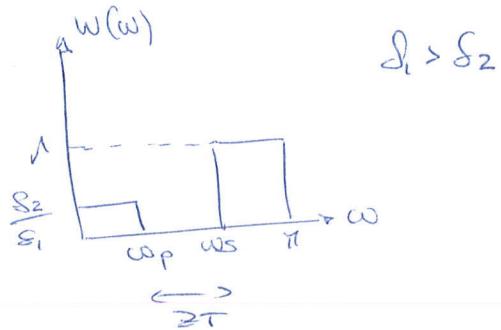
(elimina la banda de transición)

Resuestas del filtro rizado uniforme



Se usan métodos numéricos (Parks-McClellan) con distintas funciones $W(\omega)$, para rizos distintos en bandas de paso y rechazo

eje ejemplos:



peso inversamente proporcional
al rizado

Expresión práctica (aproximada) para peso bajo: $M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2,324(\omega_s - \omega_p)}$

Comparación ventaja de Kaiser: "...-8" vs "...-13" 2x menores coeficientes con filtos FIR óptimos

En MATLAB: firls(M,F,A,W) \Rightarrow filtro FIR óptimo
y rizado constante

(* 2.21 *)

TDS 1

TEMA 2

- retrato de grupo: $G(\omega) = -\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega}$ {unestros}

- FLG: $H(e^{j\omega}) = A(\omega) e^{-j\omega\alpha + j\beta}$, $A(\omega) \in \mathbb{R}$

- FPB ideal: $h_{FB}^{(k)}[u] = \frac{\sin ku}{\pi u}$

- Danielson: $h[u] = \frac{1}{P}, u=0:p$ $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{P} \frac{\sin \frac{\omega P}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{P-1}{2}}$

- Transformador de Hilbert: $h_{TH}[u] = \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2}}{\frac{\pi u}{2}}$

- Filtros FLG: $N = 2\alpha$, α = desplazamiento

• Tipo I: H par, simetría par, ω cero en $|z|=1$

• Tipo II: H impar, simetría par, $\omega_0 = -1$ \Rightarrow 

• Tipo III: H par, simetría impar, $\omega_0 = 1, -1$ \Rightarrow 

• Tipo IV: H impar, simetría impar, $\omega_0 = 1$ \Rightarrow 

- Propiedad: $\boxed{H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})}$ para $h[u]$ simétrica

- VENTANAS: $A = -20 \log S$

- Rectangular: $w[u] = 1, 0 \leq u \leq N$

$$\omega_S - \omega_P = \frac{1.8\pi}{N}$$

$$A = -21 \text{ dB}$$

- Hanning: $w[u] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi u}{N}$

$$\omega_S - \omega_P = \frac{6.6\pi}{N}$$

$$A = -53 \text{ dB}$$

$$\begin{array}{l} \text{• Butterworth: } w[n] = \begin{cases} \frac{2u}{\pi} & u=0 : \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2u}{\pi} & \frac{\pi}{2} : \pi \end{cases} \\ w_s - w_p = \frac{2,37\pi}{\pi} \\ A = -25 \text{ dB} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{• Hamming: } w[n] = 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi u}{H} \\ \omega_s - \omega_p = \frac{6,2\pi}{H} \\ A = -44 \text{ dB} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{• Blockhausen: } w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi u}{\pi} + 0,08 \cos \frac{4\pi u}{\pi} \\ \omega_s - \omega_p = \frac{11\pi}{\pi} \end{array}$$

$$A = -34 \text{ dB}$$

$$\begin{array}{l} \text{• Kaiser: } w[n] = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2u}{\pi} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)} \\ H = \frac{A - 8}{2,285 (\omega_s - \omega_p)} \end{array}$$

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A-8,7) & A > 50 \\ 1,5842(A-71)^{0,4} + 0,07886(A-71) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases}$$

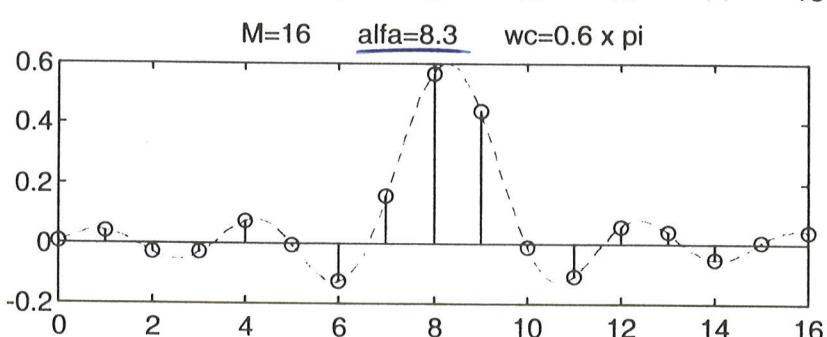
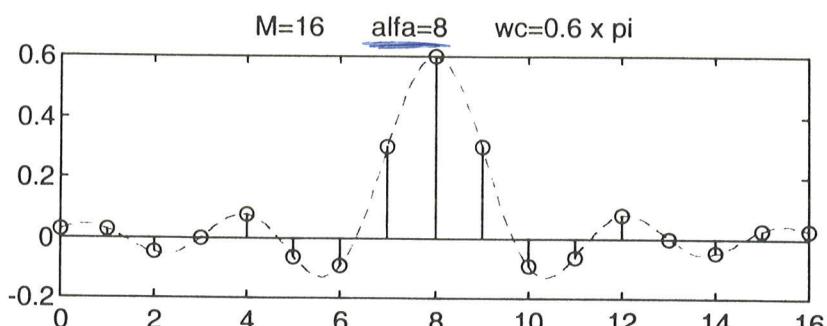
$$\begin{array}{l} \text{• FIR FILTER BANDA: } h[n] = \sum_{k=1}^N (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin \omega_k(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \\ G_{N+1} = 0, \quad \omega_N = \pi \end{array}$$

$$w_s - w_p = AZT = \min_i AZT; \quad S = \min_i S_i = \min_i \frac{S_i}{|G_{i+1} - G_i|}$$

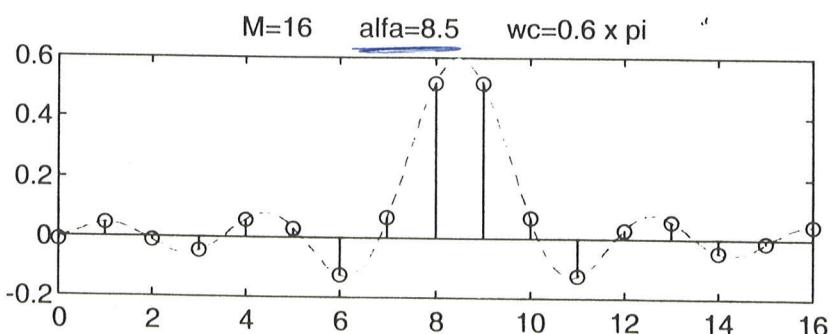
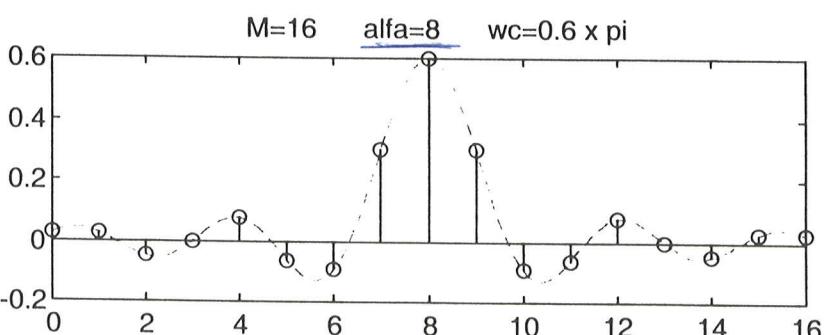
$$\begin{array}{l} \text{• Rizzi ADD CONSTANTE: } H \approx \frac{-10 \log S_1 S_2 - 13}{2,324 (\omega_s - \omega_p)} \end{array}$$

responde al impulso $h_{pb}[n]$ (desfazades α)

filtro paso bajo ideal



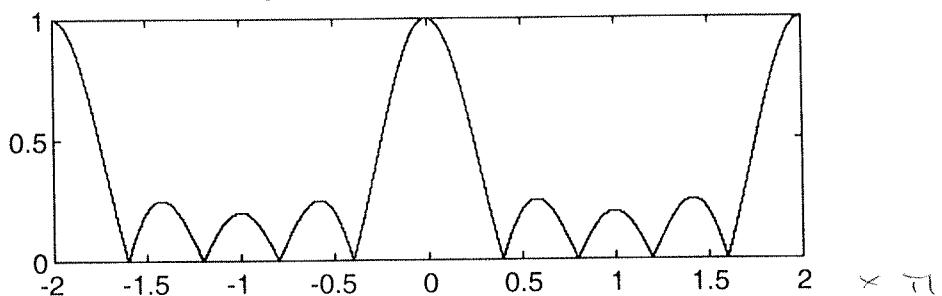
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1



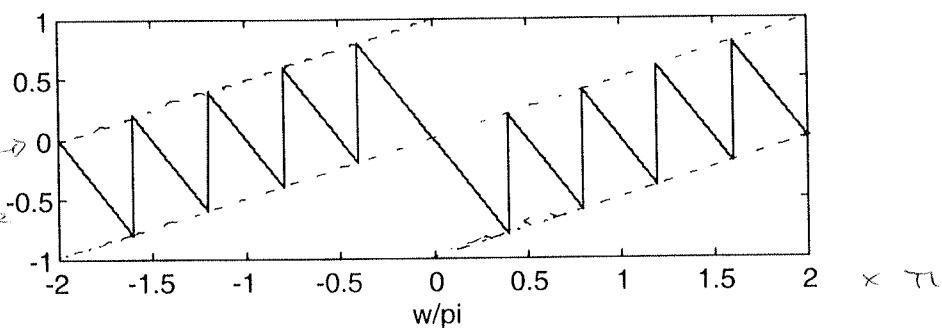
sistema FLC

→ propiedades

Sistema MA Módulo M=5

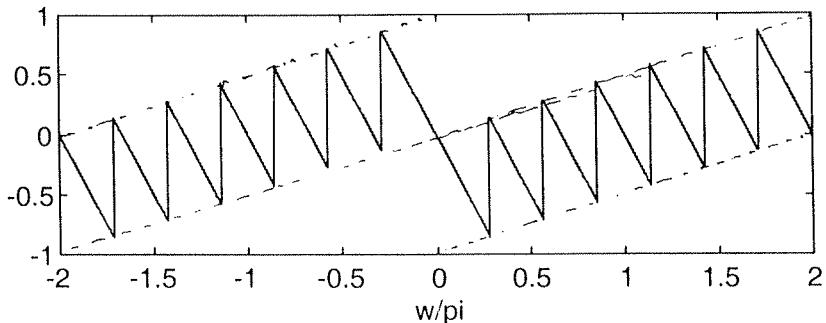
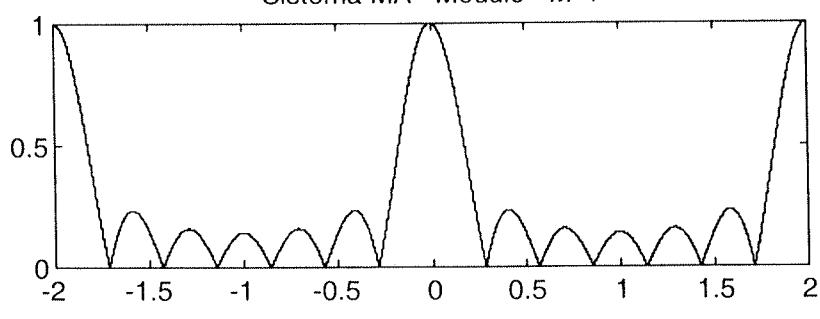


mismas propiedades
que en la respuesta lineal
⇒ no distorsiona en fase

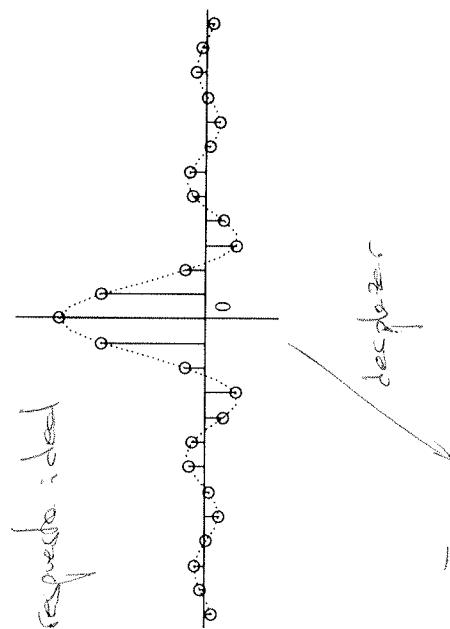
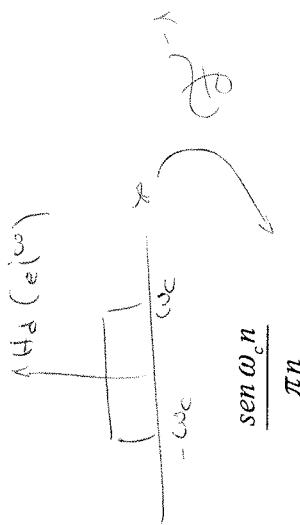


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

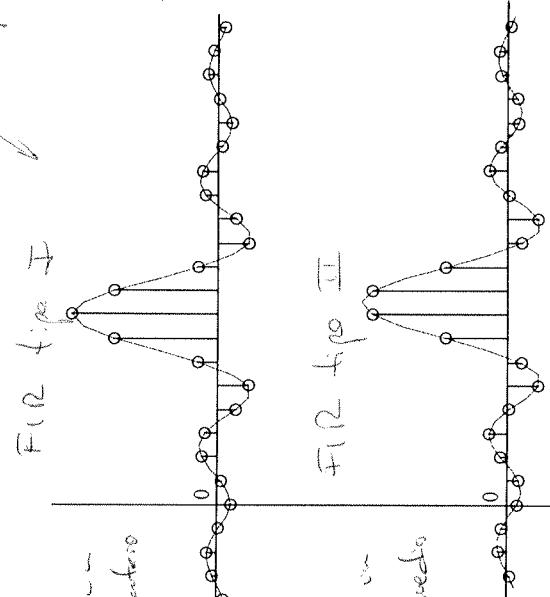
Sistema MA Módulo M=7



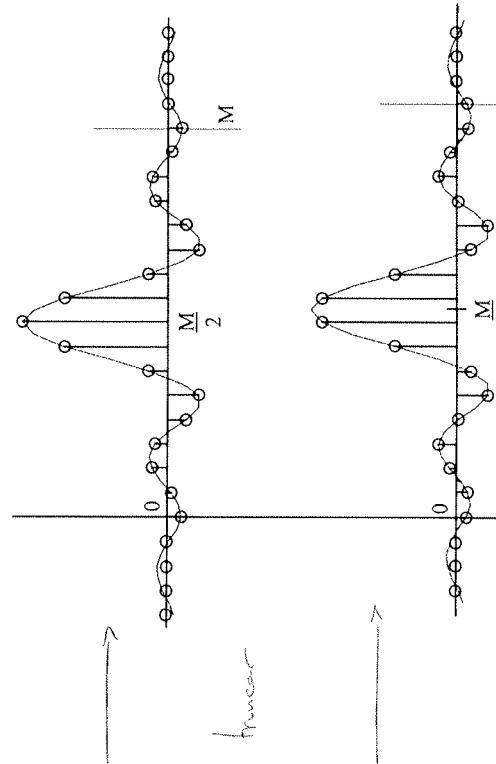
Leitura de filtros FIR-FIR



二〇

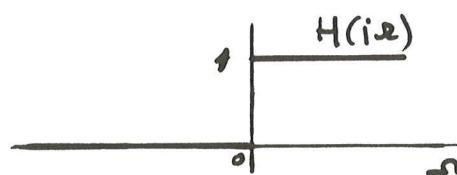


Sept 620 in
Prairie G. media

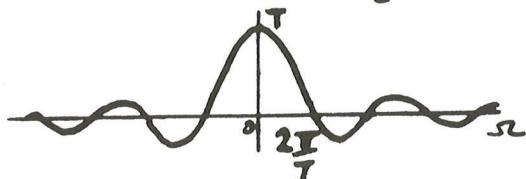


combines two See [located](#)
[Gutenberg](#)

convolución de sinc con escalón



$$W(i\omega) = \frac{\sin \frac{T\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\theta) \cdot H(i\omega - i\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\theta) d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & \theta > \pi \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$



Área total:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\theta) d\theta = \omega(0) = 1$$

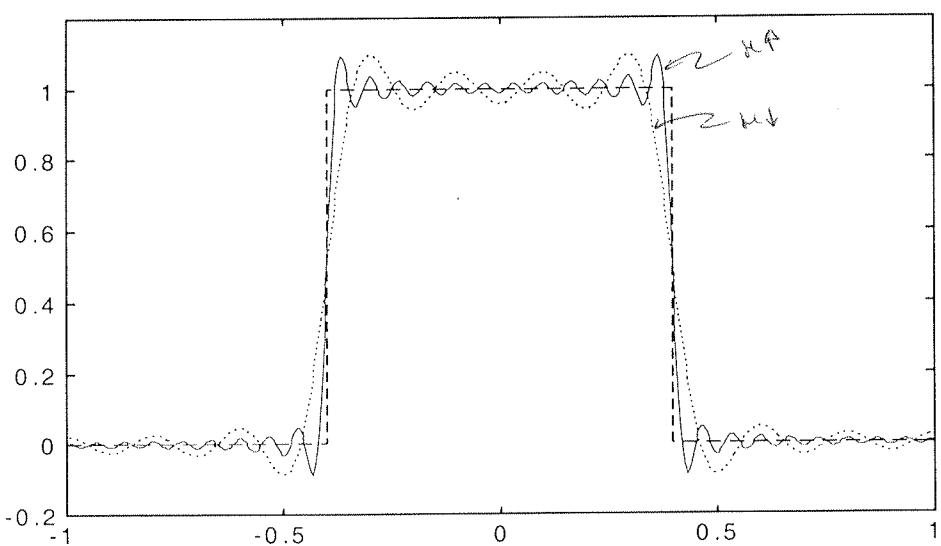
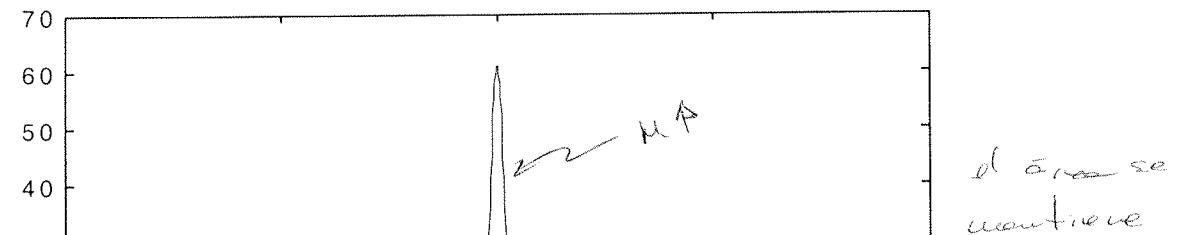
$w(i\omega)$

área = 0,99

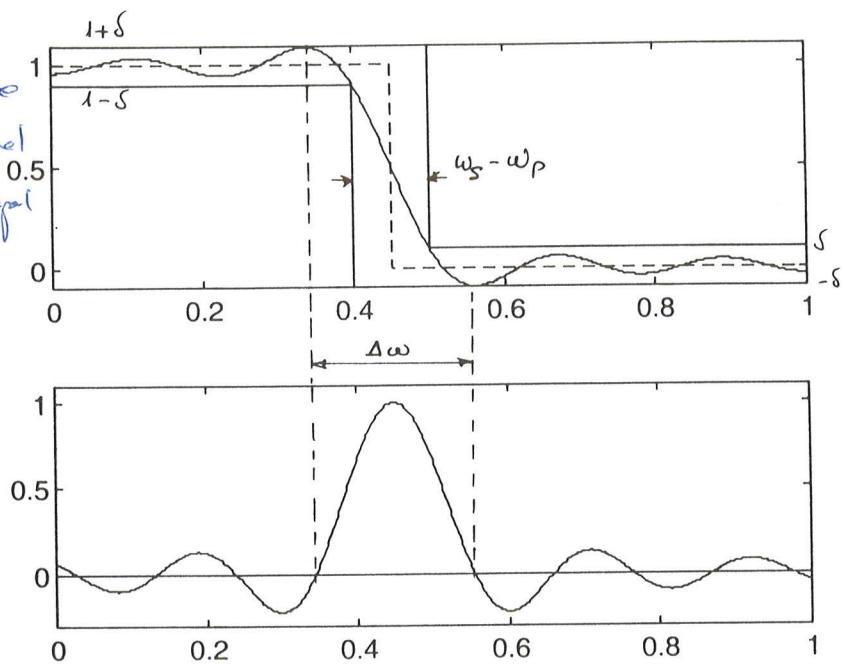
$H(i\omega) * w(i\omega)$

→ la anchura de la zona de transición no depende de la altura del escalón, sólo del ancho LB de la ventana

(el área de la anterior)



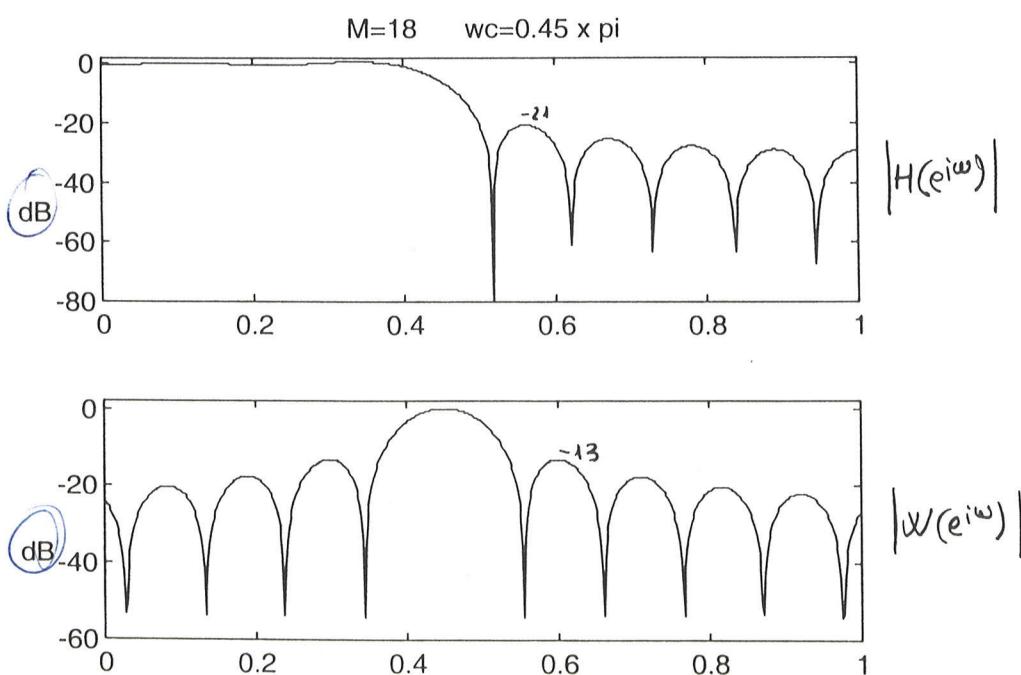
el ancho de la zona de transición depende del ancho del lóbulo principal de la respuesta.

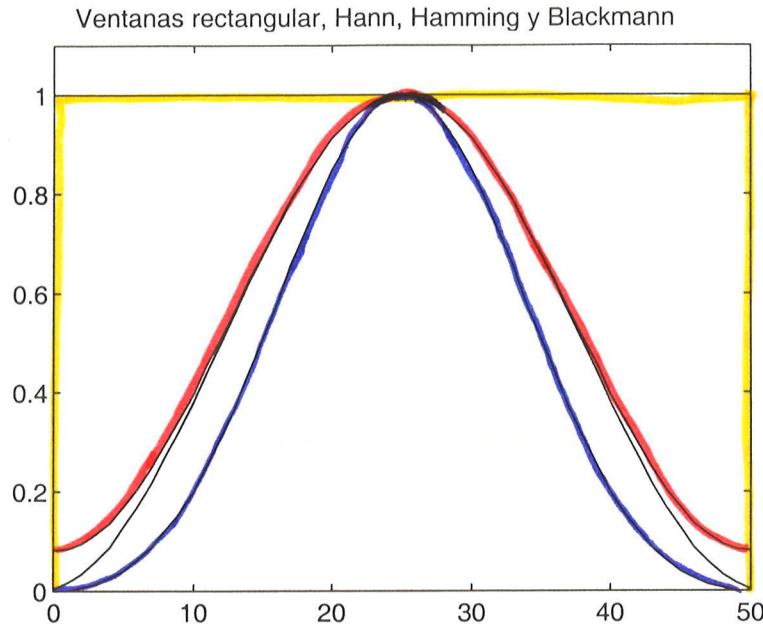


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

Ej: con ventana rectangular, $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.5\pi \rightarrow M=18$

$$w_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = 0.45\pi \quad \left| h[n] = \frac{\sin(0.45\pi(n-q))}{\pi(n-q)}, \quad 0 \leq n \leq 18 \right.$$




Rectangular

$$w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$$

 Bartlett
 (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$$

Hamming

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / M) \quad 0 \leq n \leq M$$

Hanning

$$w[n] = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / M) \quad 0 \leq n \leq M$$

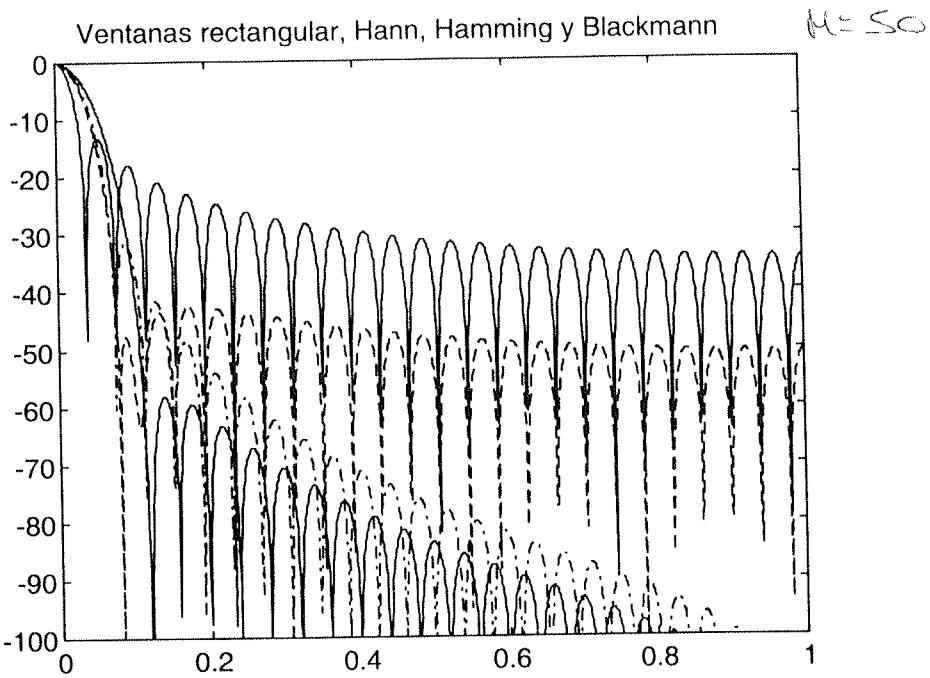
Blackmann

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n / M) + 0.08 \cos(4\pi n / M) \quad 0 \leq n \leq M$$

 se pone M porque se supone
 $\omega_p = \omega_{crossover}$

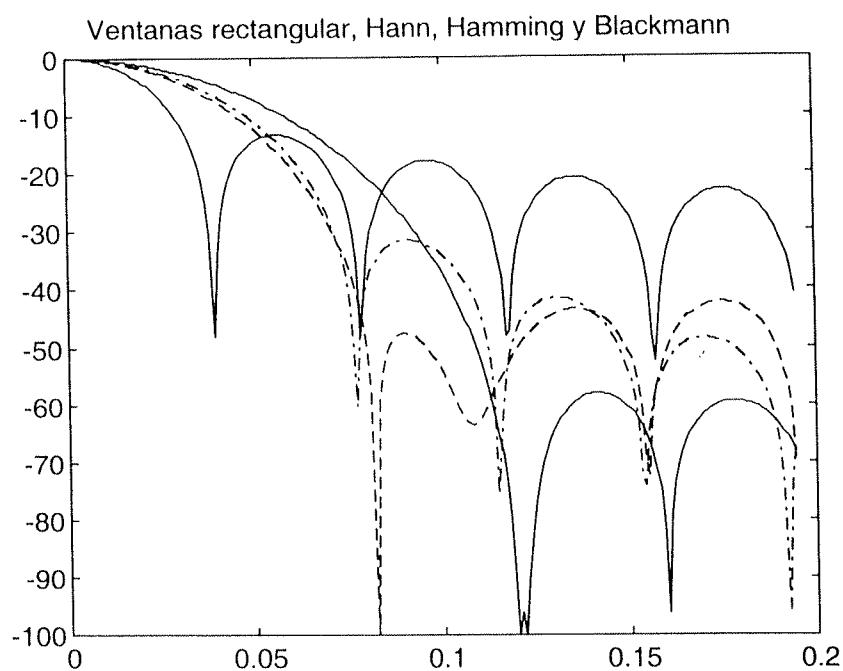
Diseño	Ventana		Filtro FIR	
Tipo	Anchura del lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación del lóbulo secundario α (dB)	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A = -20 \log_{10} \delta$
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	13	$1,81\pi/M$	21
Bartlett	$8\pi/M$	25	$2,37\pi/M$	25
Hanning	$8\pi/M$	31	$6,2\pi/M$	44
Hamming	$8\pi/M$	41	$6,6\pi/M$	53
Blackmann	$12\pi/M$	57	$11\pi/M$	74

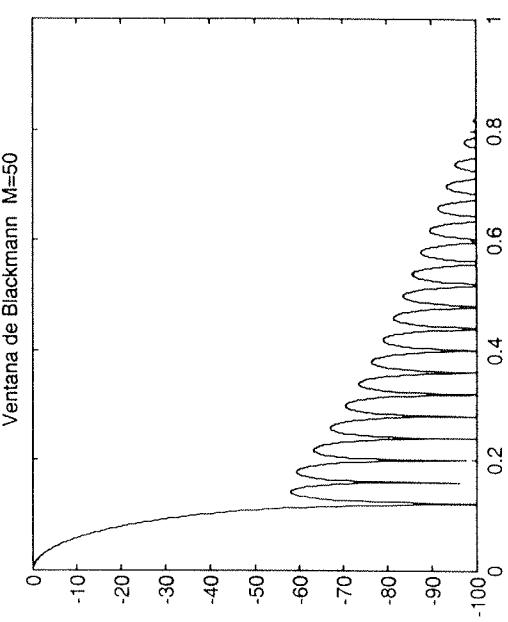
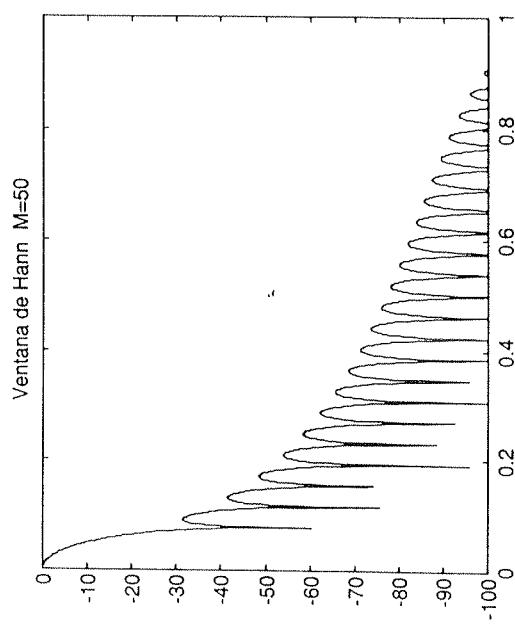
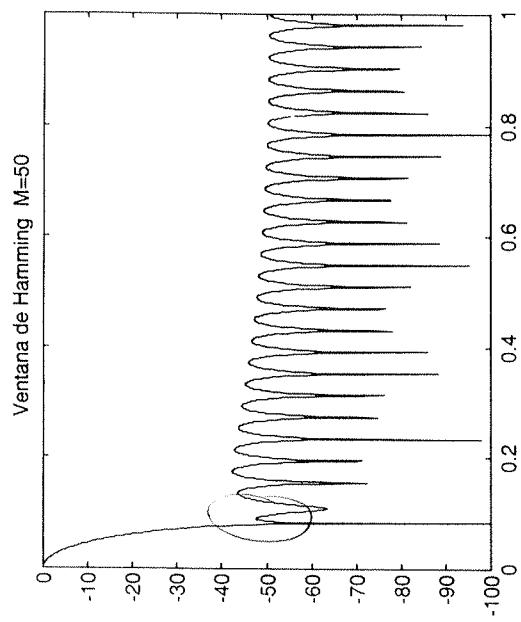
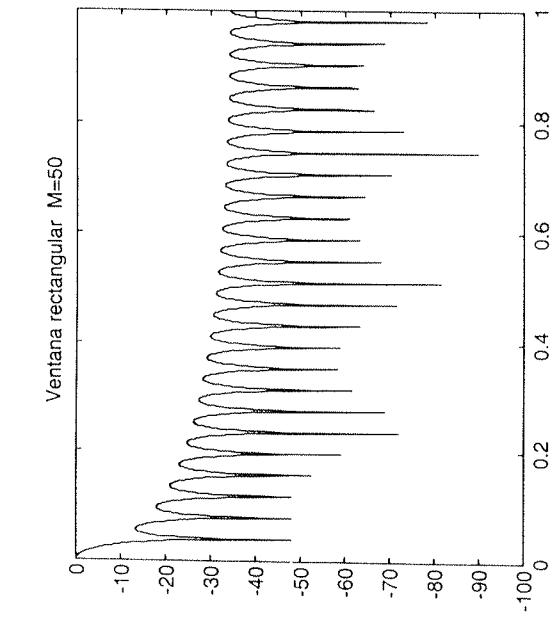
 nivel de rizado con
 el círculo cambiado 19



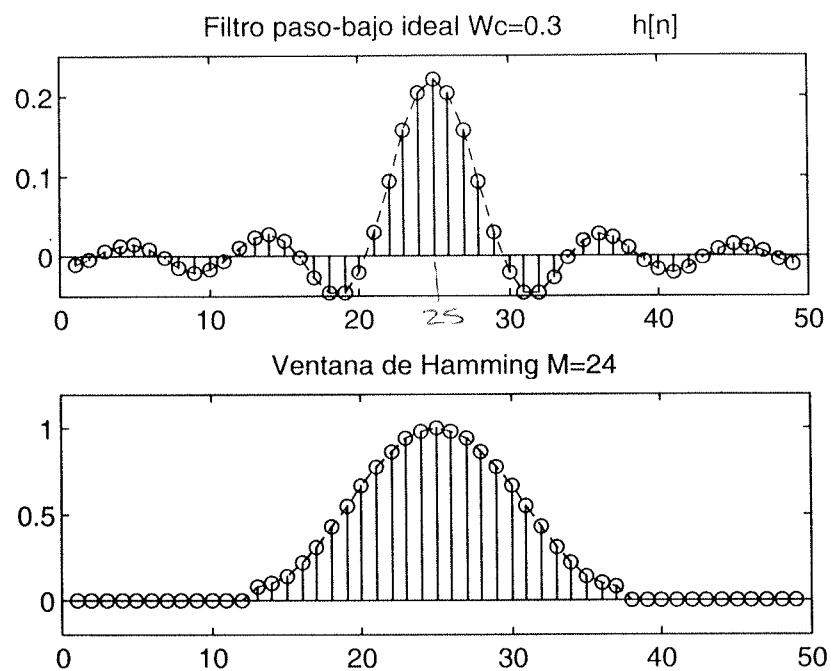
Comparar áreas es igual que compar amplitud, ya que las escalas son aprox. iguales entre ventanas

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

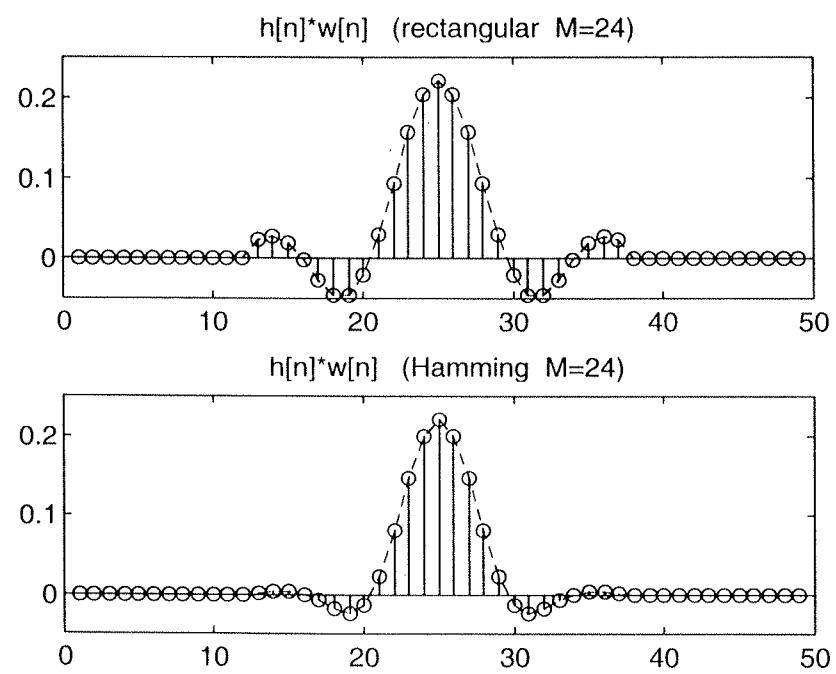


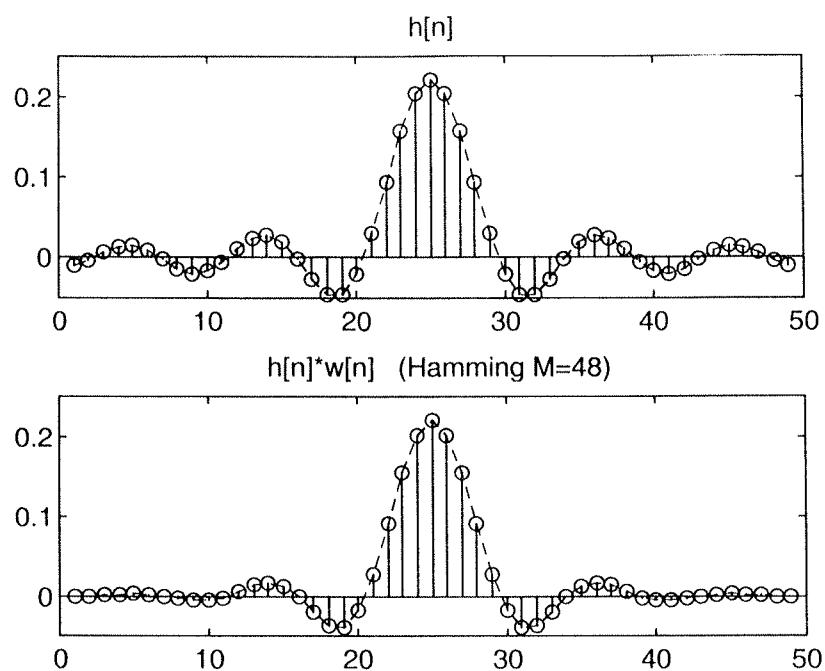


$$f_c = 24 \quad , \quad \omega_a = 0.13$$

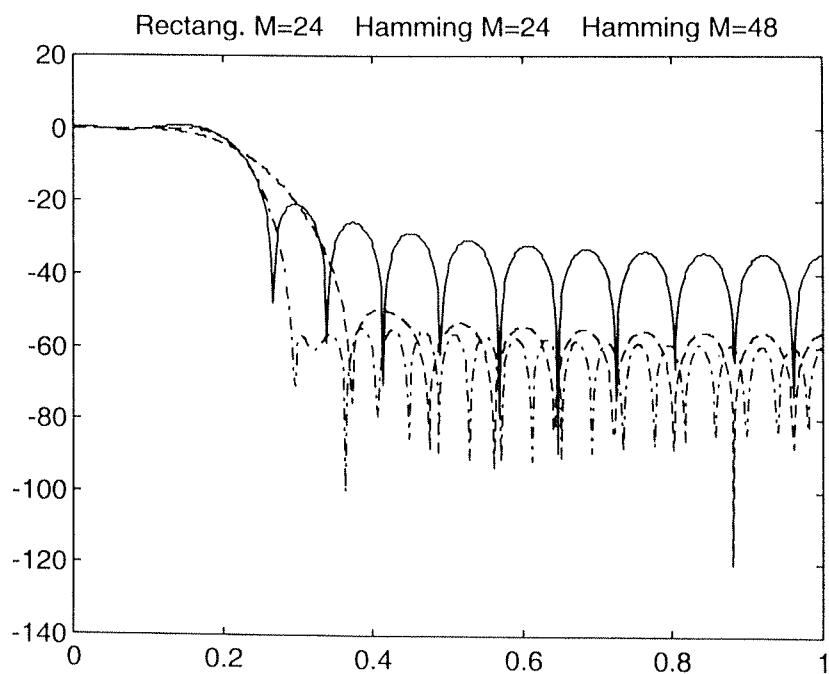


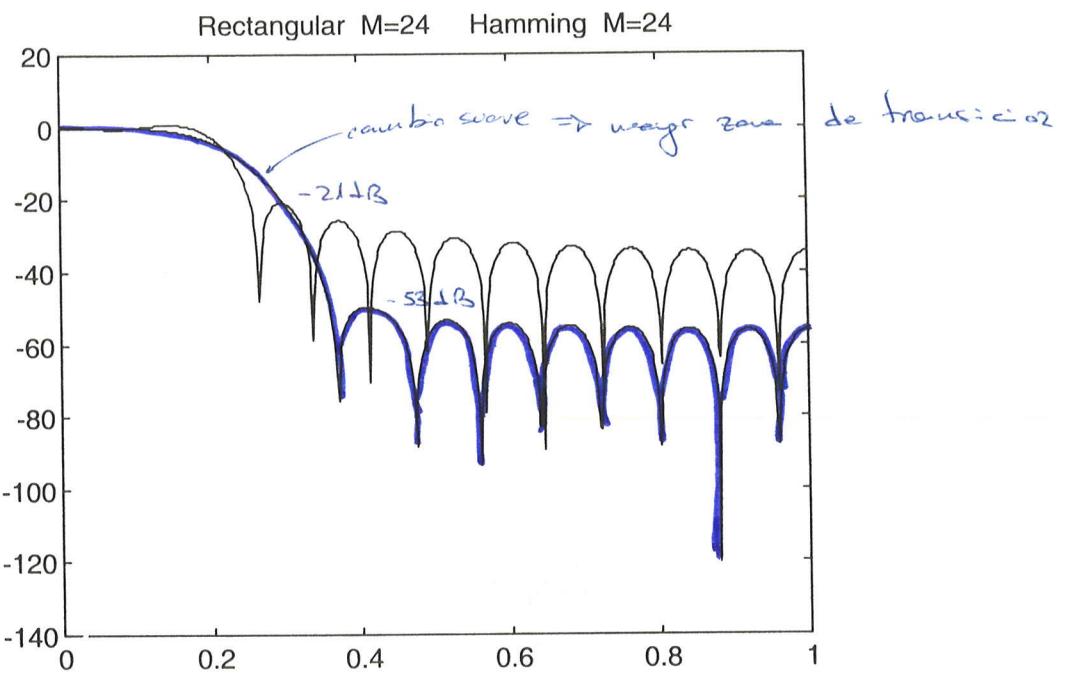
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1



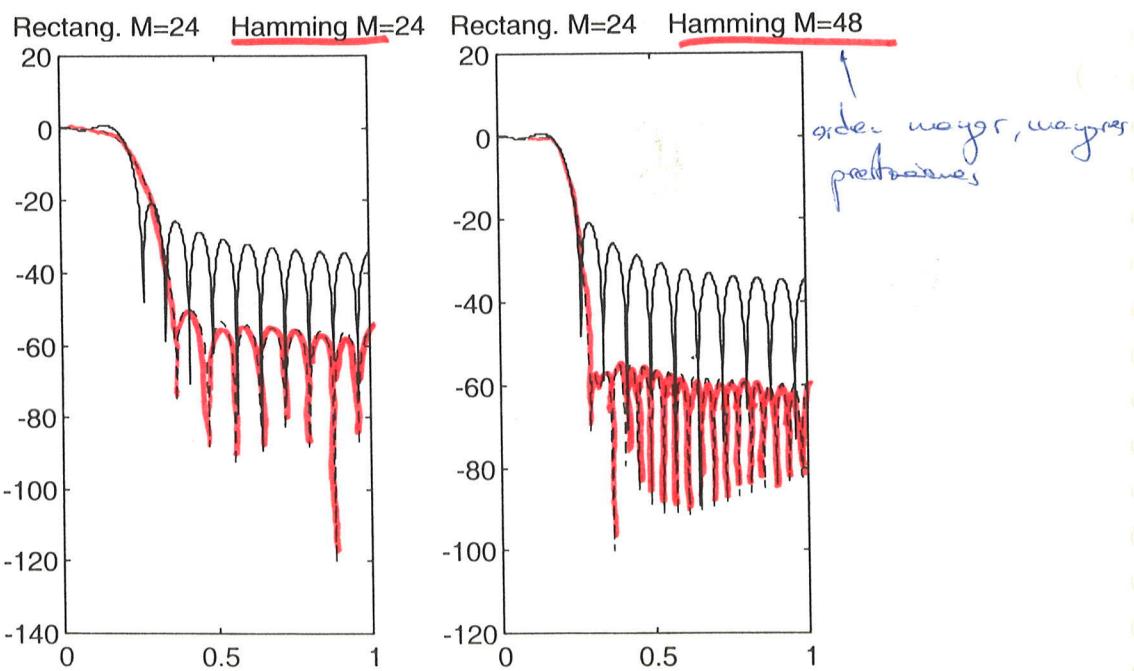


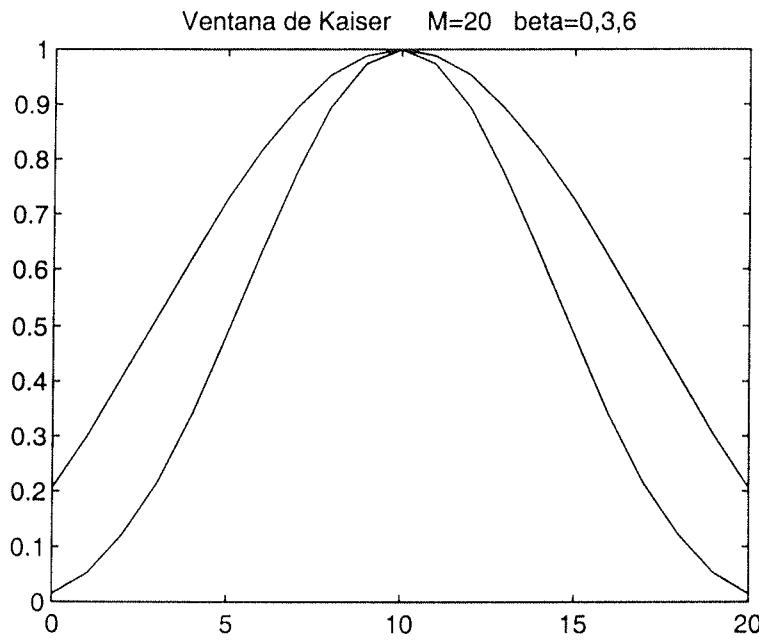
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1





Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1





$I_0 = \text{Bessel}$

$$\left\{ \begin{array}{l} w[n] = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (1 - 2n/M)^2})}{I_0(\beta)} \\ \quad \quad \quad 0 \leq n \leq M \end{array} \right.$$

β = factor de forma

Diseño:

$$\text{Zona de transición} \quad \omega_s - \omega_p \quad \text{Rizado} \quad A = -20 \log_{10} \delta$$

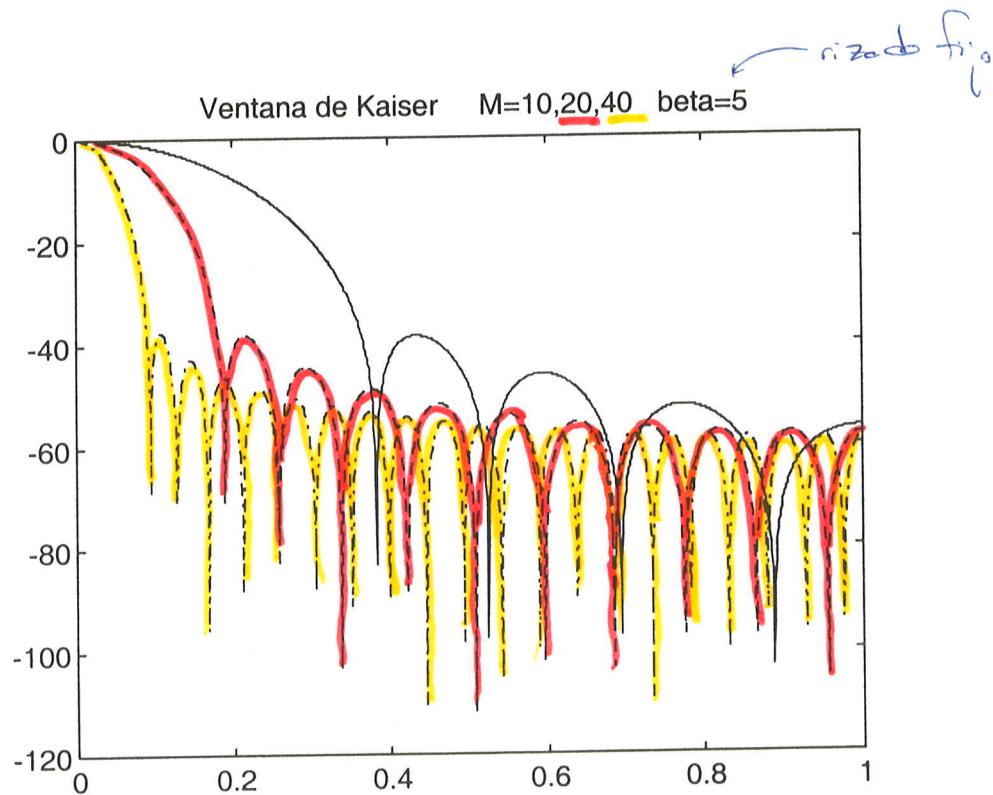
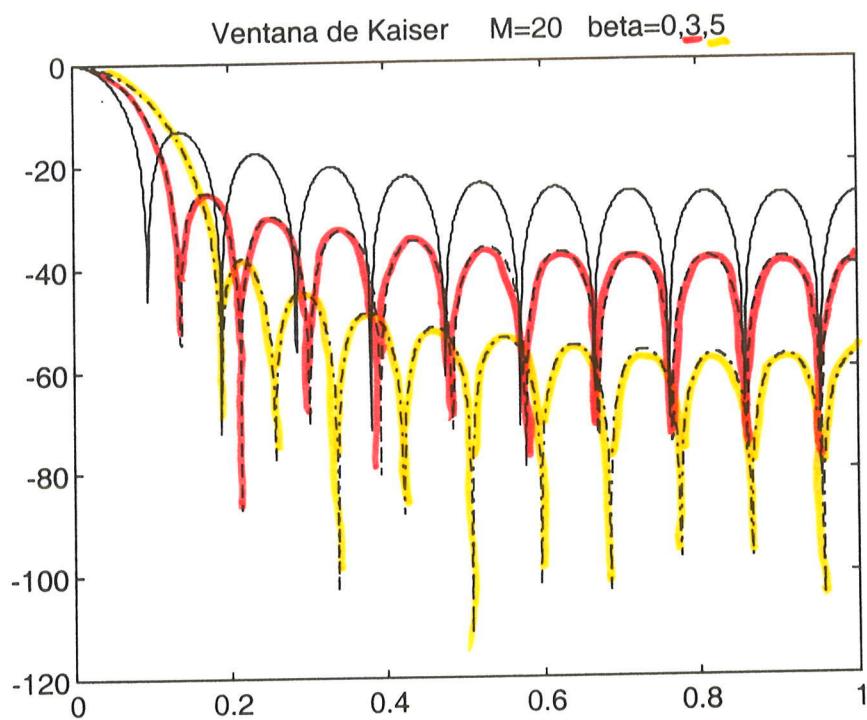
$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A-8,7) & A > 50 \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases}$$

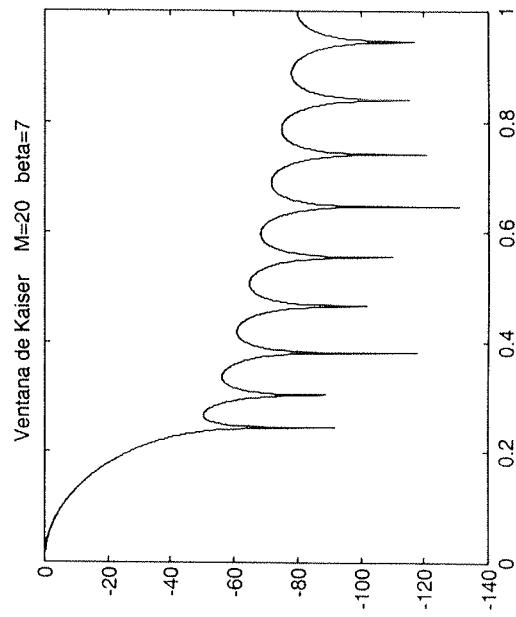
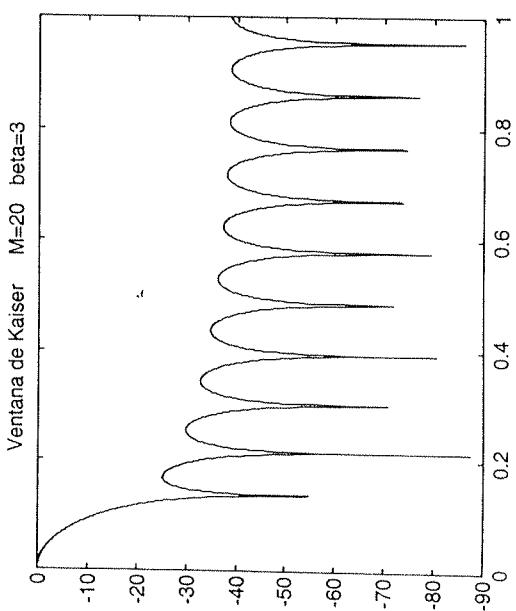
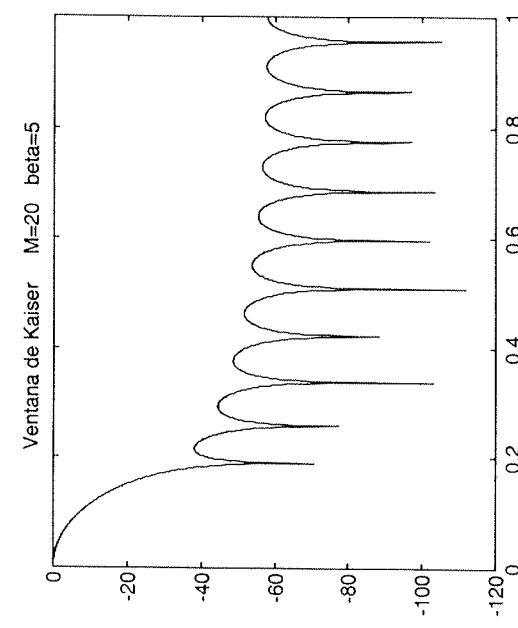
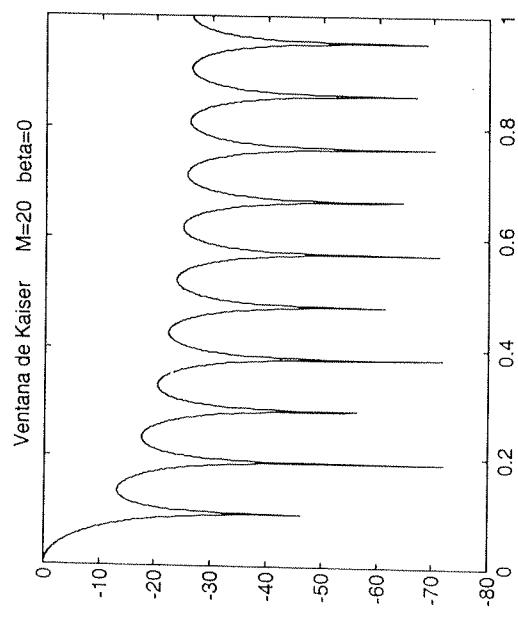
$$M = \frac{A-8}{2,285(\omega_s - \omega_p)}$$

ventana rectangular

$\beta = f(A) \leftarrow$ la forma depende del rizado

$$\mu = f(A, \omega_s - \omega_p)$$

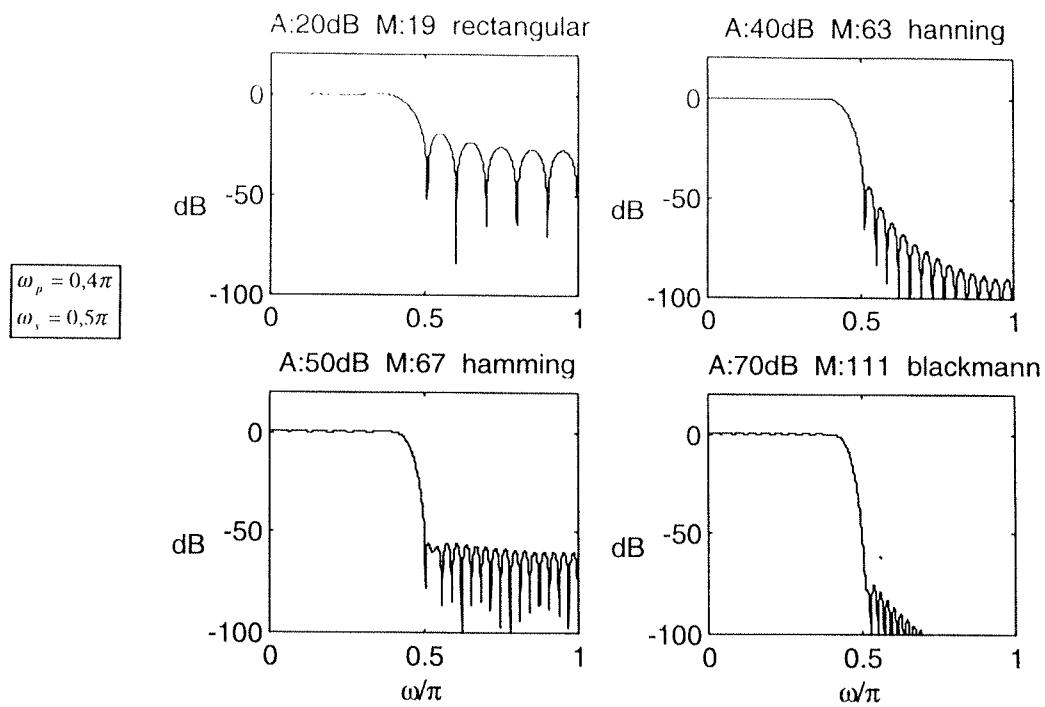




Tipo	Ventana		Filtro FIR		Kaiser	
	Anchura del lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación del lóbulo secundario α (dB)	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A(\text{dB}) = -20\log\delta$	β para igual rizado	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	13	$1,81\pi/M$	21	0	$1,81\pi/M$
Bartlett	$8\pi/M$	25				
Hanning	$8\pi/M$	31	$6,2\pi/M$	44	3,86	$5,01\pi/M$
Hamming	$8\pi/M$	41	$6,6\pi/M$	53	4,86	$6,27\pi/M$
Blackmann	$12\pi/M$	57	$11\pi/M$	74	7,04	$9,19\pi/M$

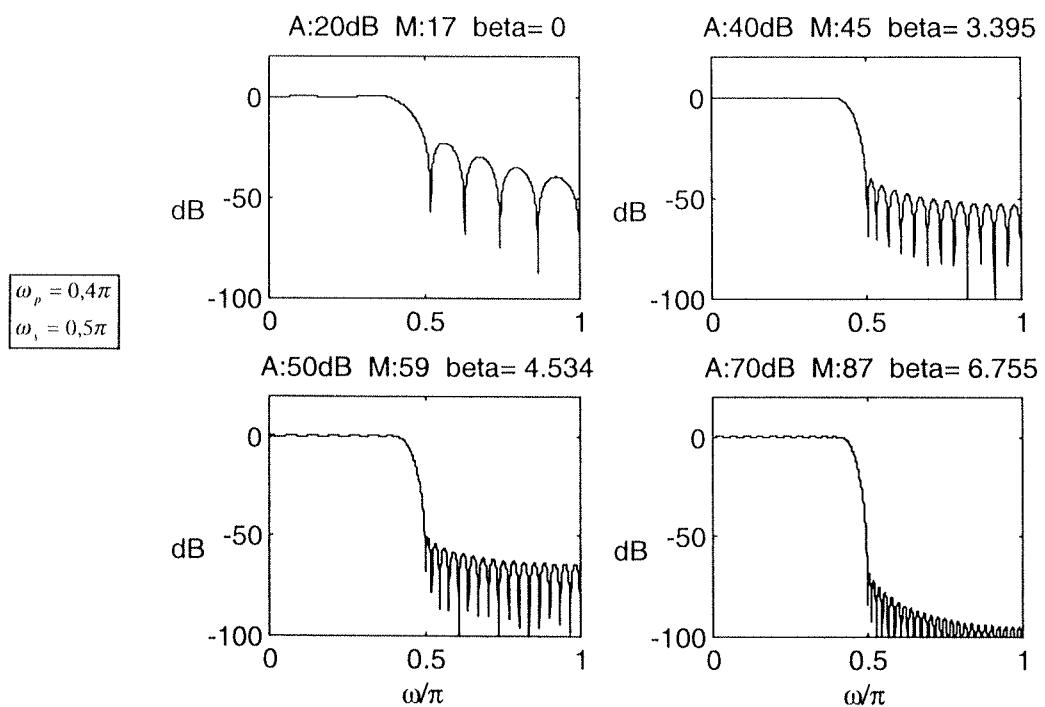
Ventana de Kaiser

β	Atenuación del lóbulo secundario α (dB)	Anchura de la zona de transición ($\times 2\pi / M$) $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A = -20 \log_{10} \delta$
2	19	1,5	29
3	24	2,0	37
4	30	2,6	45
5	37	3,2	54
6	44	3,8	63
7	51	4,5	72
8	59	5,1	81
9	67	5,7	90
10	74	6,4	99



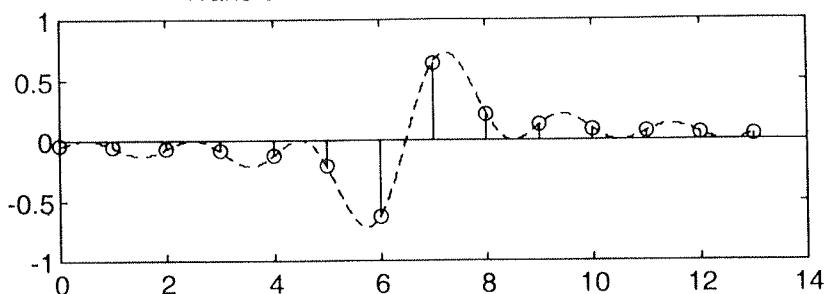
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

Ventana de Kaiser



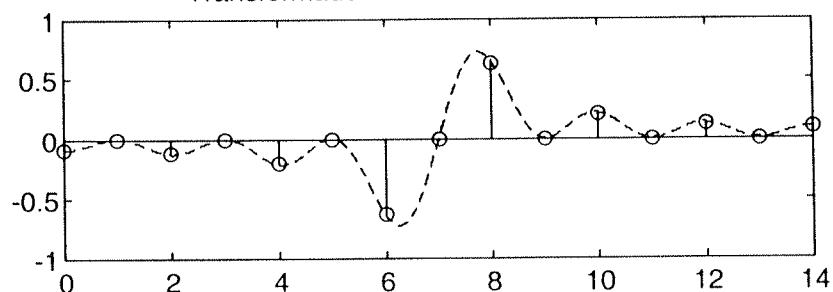
responde al impulso del transformador de Hilbert
con entrelazado

Transformador de Hilbert FIR de orden 13



FIR tipo IV

Transformador de Hilbert FIR de orden 14

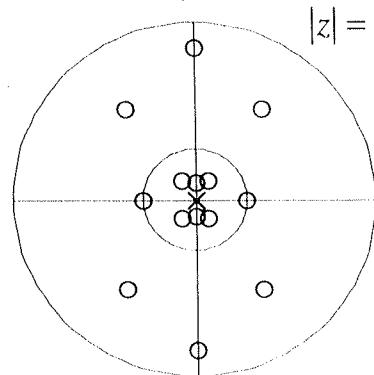


FIR tipo III

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

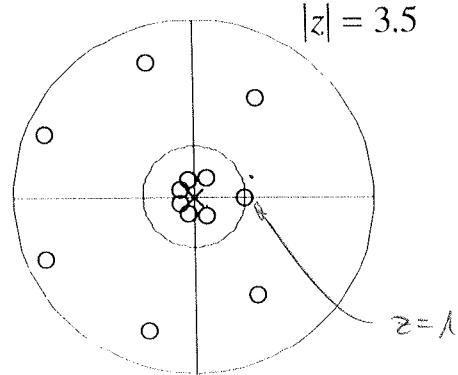
$M = 14$

(FIR tipo III)

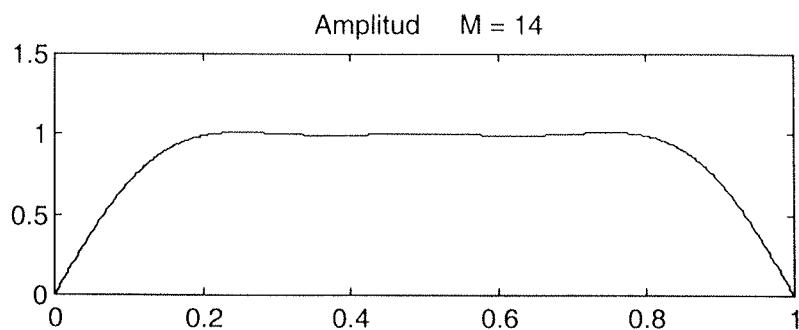


$M = 13$

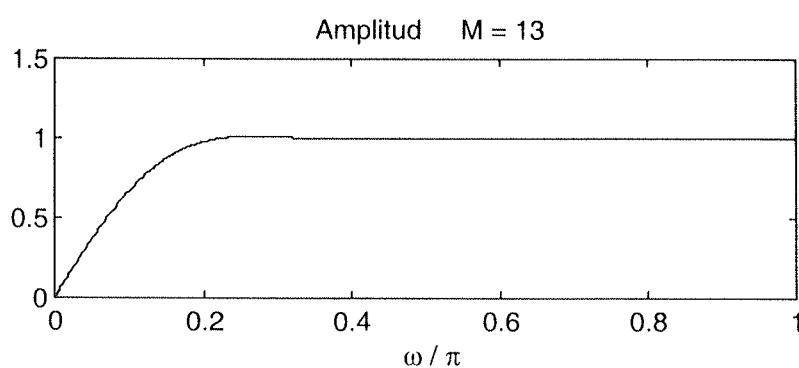
(FIR tipo IV)



Resposta en Frecuencia del Transmisor de Hilbert

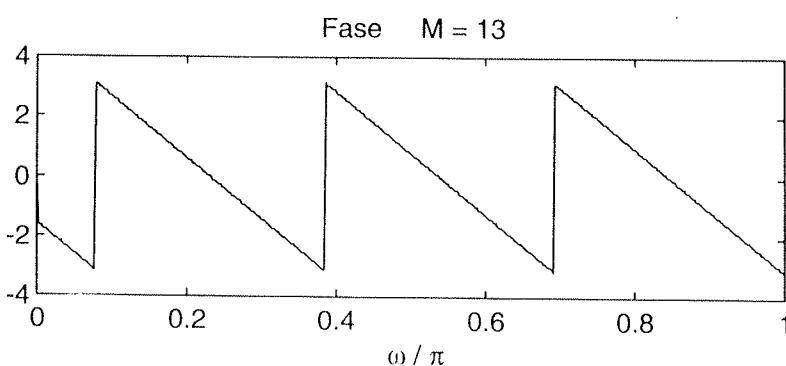
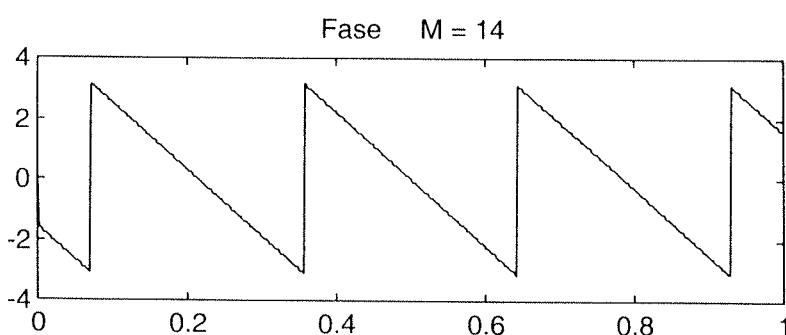


tipo III



tipo IV

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1



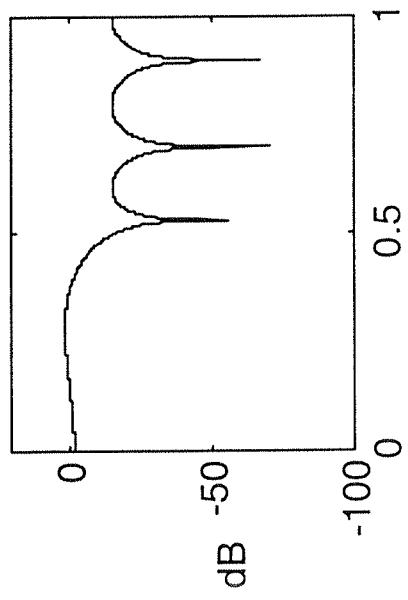
31

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. TDS-1

2.20

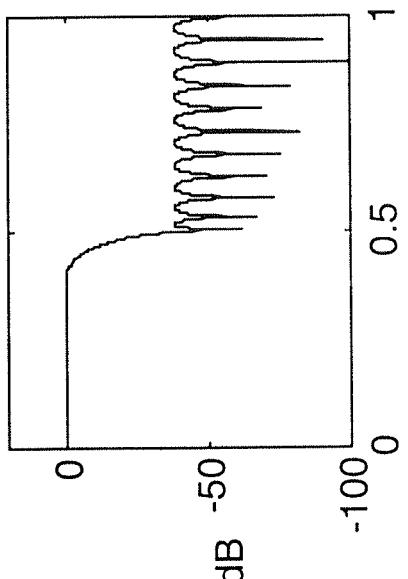
Carlos Beltrán

A:20dB M:10 Rizado unif.

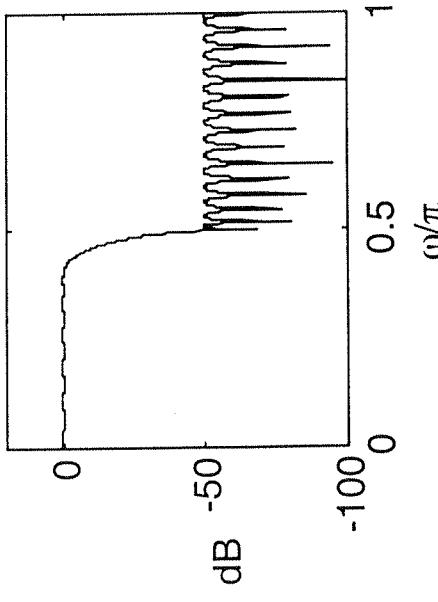


$$\begin{cases} \omega_p = 0.4\pi \\ \omega_s = 0.5\pi \end{cases}$$

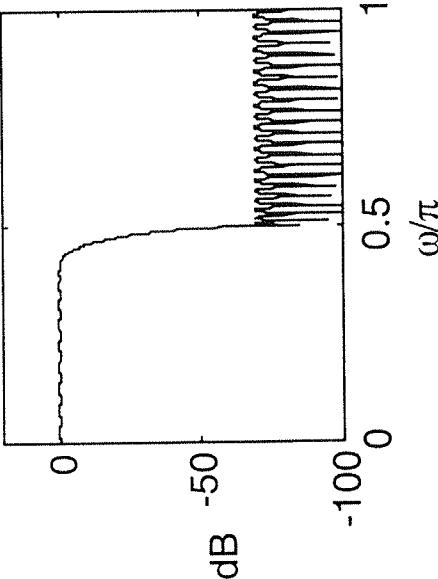
A:40dB M:37 Rizado unif.



A:50dB M:51 Rizado unif.



A:70dB M:79 Rizado unif.



Filtros con rizado uniforme