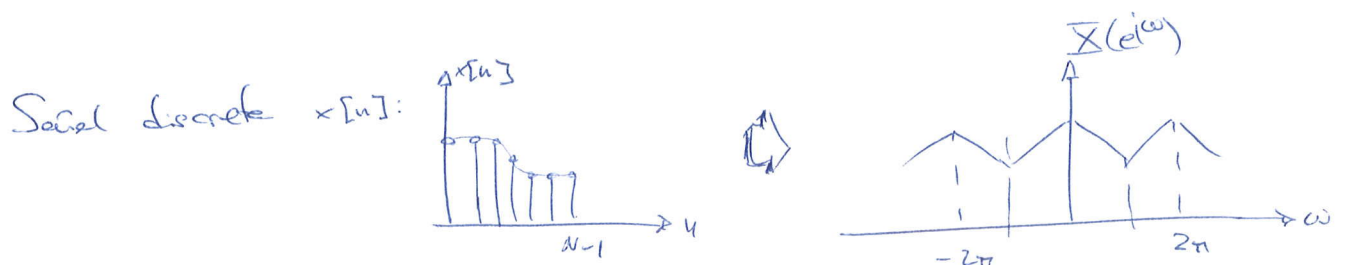


# TEMA 4: TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

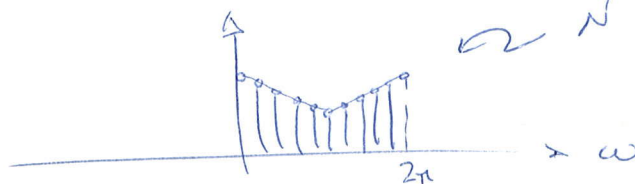
- 1.- INTRODUCCIÓN
- 2.- SERIE DE FOURIER DISCRETA
- 3.- MUESTREO EN FRECUENCIA
- 4.- LA DFT
- 5.- CÁLCULO EFICIENTE DE LA DFT: EL ALGORITMO FFT

## 1.- INTRODUCCIÓN



$X(e^{j\omega})$  es continua, vamos a buscar un espectro discreto

DFT<sub>N</sub>  
↘



↖ N muestras equiespaciadas entre 0 y  $2\pi$

Algoritmo FFT: pasa de  $x[n]$  → espectro discreto

$$z[n] = x[n] * y[n]$$

$$\begin{array}{l} x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_k \\ y[n] \xrightarrow{\text{DFT}} Y_k \end{array} \left\{ \begin{array}{l} X_k Y_k \xrightarrow{\text{DFT}^{-1}} z[n] \end{array} \right.$$

esto puede hacerse la otra  
 $\Rightarrow$  una operación que la  
 convolución

Conviene recordar:

- DFT = Serie de Fourier Discreta
- Muestreo en frecuencia: ocurre lo dual que cuando se muestrea en el tiempo

## 2.- SERIE DE FOURIER DISCRETA

Sea  $\tilde{x}[n]$  periódica, de periodo  $N$  muestras

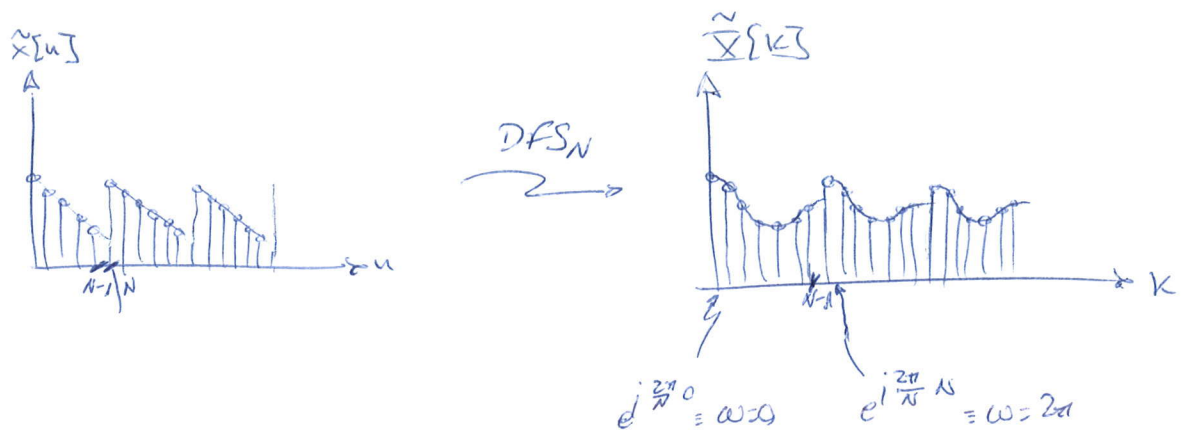
pulsos fundamental:  $\omega_c = \frac{2\pi}{N}$

Se puede expresar como suma de sus armónicas:

$$\text{IDFSN} \rightarrow \boxed{\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} k n}} \quad \tilde{X}[k] \equiv \text{coeficientes del desarrollo en series, periódicas}$$

$e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$  es periódica de periodo  $N \Rightarrow$  sólo se necesitan  $N$  armónicas

$$\text{DFSN} \rightarrow \boxed{\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}}$$



- Propiedades de la DFS:

1.- Linealidad: si tenemos el mismo periodo

2.- Desplazamiento:

$$\tilde{x}[n-m] \xrightarrow{\text{DFS}_N} \tilde{X}[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot m}$$

$$\tilde{x}[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nl} \xrightarrow{\text{DFS}_N} \tilde{X}[k-l]$$

3.- Simetría:

$$\text{Si } \tilde{x}[n] \text{ es real} \longrightarrow \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \quad (\text{hermiticidad})$$

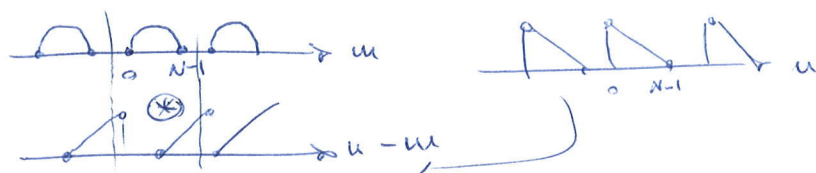
4.- Convolución:

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{TF}} \tilde{X}_1(e^{j\omega}) \tilde{X}_2(e^{j\omega})$$

$$\tilde{x}_1[n] \otimes x_2[n] \xrightarrow{\text{DFS}_N} \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k] \quad (\text{mismo periodo})$$

convolución periódica:

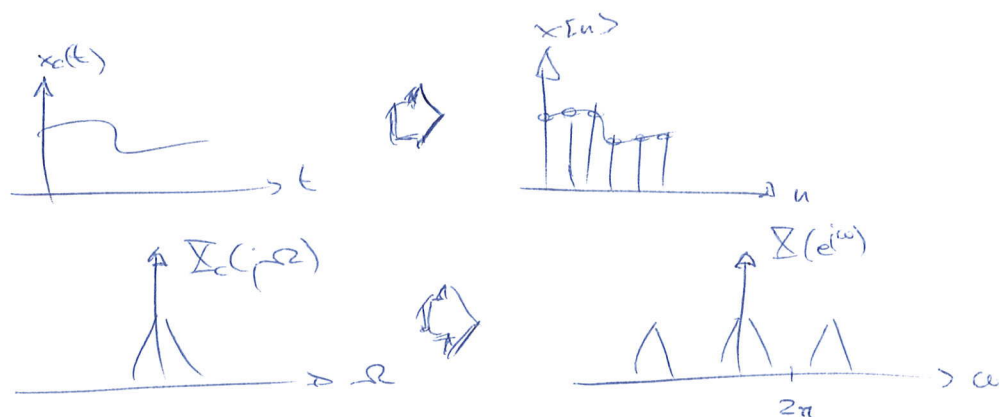
$$\tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m]$$



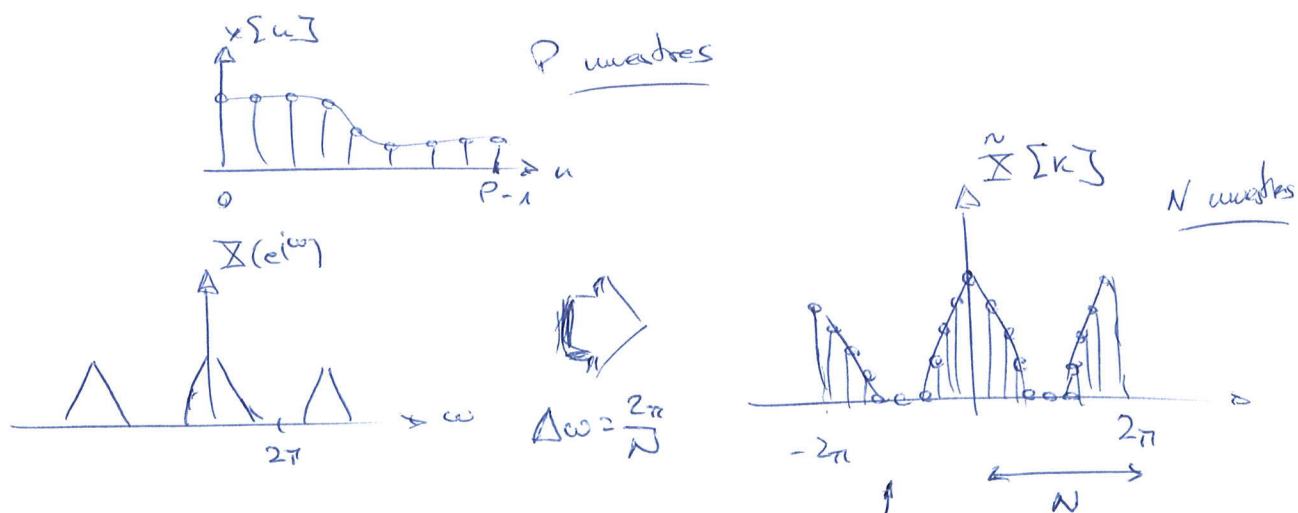
2. La señal resultante es periódica del mismo período,  $N$ .

### 3. - MUESTREO EN FRECUENCIA

en el tiempo:



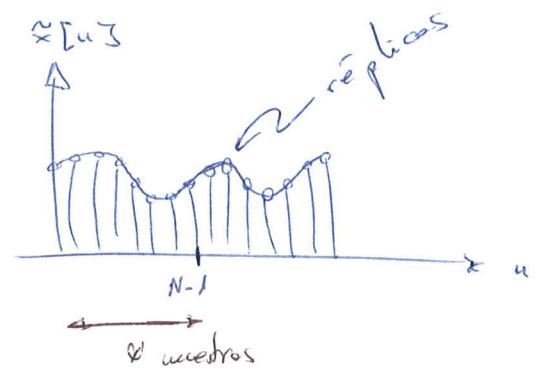
### - Muestreo en la frecuencia:



coeficientes de una señal periódica en el tiempo, de período  $N$



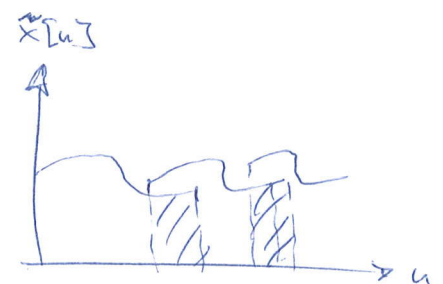
$$\tilde{x}[u] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[u-rN]$$



Si no hay solapamiento en el tiempo, se puede hacer el muestreo en la frecuencia

$$\Rightarrow \boxed{\text{condición: } N \geq P}$$

aliasing en el tiempo



#### 4.- LA DFT

Obtiene, a partir de una señal discreta de  $N$  puntos, el espectro discreto de la misma, con  $N$  puntos equiespaciados entre  $0$  y  $2\pi$

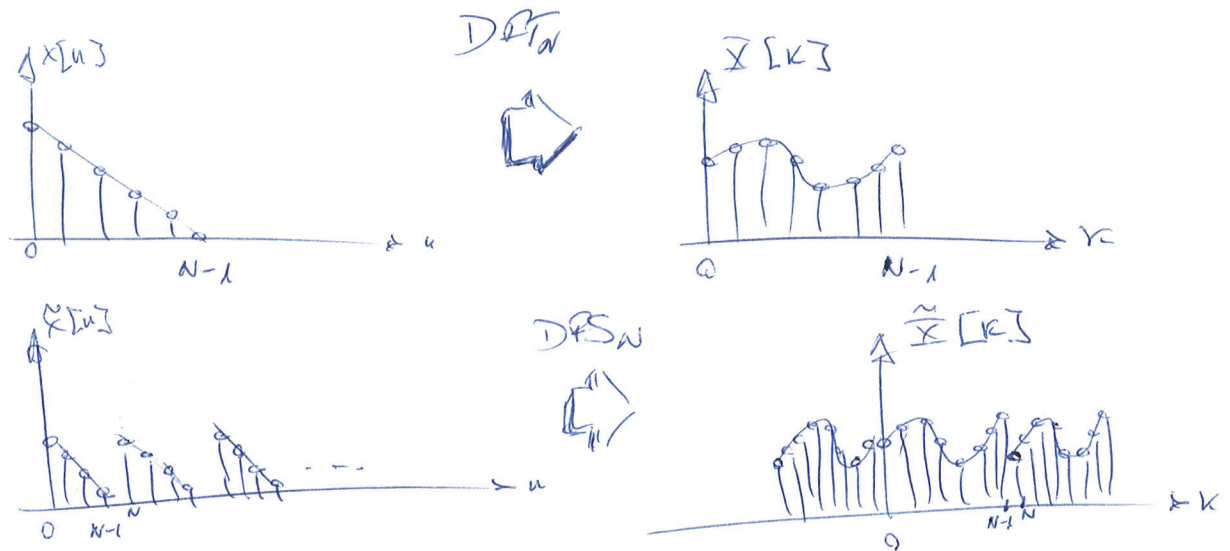
$$\Rightarrow \text{muestras en } \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

$$\underline{\text{DFT}_N} : \boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}} \quad k = 0 : N-1$$

$$\underline{\text{IDFT}_N} : \boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}} \quad n = 0 : N-1$$

Al hacer  $DFT_N$ :  $N$  valores en tiempo  $\rightarrow N$  valores en frecuencia  
 $\Rightarrow$  justo en el límite del aliasing ( $N=P$ )

- Relación  $DFT_N \leftrightarrow DFS_N$ :



$$\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$$

(extensión periódica de  $x[n]$ )

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

$$(n)_N \equiv n \bmod N$$

Como en  $\tilde{X}[k]$  sólo se suma un período de  $\tilde{x}[n]$ ,  
 será  $\tilde{x}[n] = x[n]$  en el mismo:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \boxed{X[k] = \tilde{X}[k], \quad k = 0:N-1}$$

La DFT es el período principal de la DFS de una señal.

(\* 4.1 \*)

→ La DFT de una secuencia es periódica coincidiendo con el período principal de la DFS de la extensión periódica de la secuencia inicial.

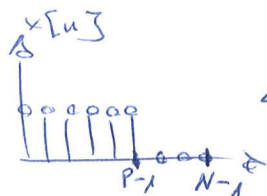
- Uso de la DFTN con  $x[n]$  de duración  $P \neq N$ :

$$\bar{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k=0:N-1$$

$$(N > P) \quad x[n] = 0 \text{ para } n \geq P \Rightarrow \bar{X}[k] = \sum_{n=0}^{P-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k=0:N-1$$

La DFT tiene  $N$  puntos  $\Rightarrow$  ceros entre  $P$  y  $N$

→ técnica de "zero-padding"



← sobre esto se calcula la DFT

$\Rightarrow$  se obtiene mayor resolución del espectro

Sin embargo, si  $N < P$ , el resultado no se corresponde con el espectro muestreado de la señal de partida (es otra señal, truncada de la original)

$\Rightarrow$  no sirve para nada

Ejemplo: (\* 4.2 \*)  $\rightarrow$  espectros de una señal con 5, 10, 20 y 40 puntos de DFT.

Apéndice 8.21 - 8.22:

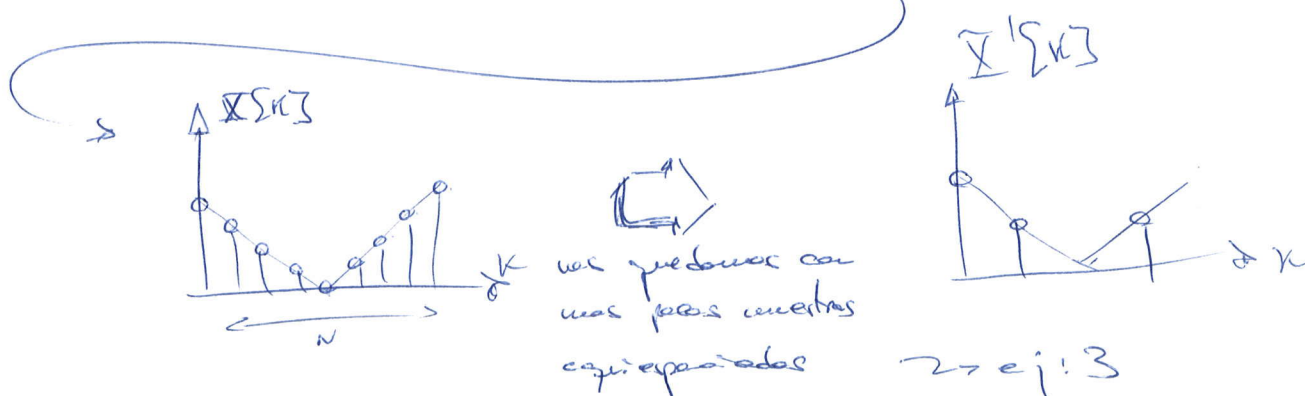
- N muestras del espectro de  $x[n]$  con  $N > P$

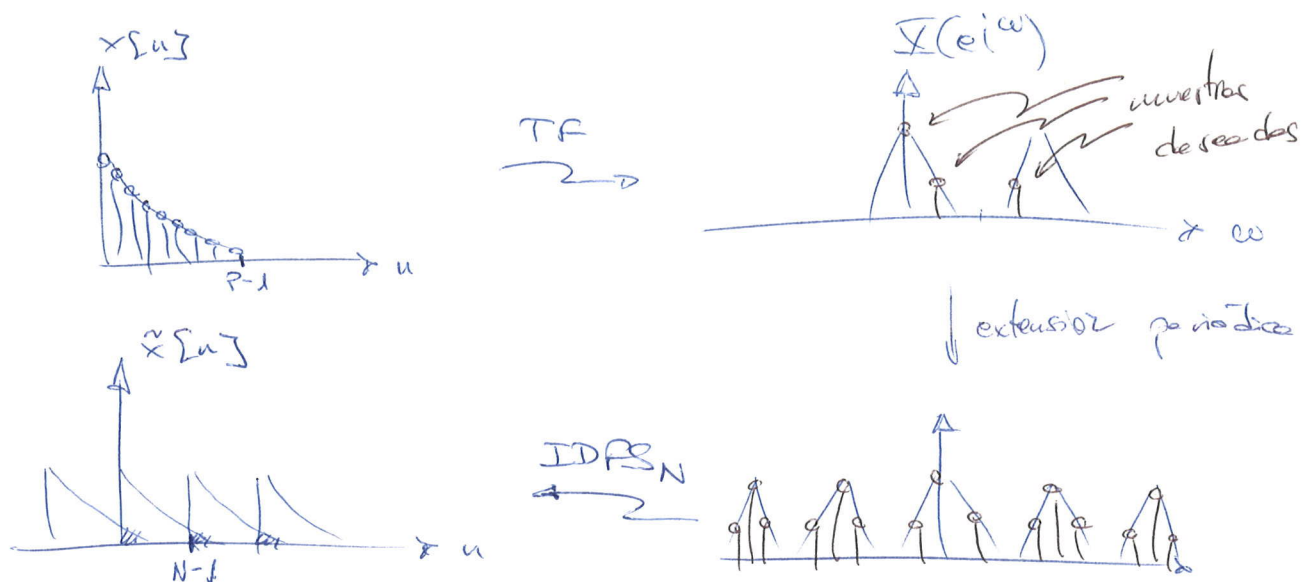
$\rightarrow$  DFT<sub>N</sub>  $[x[n]]$

- N muestras del espectro de  $x[n]$  con  $N < P$ :

$\rightarrow$  3 pasos

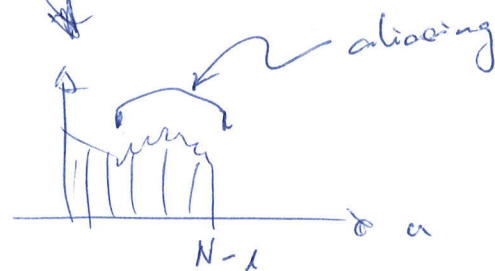
- 1.- DFT<sub>(mcm)</sub> + decimado : cero
- 2.- entender N hasta múltiplo del valor decimado + decimado
- 3.- La buena





como son menos muestras que  $P$ , hay  
aliasing temporal en  $\tilde{x}[n]$

nos quedamos con 1 período



$\Rightarrow$  al hacer la DFT de esto,  
obtenemos el espectro deseado  
con  $N < P$

S:  $N < P$  : hacer la DFT<sub>N</sub> del período principal de  $x[n]$   
hecho periódico de período  $N$ :  $\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$

Está claro que la señal no es recuperable, ya que se  
pierde información.

## - Propiedades de la DFT:

1.- Linealidad:  $x_1[n]$  de  $N_1$  puntos y  $x_2[n]$  de  $N_2$

$$\boxed{ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} aX_1[k] + bX_2[k]}$$

donde se debe verificar  $N \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$X_1[k] = \text{DFT}_N(x_1[n]) ; X_2[k] = \text{DFT}_N(x_2[n])$$

2.- Desplazamiento:

$$\text{resultados: } \begin{cases} x[n-m] \xrightarrow{\text{TF}} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega m} \\ \tilde{x}[n-m] \xrightarrow{\text{DFS}_N} \tilde{X}[k] e^{-j\frac{2\pi}{N} km} \end{cases}$$

$$\text{Para la DFT: } \boxed{x[(n-m)_N] \xrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] e^{-j\frac{2\pi}{N} km}}_{m=0:N-1}$$

↑  
desplazamiento circular

3.- Convolución:

$$\begin{cases} x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{TF}} X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}) & \text{convolución lineal} \\ \tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] \xrightarrow{\text{DFS}_N} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k] & \text{convolución periódica} \end{cases}$$

$$\text{Para la DFT: } \boxed{x_1[n] \otimes_N x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} X_1[k] X_2[k]}$$

convolución circular de N puntos



$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] x_2[(n-m)_N], \quad n=0:N-1$$

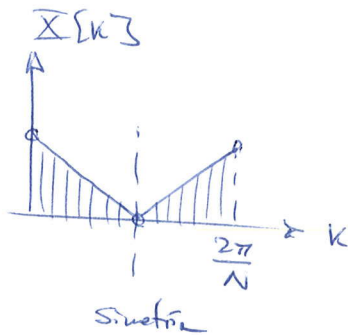
$$x_1[n] \circledast x_2[n] = x_1[(n)_N] \circledast x_2[(n)_N], \quad n=0:N-1$$

4.- Simetría:

$$\text{Para la DFT: } \left\{ x[n] \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] = X^*[-k]_N \right\}$$

(hermitica módulo  $N$ ,  $k=0:N-1$ )

$$\text{Si } x[n] \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{TF}} \text{hermitica} \xrightarrow{\text{DFT}_N} (\text{hermitica})_N$$



5.- CÁLCULO EFICIENTE DE LA DFT: EL ALGORITMO FFT

Cookey + Tuckey, 1965

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DFT}_N \equiv \text{transformación} \\ \text{FFT} \equiv \text{algoritmo para calcular la DFT}_N \end{array} \right\}$$

- Cálculo directo:

$$\begin{aligned} \text{DFT}_N: X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (k=0:N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (k=0:N-1) \quad \left[ W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow N^2$  productos complejos,  $(N-1)N$  sumas complejas  
 $\Rightarrow \sim N^2$  productos y sumas ( $O(N^2)$ )

- Propiedades de simetría y periodicidad de  $W_N$ :

- $W_N^{k \cdot N} = 1$
- $W_N^{N/2} = -1$
- $W_N^k \equiv$  periódica de periodo  $N$
- $W_N^{2k} = W_{N/2}^k \equiv$  periódica, de periodo  $N/2$

El algoritmo FFT se aplica cuando  $N$  es potencia de 2.

- Algoritmo FFT por decimado en el tiempo base 2:

(radix-2)

Es el más habitual.

Sólo para  $N = 2^V$

Se basa en las propiedades de  $W_N$  y consiste en ir dividiendo la DFT global en varias DFT

$$X[k] = \underbrace{\sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{kn}}_{n=2r} + \underbrace{\sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{kn}}_{n=2r+1} \quad (k=0:N-1)$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr} \cdot W_N^k =$$

$$= \underbrace{G[k]}_{\text{DFT de } N/2 \text{ puntos sobre las muestras pares}} + W_N^k \underbrace{H[k]}_{\text{DFT de } N/2 \text{ puntos sobre las muestras impares}} \quad (k=0:N-1)$$

DFT de  $N/2$  puntos  
sobre las muestras pares

DFT de  $N/2$  puntos sobre  
las muestras impares

$W_N^k$  periódica en  $k$ , y  $G[k]$  y  $H[k]$  periódicas de periodo  $N/2$   
(periodo  $N$ )

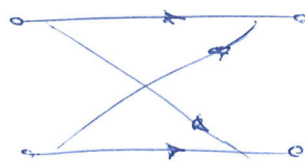
→ la DFT para  $k \geq N/2$  no necesita cálculos  
adicionales, ya que  $G[k]$  y  $H[k]$  se repiten

(\* 4.3 - 4.5 \*)

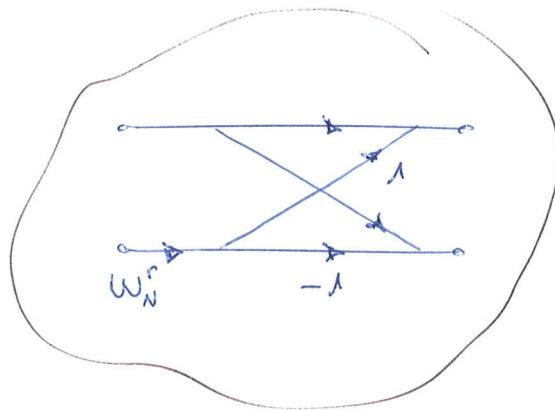
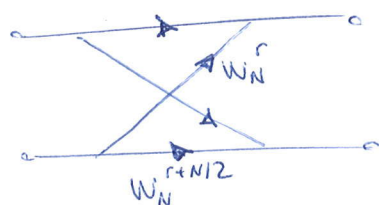
Coste teórico de implementar FFT / productos:  $N \log_2 N$   
sumas:  $N \log_2 N$

ejemplo:  $N = 1024 \rightarrow$  DFT / producto:  $N^2 \rightarrow \sim 10^6$   
FFT:  $N \log_2 N \rightarrow \sim 10^4$

"Estructuras manijose":



Célula básica FFT:



$$W_N^{r+N/2} = W_N^r W_N^{N/2} = -W_N^r$$

Multiplicar por  $-1$  es mucho más sencillo que por cualquier otro número  $\Rightarrow$  depreciable

|                                 |                                                               |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| operaciones (FFT <sub>N</sub> ) | productos: $\frac{N}{2}(\log_2 N - 1)$<br>sumas: $N \log_2 N$ |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------|

productos  $\rightarrow$  es ridículo ser  $\frac{N}{2}(\log_2 N - 1)$ , porque en la 1ª etapa siempre se multiplica por 1 y  $-1$ , pero aproxima más para  $N$  grande;

$$\text{productos} \sim \frac{N}{2} \log_2 N$$

Esto es para números complejos

Reales  $\Rightarrow$  hermitica  $\Rightarrow$  coste  $/2$  (propuesto)

# TDS 1

## TEMA 4

- SEÑAL DE FOURIER DISCRETA:  $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

- convolución periódica:  $\tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m]$

- DFT:  $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$   $\left| \begin{array}{l} k=0:N-1 \\ x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} k n} \\ n=0:N-1 \end{array} \right.$

espectro discreto entre 0 y  $2\pi$

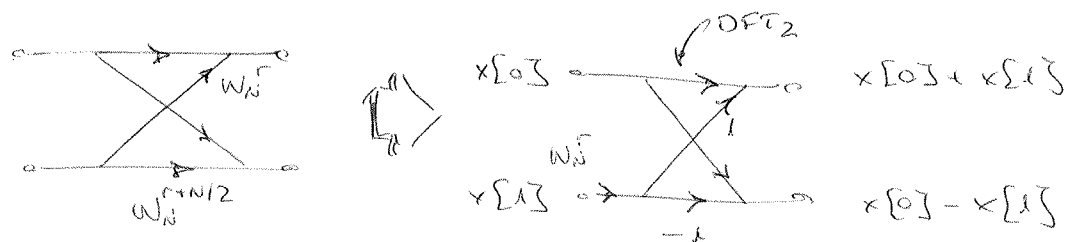
con  $N$  puntos, espaciados  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

- convolución circular:  $x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] x_2[(n-m)_N]$   
 $n=0:N-1$

- FFT:  
 • cálculo directo  $\Rightarrow O(N^2)$   
 • FFT  $\Rightarrow O(N \log_2 N)$

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \begin{cases} W_N^{KN} = 1 \\ W_N^{N/2} = -1 \end{cases}$$

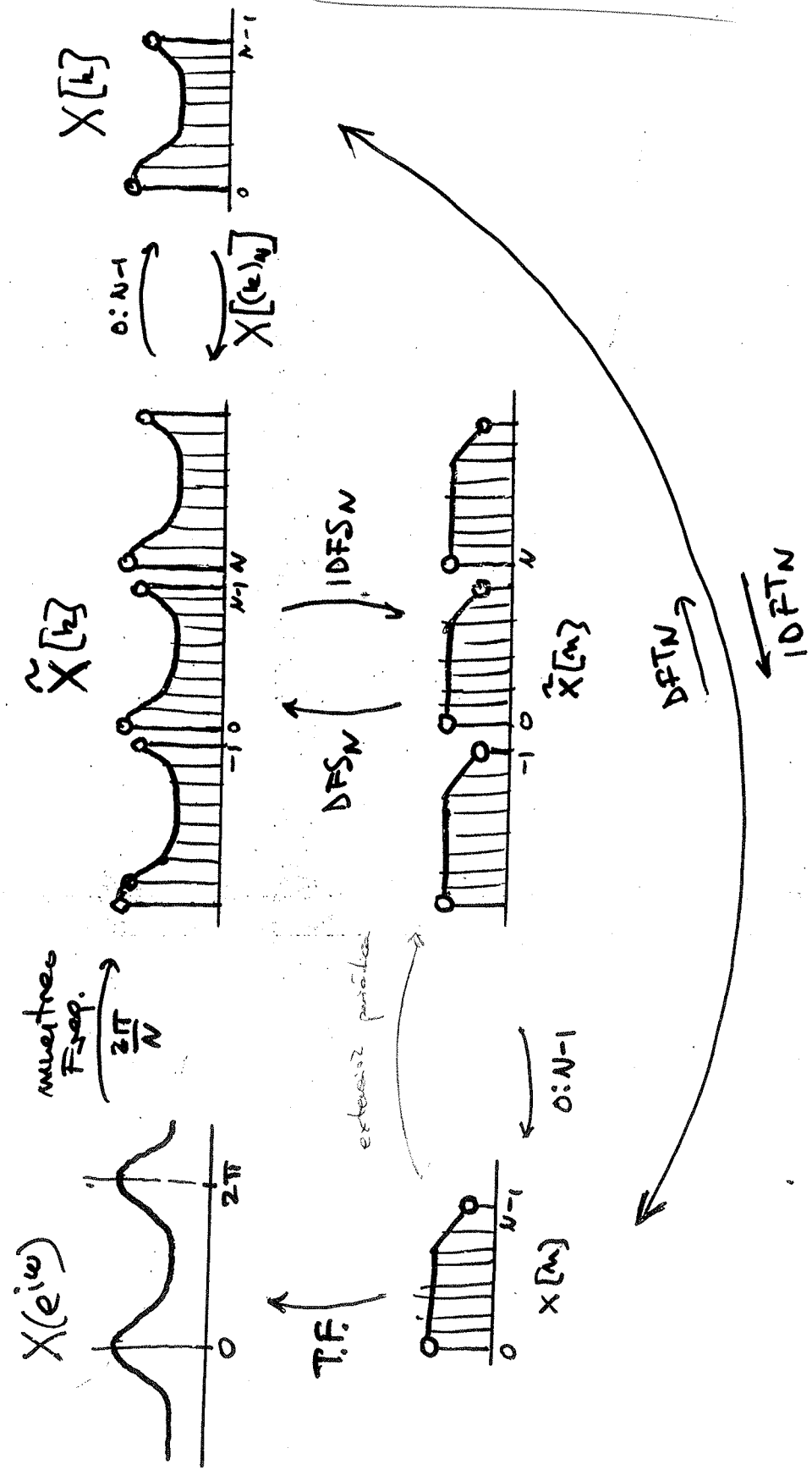
$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} k n} = \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{k \cdot n} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{k \cdot n} = \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} W_N^k = G[k] + W_N^k H[k] \end{aligned}$$

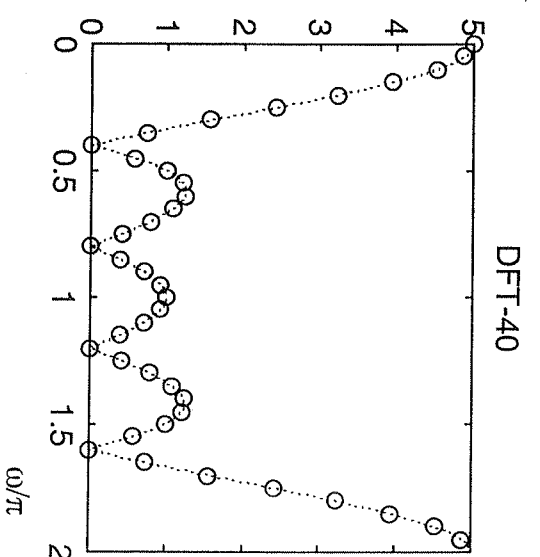
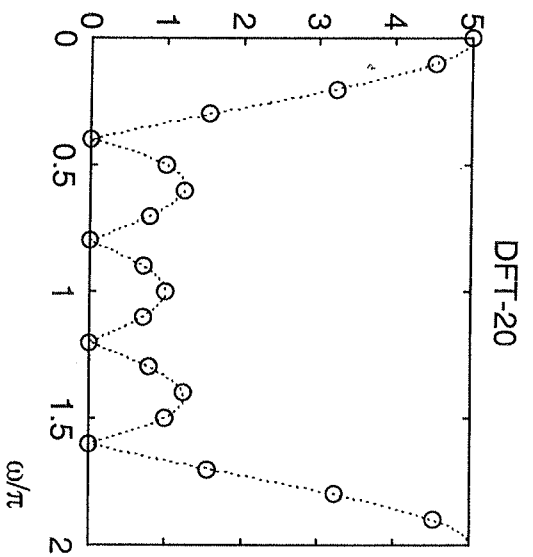
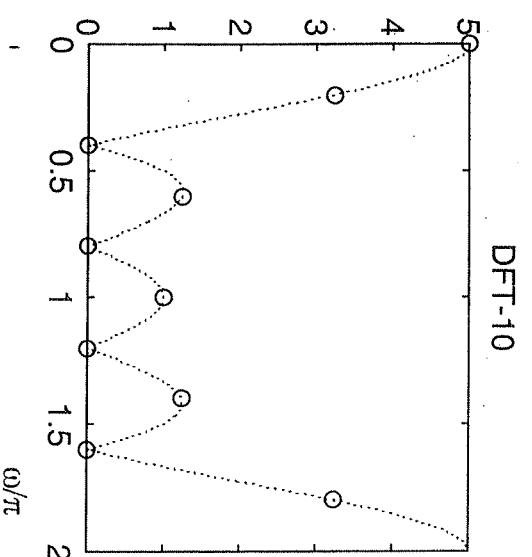
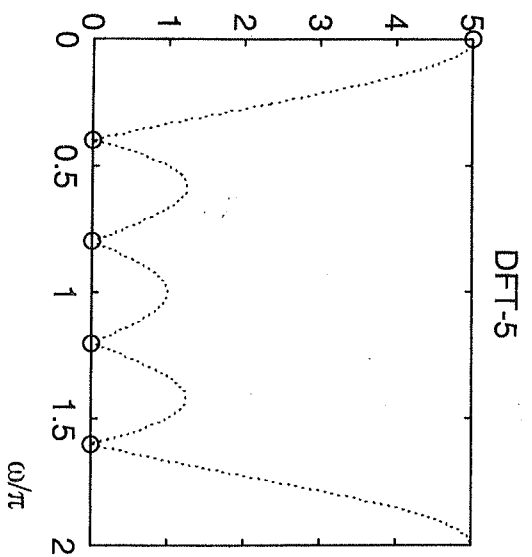
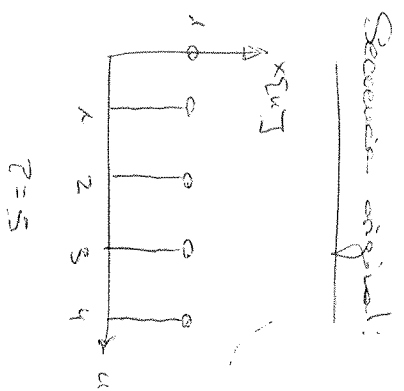




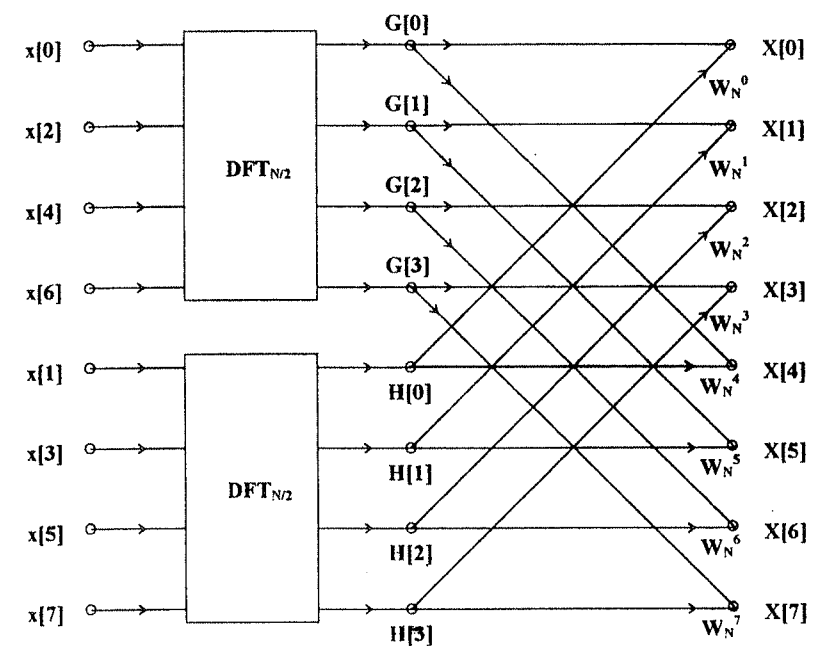


DFT, IDFT, DFS, IDFS



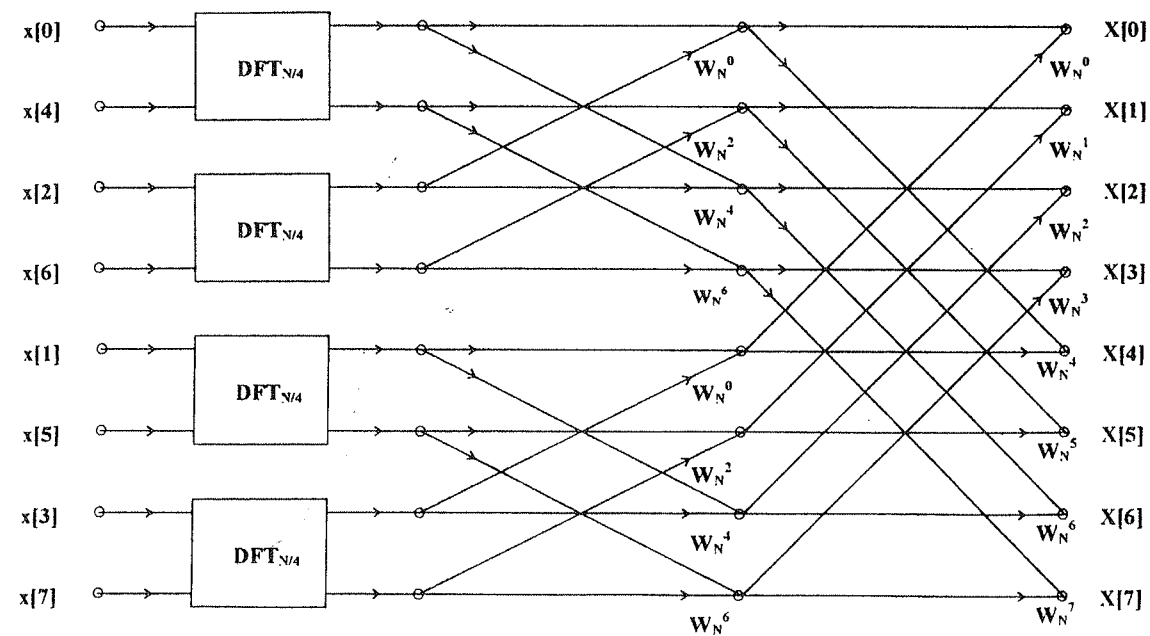


FFT Diezmado en tiempo



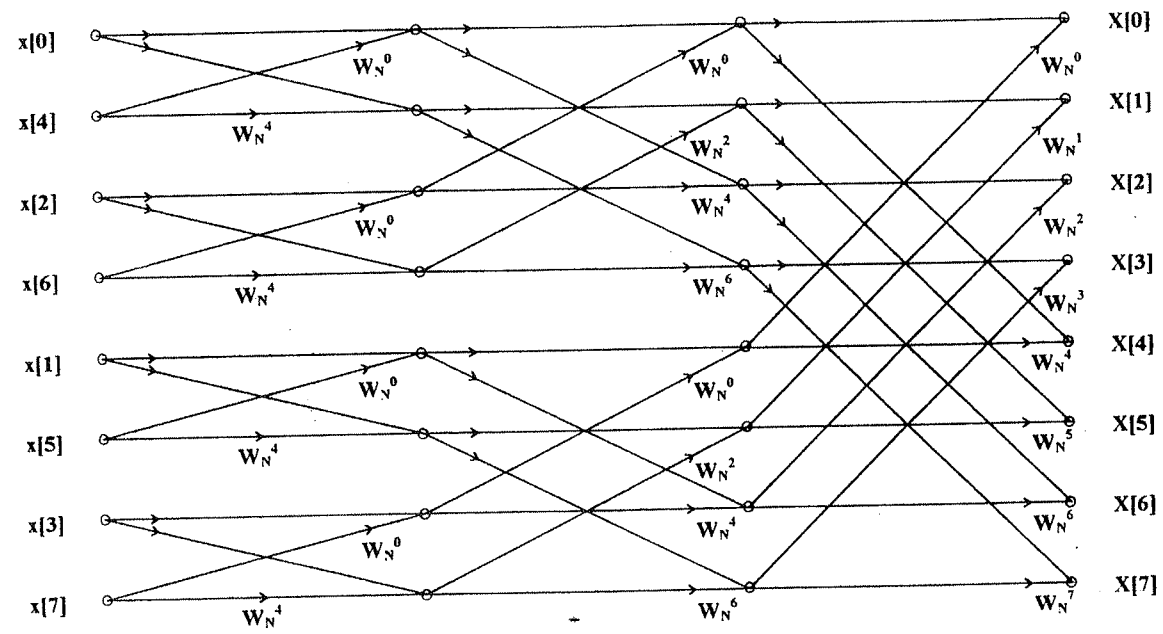
aparte de los DFTs,  
tenemos  $N$  productos y  
 $N$  sumas

FFT Diezmado en tiempo

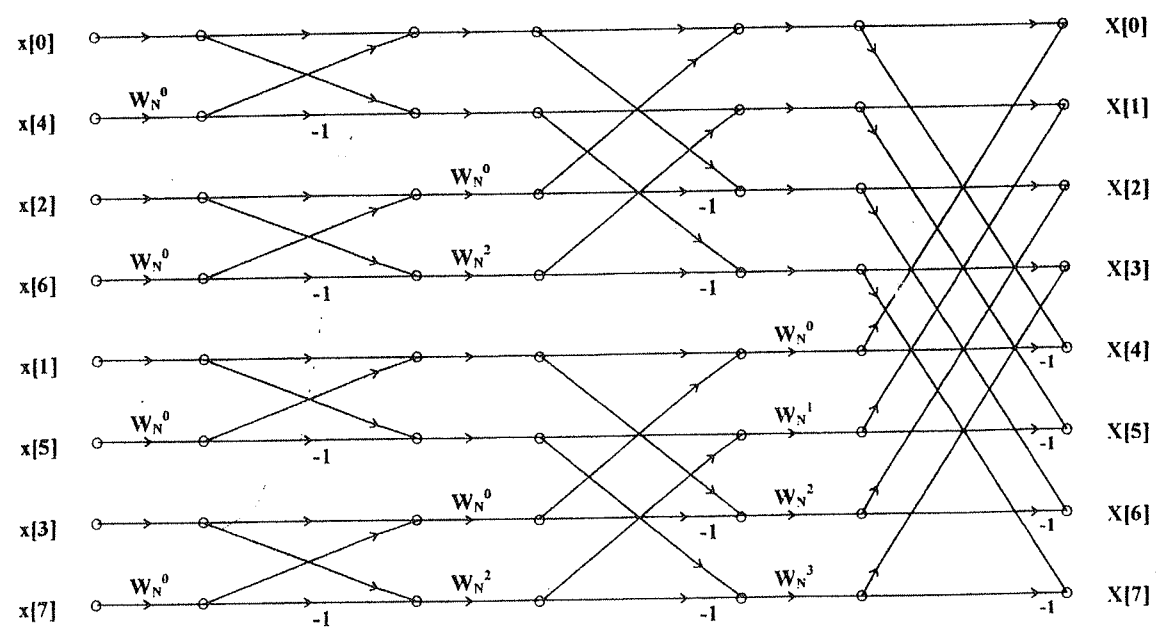


cada etapa  $\rightarrow N$  productos +  $N$  sumas

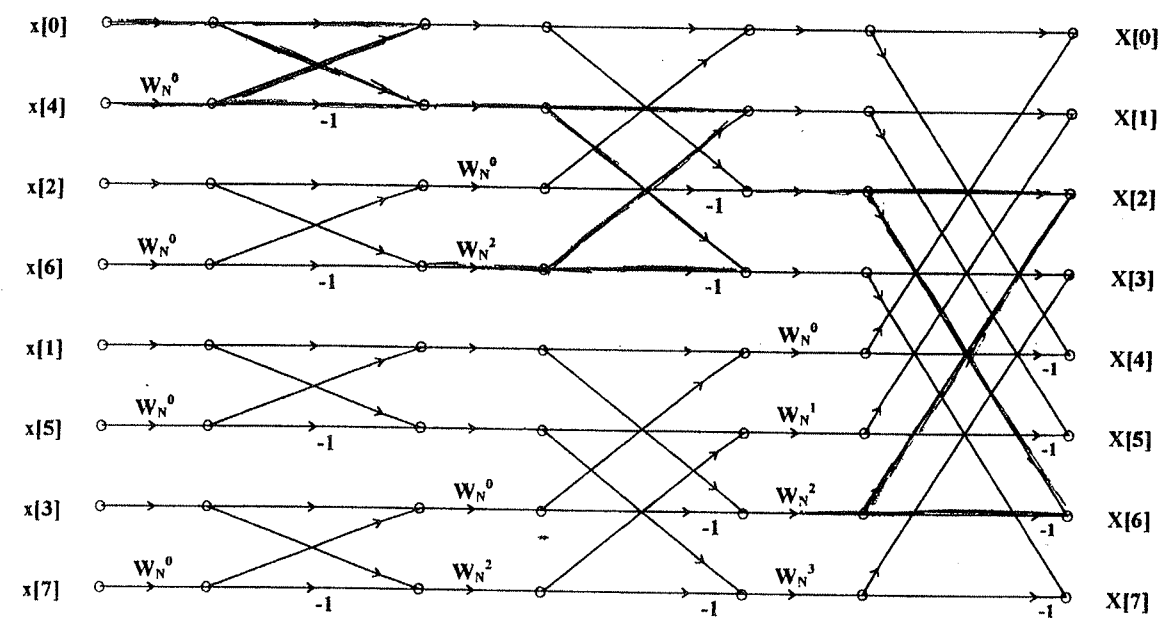
FFT Diezmado en tiempo



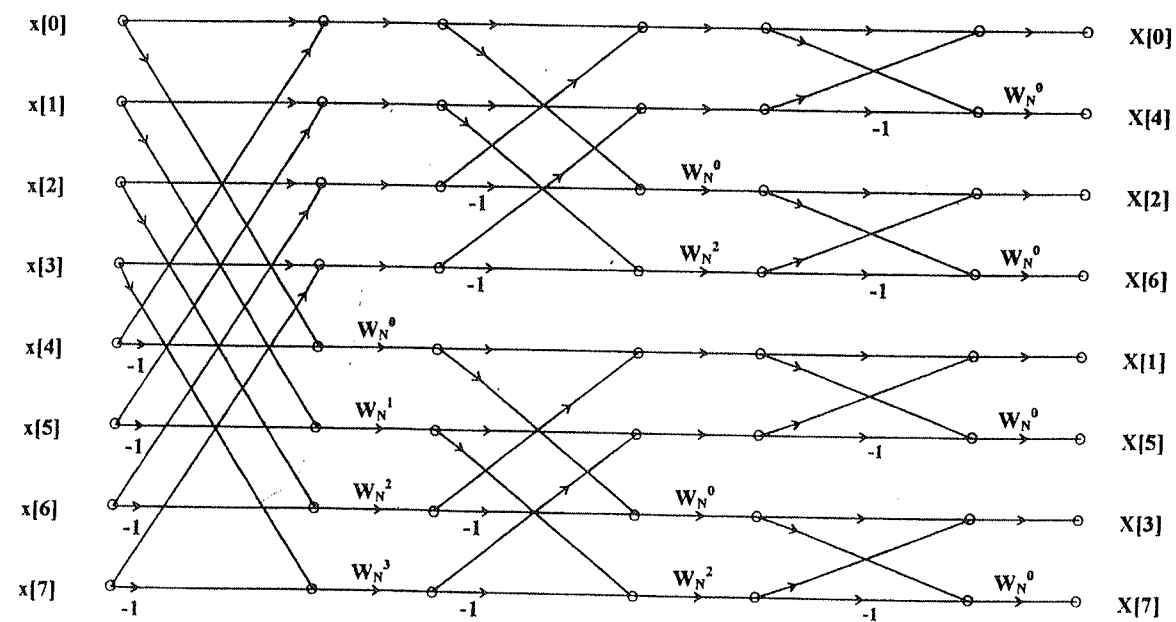
FFT Diezmado en tiempo



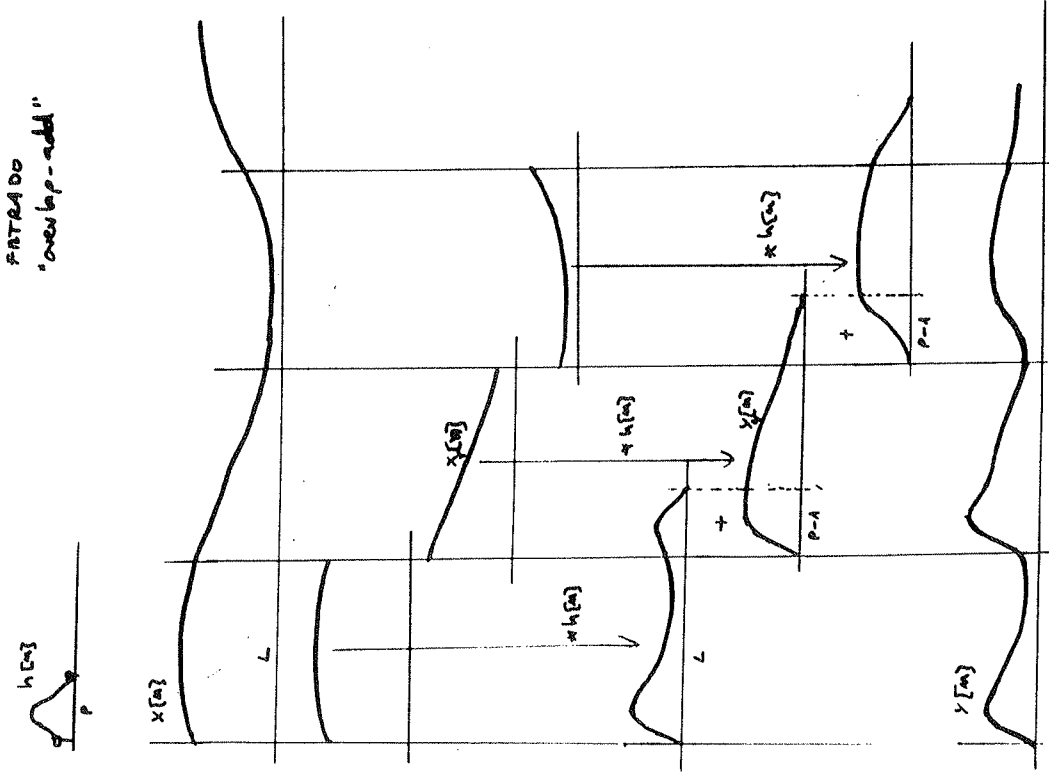
FFT Diezmado en tiempo



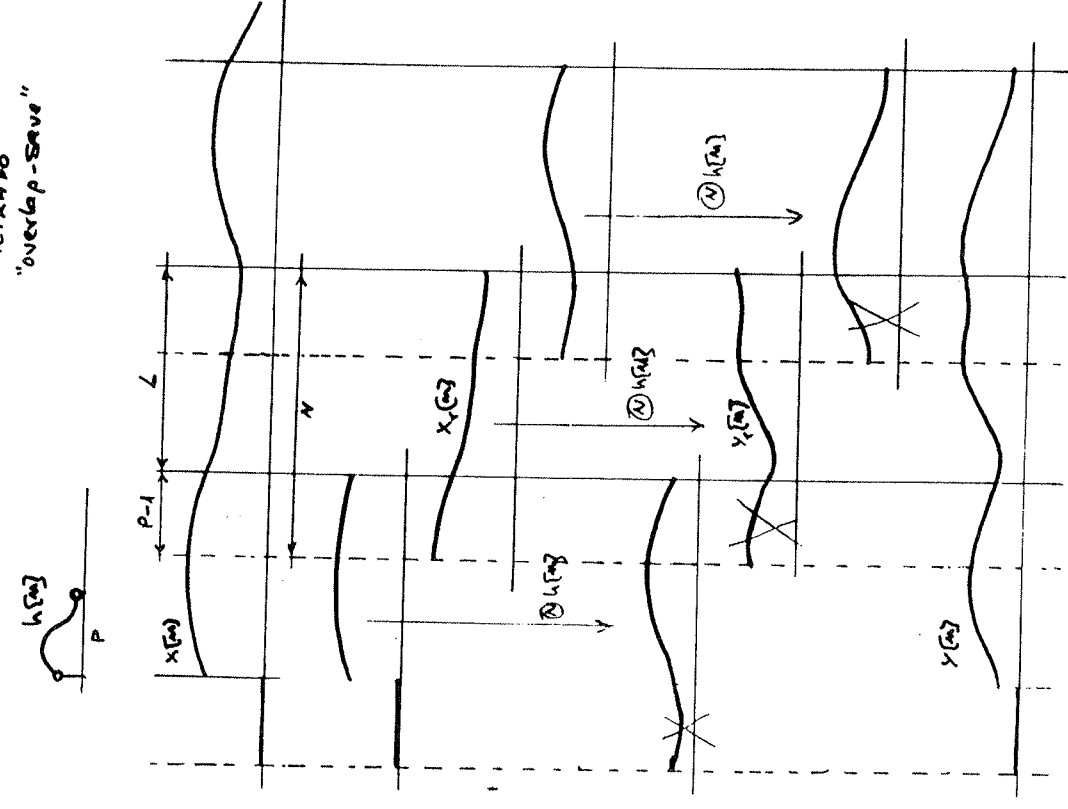
FFT Diezmado en frecuencia



FILTRADO  
"overlap-add"



FILTRADO  
"overlap-save"





# PROBLEMAS TEMA 4

Oppenheim - Schaffer 2ª ed pp. 600-628, 669-692

8.5✓, 8.9✓, 8.21✓, 8.23✓, 8.25✓, 8.28✓, 8.29✓, 8.32✓,  
8.60✓, 8.64✓, 9.1✓, 9.2✓, 9.22

8.5 longitud  $N$ , par

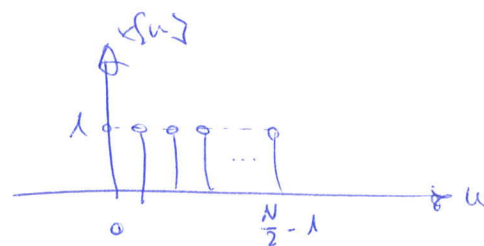
a)  $x[n] = \delta[n]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 1 \quad k \in [0, N-1]$$

b)  $x[n] = \delta[n - n_0] \quad 0 \leq n_0 \leq N-1$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} \quad k = 0 : N-1$$

d)  $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 \\ 0 & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

*Numero per de series*

$k=0 \Rightarrow X[k] = N/2$

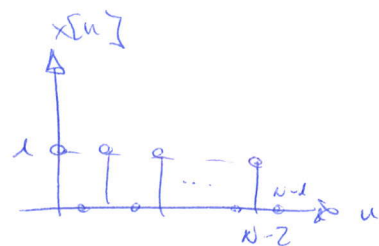
$k \neq 0 \Rightarrow$

$k \neq 0 \Rightarrow X[k] = 0 \quad \frac{N}{2}$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k \frac{N}{2}}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

c)  $x[n] = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ impar} \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 2} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 4} + \dots + e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-2)}$$

$$X[k] = \begin{cases} N/2 & k = N/2, 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

e)  $x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (a e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n$$

$$= \frac{1 - (a e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

**8.9** Secuencia de 20 puntos,  $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$

a)  $X(e^{j\omega}) \big|_{\omega = \frac{4\pi}{5}} \rightarrow$  DFT de  $N$  puntos, ¿cuántos  $N$ ?

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k=0:N-1$$

$\hookrightarrow$  aperturas discretas entre 0 y  $2\pi$  con  
puntos equiespaciados  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

$\omega = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow S: N=5, \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$  y en  $2\Delta\omega$   
tenemos el valor buscado

¿Cómo hacerlo?  $\Rightarrow$  FFT de 5 puntos con  
la señal original hecha periódica:

$$x'[n] = \sum_m x[n+5m]$$

$$X'[k] = \text{FFT}_5(x'[n])$$

$$X(e^{j\frac{4\pi}{5}}) = X'[2]$$

b)  $\omega = \frac{10\pi}{27} \Rightarrow L=27$

Como  $x[n]$  tiene 20 muestras, se añaden 7 ceros

$$\Rightarrow X(e^{j\frac{10\pi}{27}}) = X[5]$$

8.21

$$\begin{matrix} \tilde{x}_1[n] \\ \tilde{x}_2[n] \end{matrix} \quad N=7$$

$$a) \quad \tilde{y}_1[k] = \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_2[k] \quad \tilde{x}_2[n] = \delta[n-2]$$

considerar en un delay, desplazado 2 unidades;

$$\tilde{y}_1[n] = \tilde{x}_1[n] \otimes \delta[n-2] = \tilde{x}_1[n-2]$$

$$b) \quad \tilde{y}_2[k] = \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_3[k] \quad \tilde{x}_3[n] = \delta[n] + \delta[n-4]$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2[n] = \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4]$$

8.23

$$x[n] = 0, n \notin [0, P-1]$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \quad k=0:N-1$$

a)  $N > P$   $\Rightarrow$  hay que hacer zero-padding: ceros desde  $P$  hasta  $N-1$ !

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{P-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$N \neq$   $\Rightarrow$  aumenta la resolución de la DFT

b)  $N < P$   $\Rightarrow$  extensión periódica de  $x[n]$  en el punto, que resulta es que la señal es otra y el resultado no sirve para nada

8.25

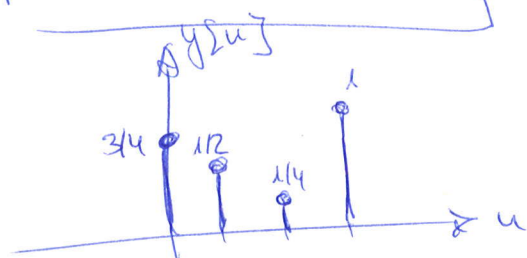
$$x[u] \xrightarrow{\text{DFT}} X[k]$$

$$y[u] \rightarrow W_4^{3k} X[k]$$

$$W_4^{3k} = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k}$$

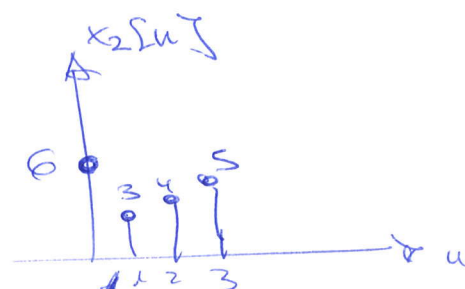
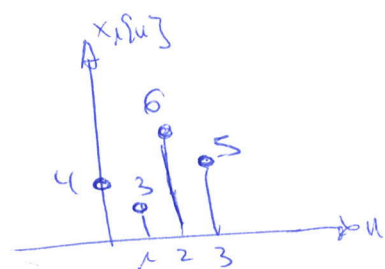
↑  
desplazamiento en el tiempo:

$$y[u] = x[u-3]$$



(desplazamiento circular por que  
es una señal periódica  
de cara a la DFT)

8.28



Se invierte  $x_1[u]$ , y al hacerla periódica de 0 a 3, queda  
en 0  $x_1[0] = 6$

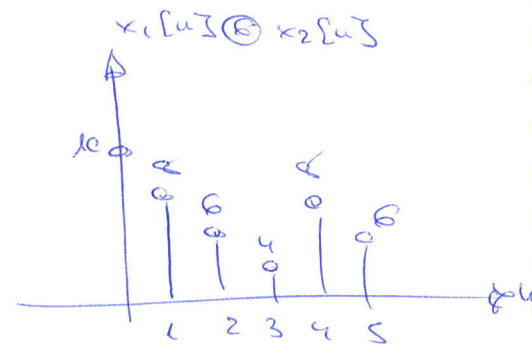
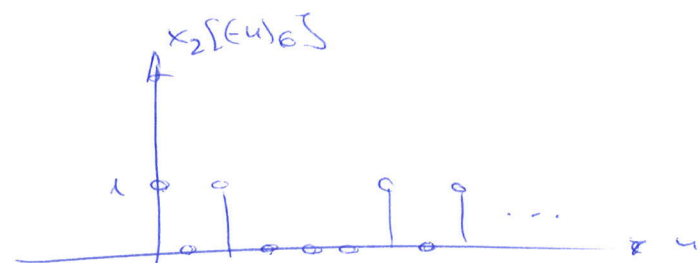
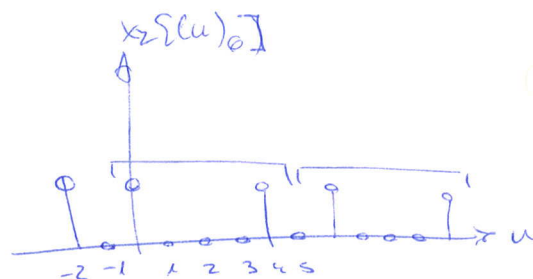
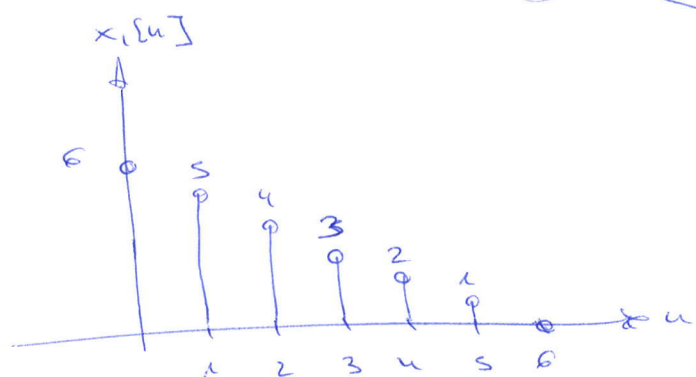
# 8.29 Convolution einer 1D-Funktion

N=8

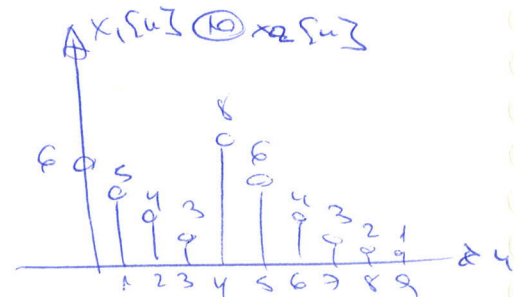
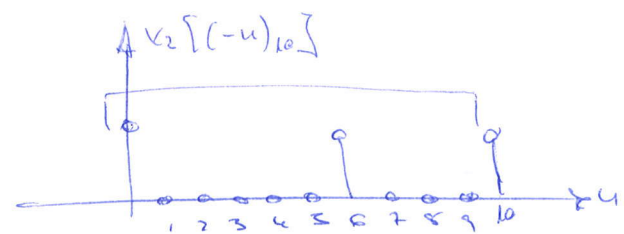
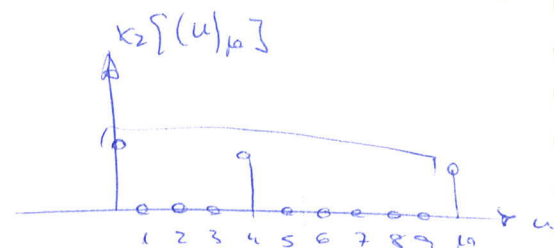
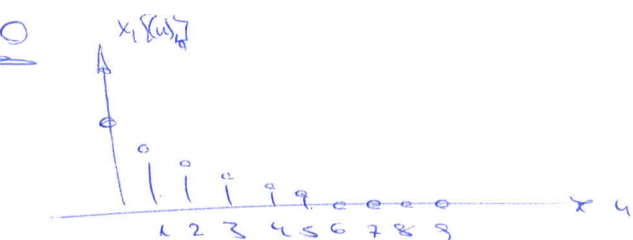
$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] x_2[(n-m)_N]$$

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^5 x_1[(m)_6] x_2[(n-m)_6]$$

$$= x_1[n] \times x_1[n-4]$$



N=10



$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^9 x_1[(m)_{10}] x_2[(n-m)_{10}]$$

8.32

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$Y[k] = \text{DFT}_{16}(y[n]) = \sum_{n=0}^{15} y[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$= \sum_{n=\text{par}} x[n/2] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{n=\text{impar}} 0$$

$$n = 2r \quad \Rightarrow \quad Y[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[r] e^{-j \frac{2\pi}{N} 2rk}$$

$$= \sum_{r=0}^7 x[r] e^{-j \frac{2\pi}{8} rk} \equiv X[k] \quad k=0:15$$

$\Rightarrow$  período de período  $N/2$   
( $N=16$ )

$\Rightarrow$  poder  $\odot$



8.60  $H(z) = \frac{1}{z - bz^{-1}}$   $b$  constante compleja

$$x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$$

Objetivo: recuperar  $x[n]$  a partir de  $y[n]$

1.-  $y[n], 0 \leq n \leq N-1 \rightarrow Y[k] \equiv \text{DFT}_N(y[n])$

2.-  $V[k] = (W_N^{-k} - bW_N^k) Y[k]$

3.-  $\text{DFT}^{-1}(V[k]) = v[n]$

¿Para qué valores de  $n$  en el rango  $0:N-1$  es  $x[n] = v[n]$ ?

$y[n+1] = x[n] + by[n-1]; \quad x[n] = y[n+1] - by[n-1]$  para todo  $n$

Como estamos usando DFT, se trabaja en extensiones periódicas de las señales:

$$v[n] = y[(n+1)_N] - by[(n-1)_N]$$

$$\Rightarrow y[n+1] \neq y[(n+1)_N], \quad y[N] \neq y[(0)_N]$$

$\Rightarrow$  No coinciden en los ~~extremos~~ extremos del intervalo:

$$\boxed{v[n] = x[n] \quad n=1:N-2}$$

$$\boxed{8.64} \quad h[u] = \delta[u] - \frac{1}{2} \delta[u - u_0] \quad \leftarrow \text{deslocar } a_2$$

$u_0 > 0$ , inteiro

a)  $N = 4u_0$

$$\boxed{H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-u_0}}$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{4u_0-1} \underbrace{\left( \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - u_0] \right)}_{\text{vale zero } n=0, u_0} e^{-j \frac{2\pi}{4u_0} kn}$$

$$= e^{-j \frac{2\pi}{4u_0} kn} \Big|_{n=0} - \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{4u_0} kn} \Big|_{n=u_0}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{4} k}$$

$$\boxed{H[k] = 1 - \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{2} k}}$$

b)  $H_1(z) = 1/H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-u_0}} \quad \text{ZD } \underline{\text{filtro IIR}}$

(deslocar de 1/2 infinita)

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega u_0}} \quad ; \quad a = 1/2, \quad \omega = \frac{2\pi}{N} k$$

$$\text{ZD } \boxed{h_1[n] = a^{n/u_0} \delta[n/u_0] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/u_0} \delta[n/u_0]} \quad \text{para } \frac{n}{u_0} \in \mathbb{Z}$$



$$c) G[k] = \frac{1}{H[k]} \quad k=0:N-1$$

$$g[u]? \quad G[k] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}$$

$$g[u] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G[k] e^{j\frac{2\pi}{N}ku}$$

Otra forma mejor:

$$\frac{1}{H[k]} \xrightarrow{\text{extensión periódica}} \frac{1}{\tilde{H}[k]} = \frac{1}{H(e^{j\omega})} \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}}$$

$g[u]$  se corresponde con el periodo principal de

$$h_i[u] \quad \Rightarrow \quad \tilde{h}_i[u] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_i[u - rN]$$

$$\boxed{g[u] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_i[u - rN_0]} \quad u=0:N_0-1$$

$$\Rightarrow \boxed{g[u] = \frac{16}{15} h_i[u]} \quad \begin{aligned} & \hookrightarrow h_i[u - 4N_0] = h_i[u] \left(\frac{1}{16}\right)^r \\ & \quad \downarrow \\ & \quad g[u] = h_i[u] \frac{1}{1 - 1/16} \end{aligned}$$

d) El filtro inverso necesario,  $h[n]$ , tiene infinitas muestras, mientras que el implementador con filtro FIR,  $g[n]$ , trunca la respuesta original, de manera que  $H(z)G(z) \neq 1$ , y se cumple  $H[k]G[k] = 1 \quad \forall k$  porque son respuestas periódicas.

$$e) g[n] * h[n] = g[n] - \frac{1}{2} g[n - n_0]$$

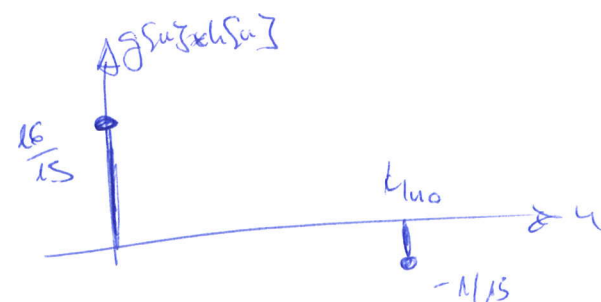
$$n = 0 \Rightarrow g[n] - \frac{1}{2} g[n - n_0] = g[0] = \frac{16}{15}$$

$$n = n_0 \Rightarrow g[n_0] - \frac{1}{2} g[0] = \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{16}{15} = 0$$

$$n = 2n_0 \Rightarrow g[2n_0] - \frac{1}{2} g[n_0] = \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$n = 3n_0 \Rightarrow g[3n_0] - \frac{1}{2} g[2n_0] = \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$n = 4n_0 \Rightarrow g[4n_0] - \frac{1}{2} g[3n_0] = 0 - \frac{1}{2} \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{8} = -1/15$$



Se puede ver que, todo  
más grande cuando sea  
 $N \rightarrow N > 4n_0$

$$\boxed{9.1} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad k=0:N-1$$

$$\downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad n=0:N-1$$

Difference en  $\left\{ \begin{array}{l} \text{factor } 1/N \\ \text{signe de la exponentiel} \end{array} \right.$

Entrée :  $\frac{1}{N} X[(-k)_N]$

$$\frac{1}{N} X[(-k)_N] \xrightarrow{\text{DFT}_N} x[n]$$

Propriétés de dualité :

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} X[k]$$

$$X[k] \xrightarrow{\text{DFT}_N} N \cdot x[(-k)_N]$$

9.2  $N=8$

a) Conducta =  $W_N^0(-1) \cdot W_N^2 = \underline{\underline{-W_N^2}}$

b) Sólo hay un camino. En general, también

c)  $X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} 2n}$

seguir las flechas:

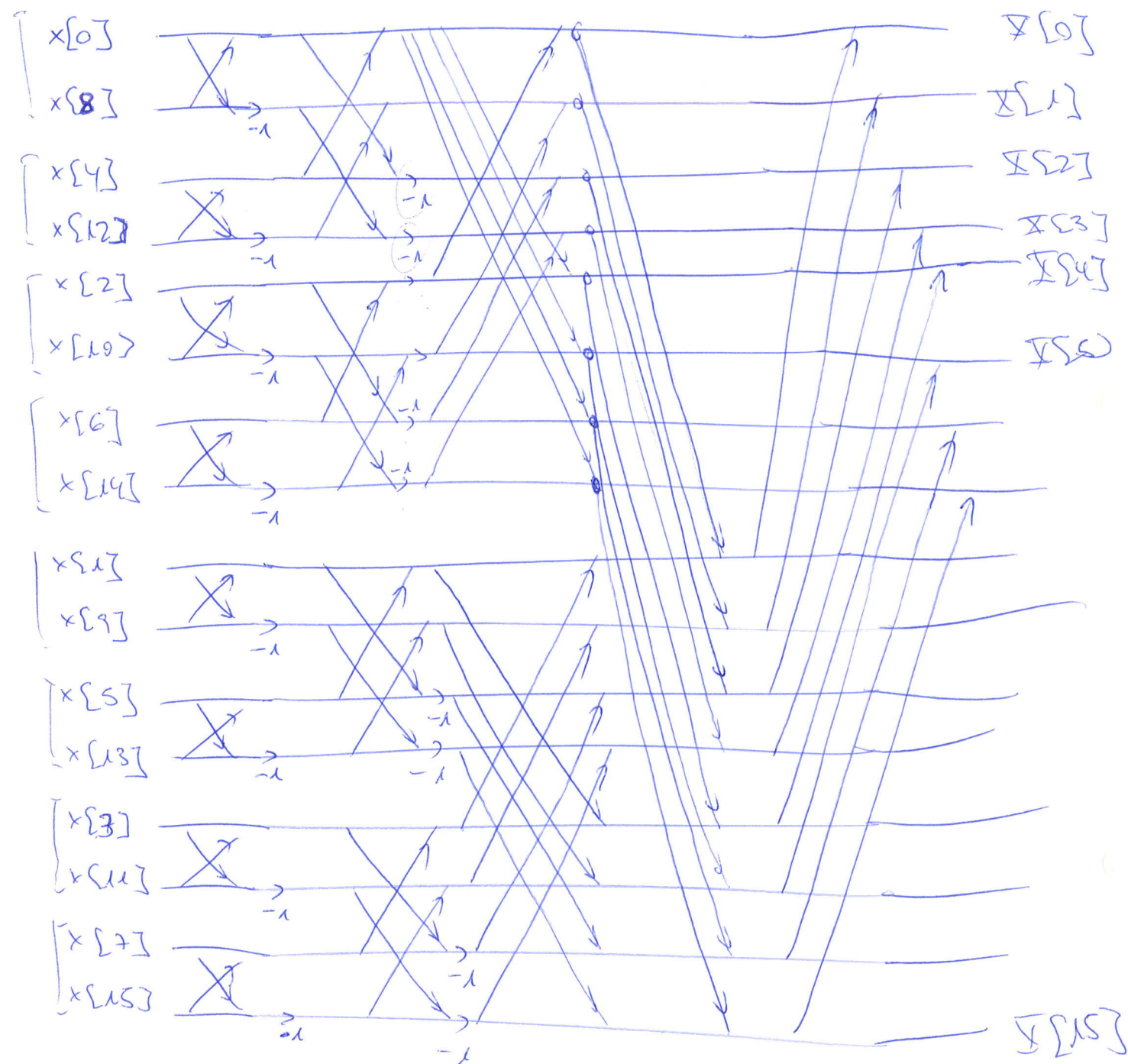
|        |                        |        |                                           |
|--------|------------------------|--------|-------------------------------------------|
| $x[0]$ | $\xrightarrow{1}$      | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 0} = 1$      |
| $x[1]$ | $\xrightarrow{W_N^2}$  | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 1} = W_N^2$  |
| $x[2]$ | $\xrightarrow{-1}$     | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 2} = -1$     |
| $x[3]$ | $\xrightarrow{-W_N^2}$ | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 3} = -W_N^2$ |
| $x[4]$ | $\xrightarrow{1}$      | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 4} = 1$      |
| $x[5]$ | $\xrightarrow{W_N^2}$  | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 5} = W_N^2$  |
| $x[6]$ | $\xrightarrow{-1}$     | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 6} = -1$     |
| $x[7]$ | $\xrightarrow{-W_N^2}$ | $X[2]$ | $e^{-j\frac{2\pi}{N} 2 \cdot 7} = -W_N^2$ |

9.22

$N = 16$

$re \text{ } \pm x - 2$

FFT



Procedures:  $\frac{N}{2} (\log_2 N - 1) = 24$

Sumas:  $N \log_2 N = 64$