

TEMA 5: APLICACIONES DE LA DFT

1.- CONVOLUCIÓN LINEAL CON DFT

2.- ANÁLISIS ESPECTRAL CON DFT

1.- CONVOLUCIÓN LINEAL CON DFT

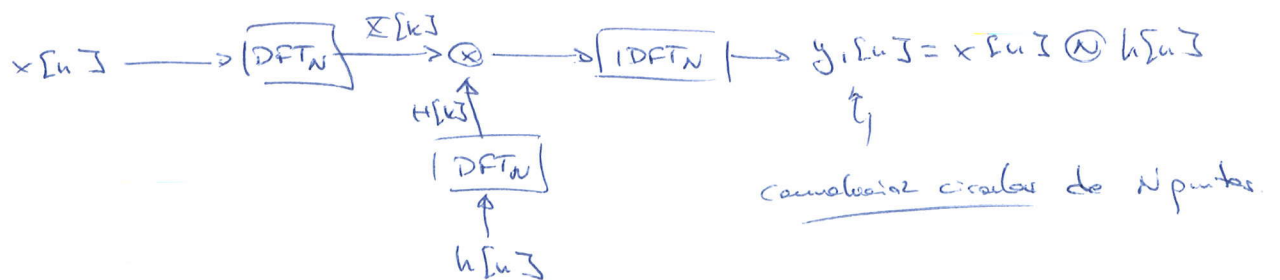
$$x[n] \xrightarrow{\boxed{h[n]}} y[n] \quad \begin{array}{l} x[n] \rightarrow \text{longitud } L \\ h[n] \equiv \text{FIR longitud } P \end{array}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] x[n-k] \rightarrow \text{por cada muestra a la salida } \left\{ \begin{array}{l} P \text{ productos} \\ P-1 \text{ sumas} \end{array} \right.$$

Formas alternativas de implementar la convolución: (convolución lineal)

$$\begin{array}{l} x[n] \xrightarrow{TF} \\ h[n] \xrightarrow{TF} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \otimes \\ \circ \end{array} \right. \xrightarrow{TF^{-1}} y[n]$$

a la práctica:



¿Cuánto debe valer N para $y_1[n] = y[n]$ (conv. lineal $\equiv$ circular)?

$$\begin{cases} \text{length}(x[n]) = L \\ \text{length}(h[n]) = P \end{cases} \Rightarrow \text{length}(y[n]) = L + P - 1$$

$$\rightarrow \boxed{N \geq L + P - 1} \Leftrightarrow y_1[n] = y[n]$$

En el dominio del tiempo: conv. lineal $\equiv$ conv. circular de N puntos

(* 5.2 *)

¿Relación entre conv. circular N y conv. lineal si $N < L + P - 1$?

$\rightarrow$ (* 5.3 *)

convolución circular N puntos = 1 período de conv. lineal, hecho periódico de período N

propuesto: appendix 1 8.47 b)

- Si $L \rightarrow \infty$: señal ilimitada en tiempo, hace falta hacer la DFT $\Rightarrow$ muestras deben ser consecutivas $\Rightarrow$ se puede hacer en tiempo real $\Rightarrow$ latencia

Solución: convolución por bloques (overlap-add)
 $\Rightarrow$ (* 5.1, 5.4 *)

(apunte hora)

- Coste computacional de "overlap-add":

• por cada bloque de L puntos:

- 1 DFT_N de la señal de entrada
- 1 IDFT_N
- producto de vectores $N \rightarrow N$ productos
- $P-1$ sumas (sobreimpuestos)

La DFT de $h[n]$ es común a todos los bloques, no se cuenta.

DFT_N, IDFT_N es $\frac{N}{2} \log_2 N$ prod + $N \log_2 N$ sumas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- productos} = 2 \frac{N}{2} \log_2 N + N = N \log_2 N + N \\ \text{- sumas} = 2N \log_2 N + P - 1 \end{array} \right.$$

$N = L + P - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- productos: } N \log_2 N + N \\ \text{- sumas: } 2N \log_2 N + (N - L) \end{array} \right.$$

Alora, para cada muestra, se divide por L :

- productos por muestra: $\frac{N(\log_2 N + 1)}{L}$

- sumas por muestra: $\frac{N(2 \log_2 N + 1)}{L} - 1$

- Convolución sin DFT (método directo):

- productos por muestra: P

- sumas por muestra: $P-1$

Dependiendo del valor de L , tendremos mayor o menor coste computacional.

Ejemplo: $P=200$, $N=1024 \Rightarrow L=N-P+1=825$

por DFT: 13,6 prod/muestra

directa: 200 prod/muestra

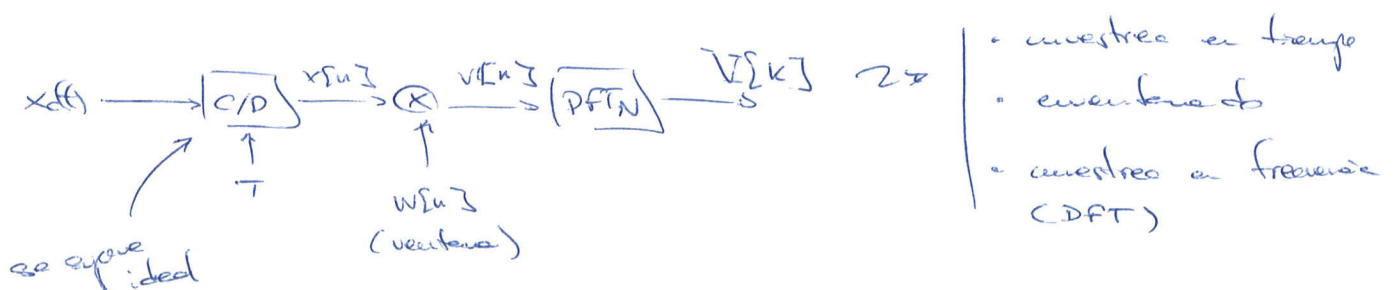
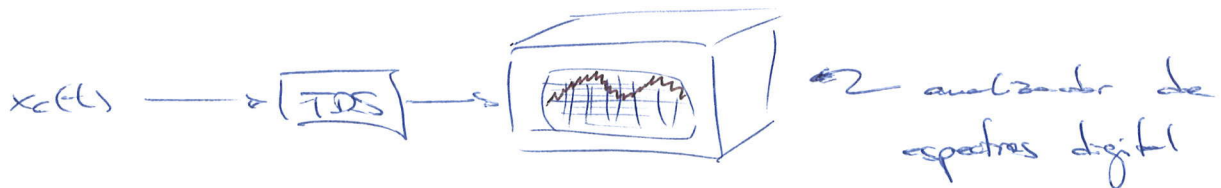
Para ahorrar tiempo, se busca normalmente $N \geq 8P$

g) $\therefore N$ debe ser potencia de 2

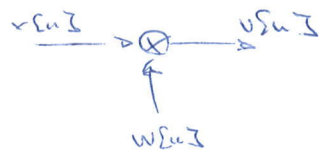
• esto es para números complejos

2.- ANÁLISIS ESPECTRAL CON DFT

Análisis de Fourier: obtener la TF de una señal continua



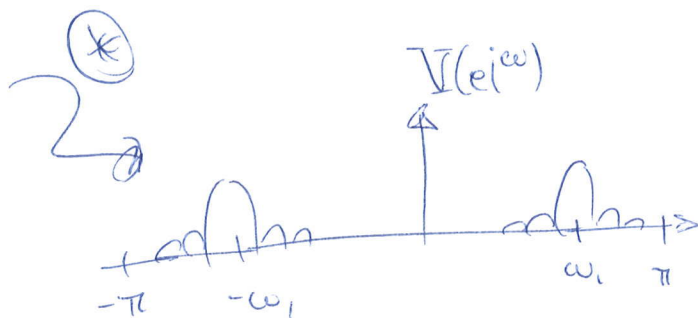
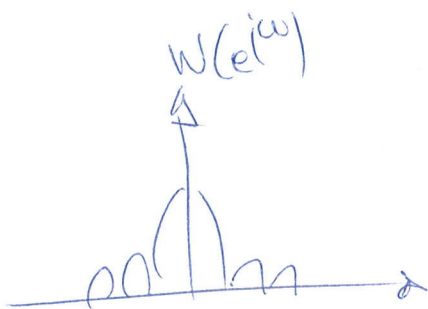
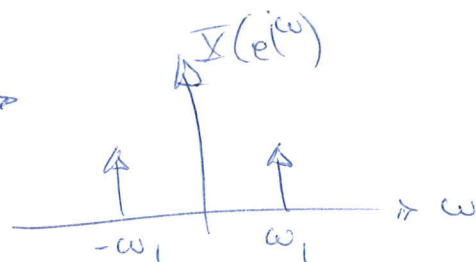
- Eventos:



$$y[n] = x[n] w[n]$$

$$w[n] \rightarrow \text{2 puntos}$$

Si $x[n]$ es un tono $\rightarrow$



espectro ideal de la ventana $W(e^{j\omega})$: Si en el origen $\Rightarrow$ irrealizable

Resolución: capacidad del sistema para distinguir dos tonos próximos

Depende del ancho del lóbulo principal de $W(e^{j\omega})$

- Rectangular: $\frac{4\pi}{L}$

- Bartlett, Hamming, Hanning: $\frac{8\pi}{L}$

- Blackman: $\frac{12\pi}{L}$

- Kaiser: depende de los parámetros.
Es la mejor

definición cuantitativa de resolución:

$$\boxed{\text{resolución} = \text{ancho del lóbulo principal}} \quad (\text{radianes})$$

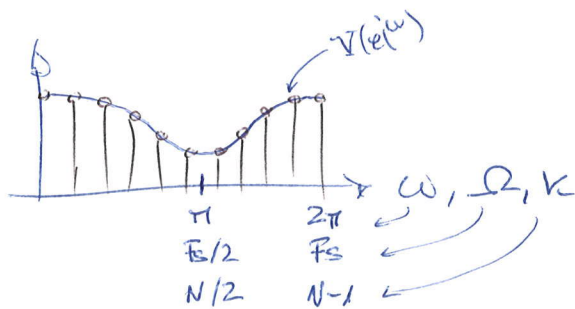
(* 5.5 - 5.8 *)

fugas: pérdida de energía que aparece a otras frecuencias

Dependen de los lóbulos secundarios de la ventana

Los niveles de los lóbulos secundarios son característicos de la forma de la ventana.

Transforma en frecuencia: $\underline{v[n]} \rightarrow \boxed{\text{DFT}_N} \rightarrow \underline{V[k]}$



¿A qué frecuencia corresponde cada k ?

muestras en tiempo: $\omega = \Omega T \rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T}$

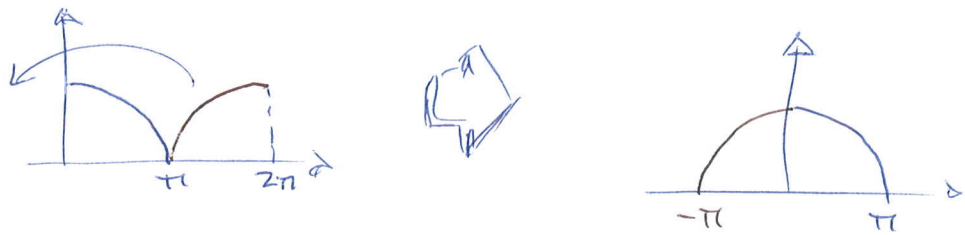
muestras en frecuencia: $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_k = \frac{2\pi}{N} \frac{k}{T} \text{ (rad/s)}}$$

$$\boxed{f_k = \frac{F_s}{N} k \text{ (Hz)}}$$

$$\underline{F_s = 1/T}$$

A la hora de representar la señal, hay que reordenar las muestras:



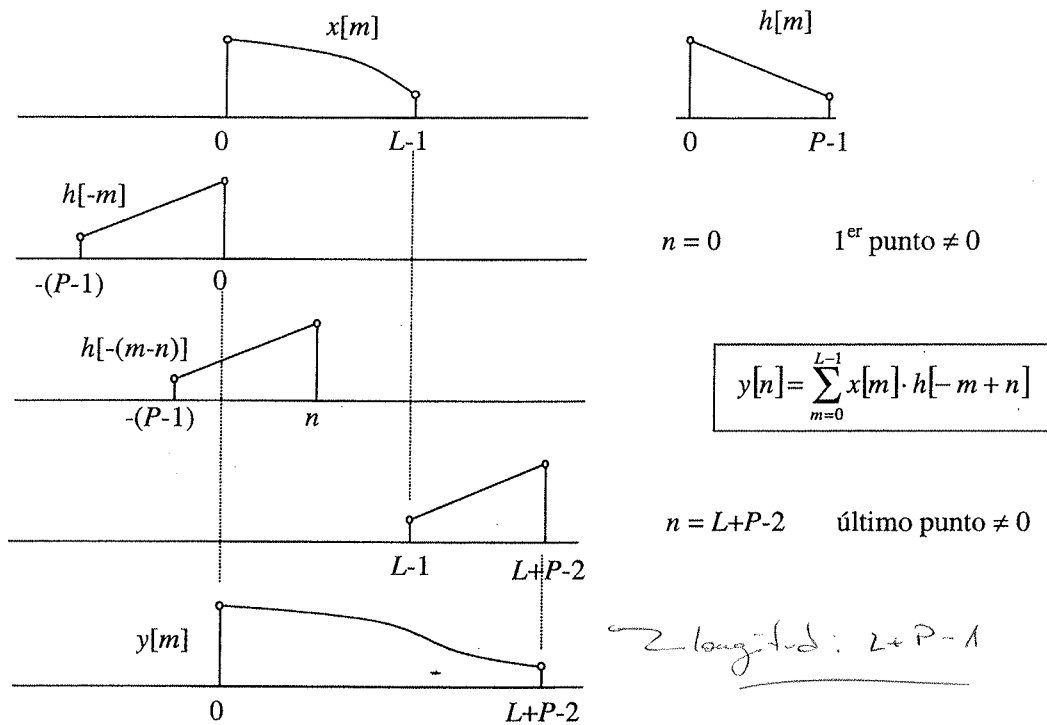
¿Cuántas puntos N para DFT?

$$N \geq L$$

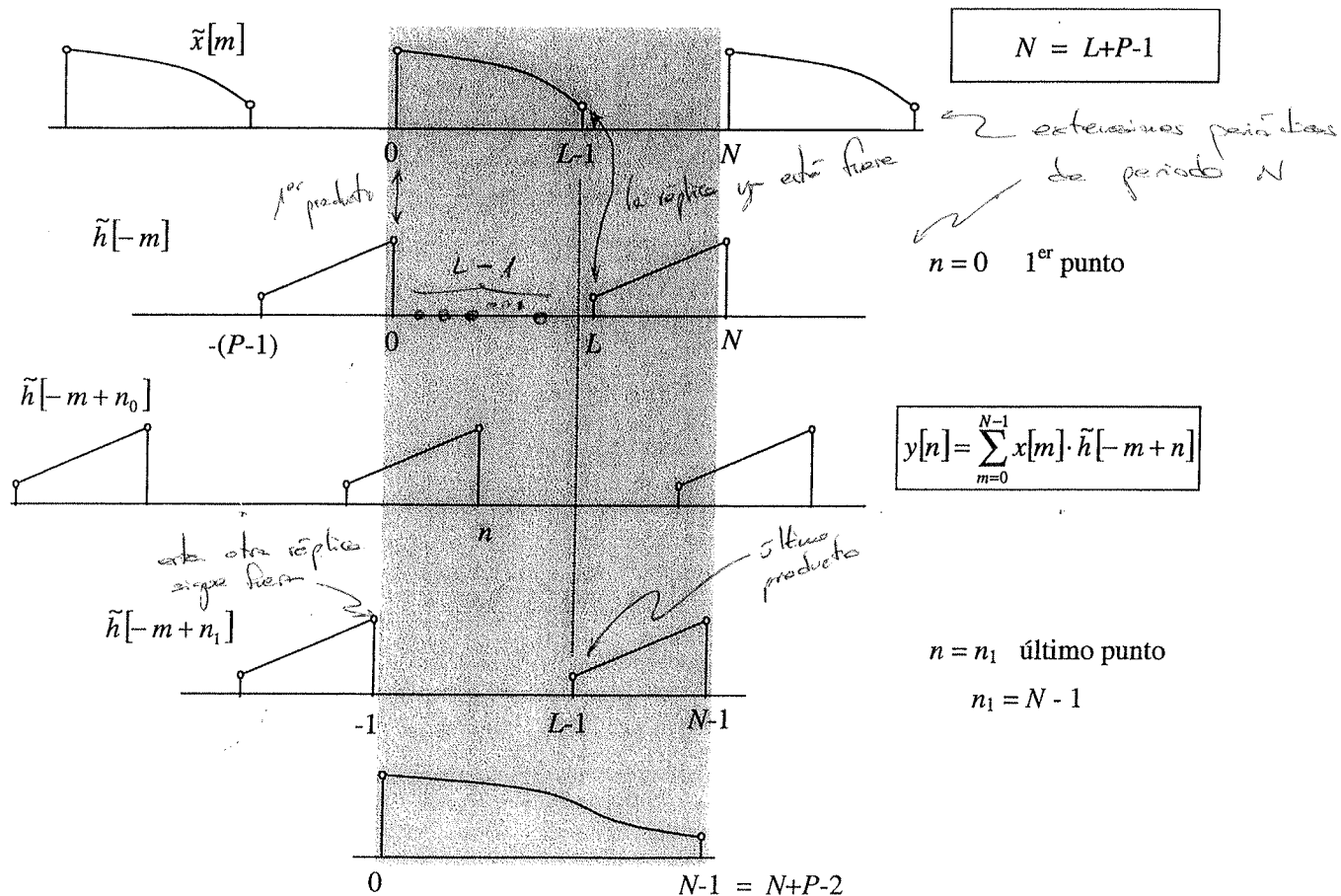
$N = L \rightarrow$ margen mínimo, pero a veces N mayor para ver la curva "bonita"

@y@: con N no se determina la resolución, eso sí
es en euentados.

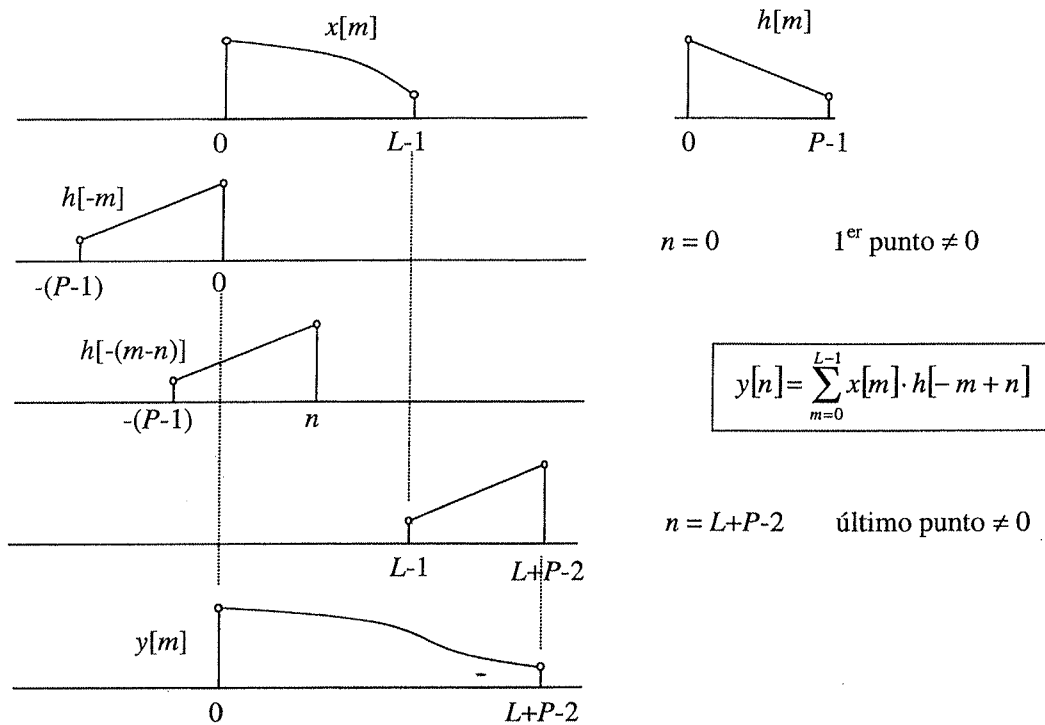
Convolución lineal



Convolución circular

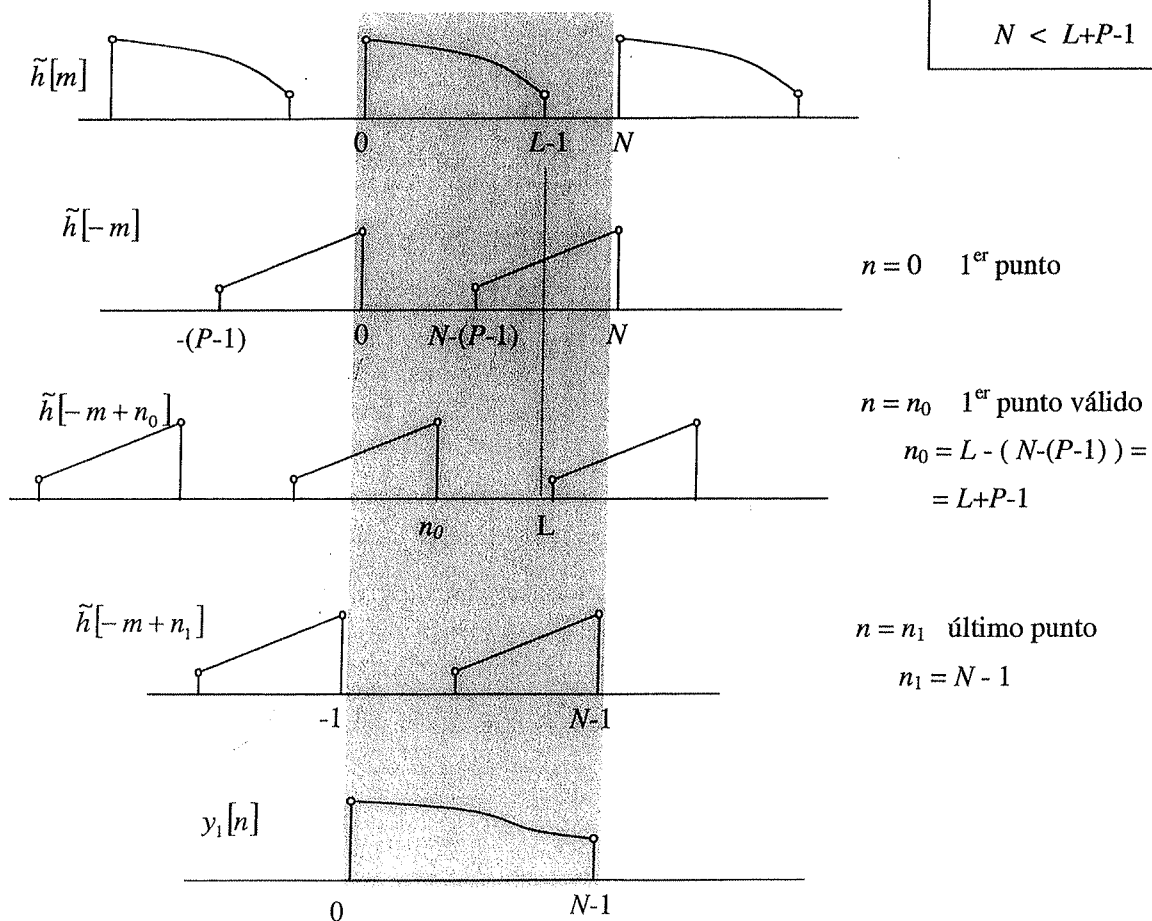


Convolución lineal

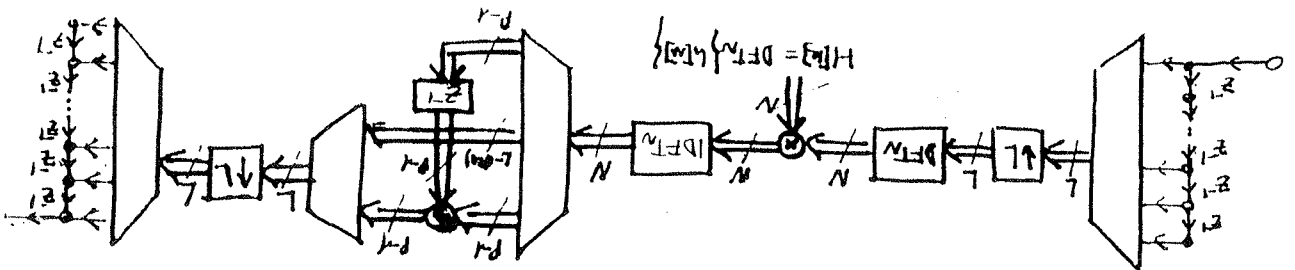


ojo: ahora $N \geq L+P-1$

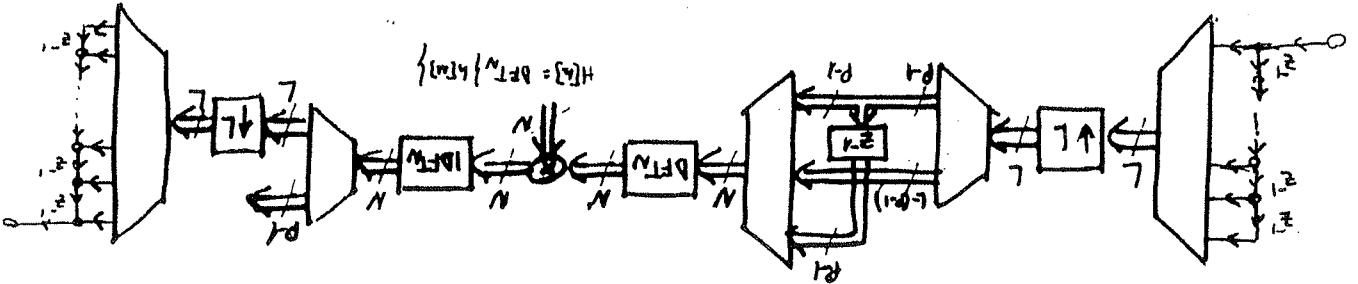
Convolución circular



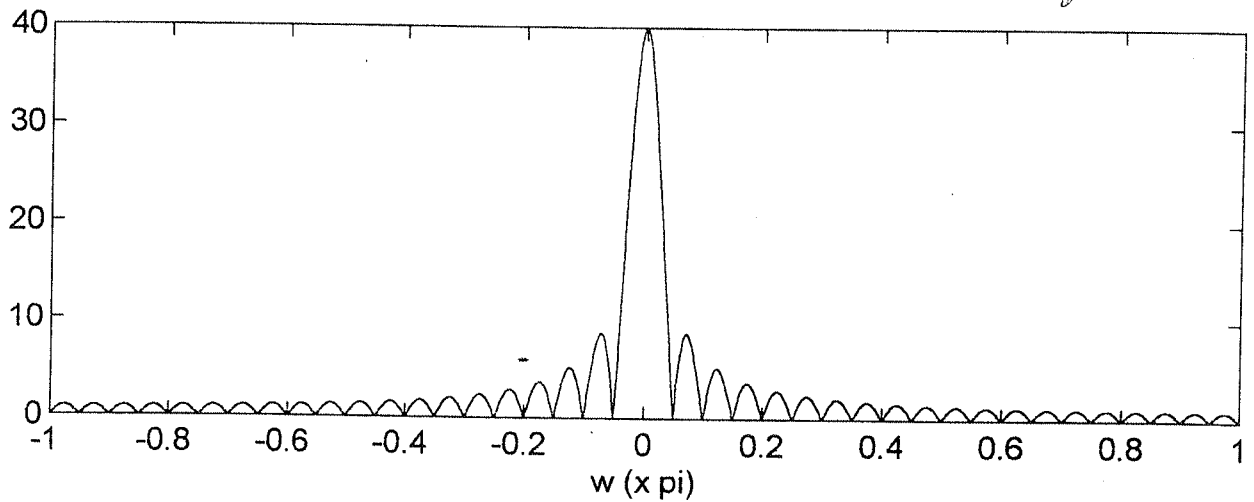
FILTADO "OVERLAP-ADD"



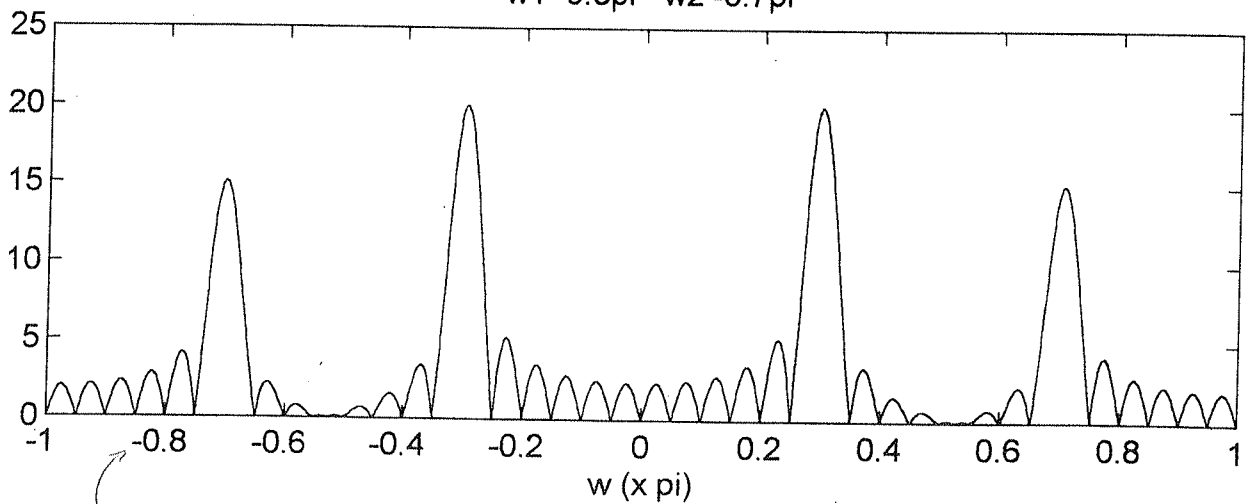
FILTADO "OVERLAP-SAVE"



espectro ventana rectangular de ancho $L=40$

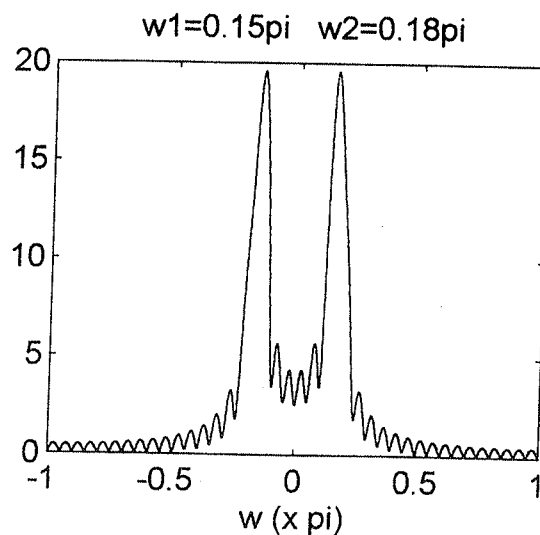
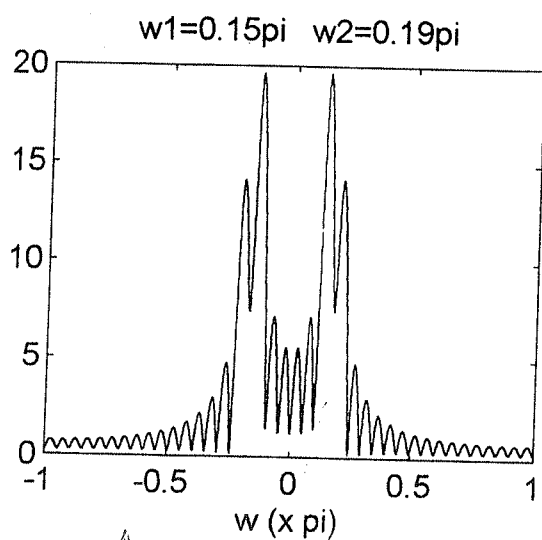
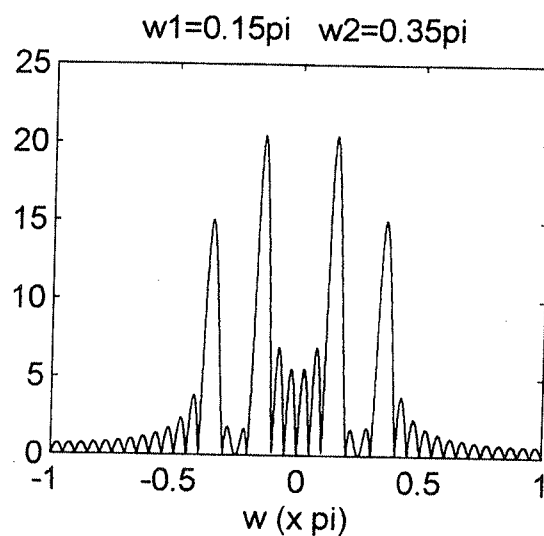
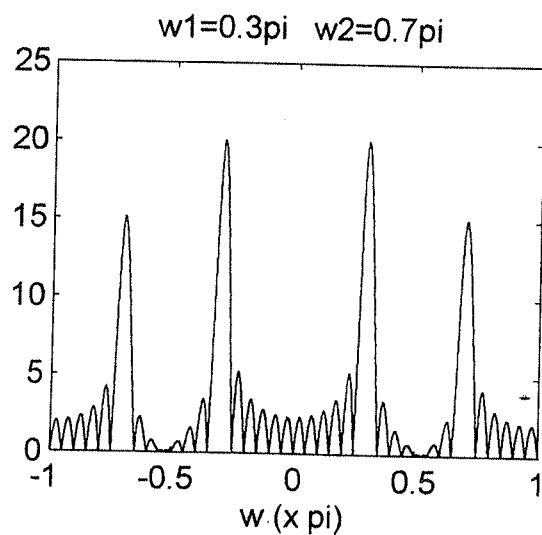


$w_1=0.3\pi$ $w_2=0.7\pi$



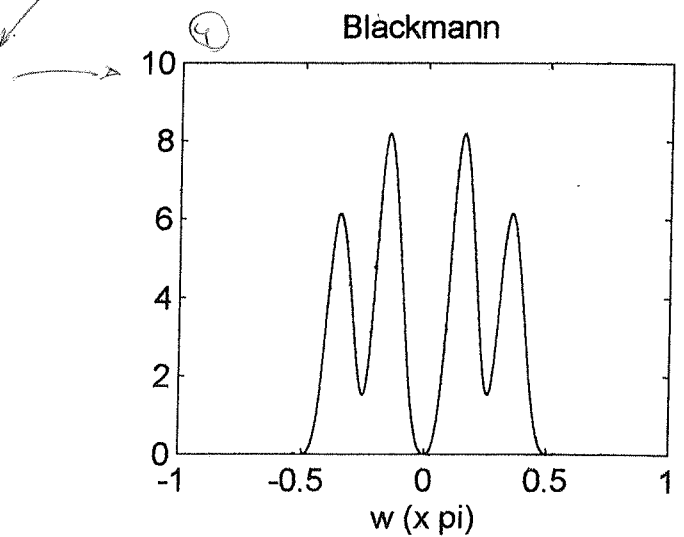
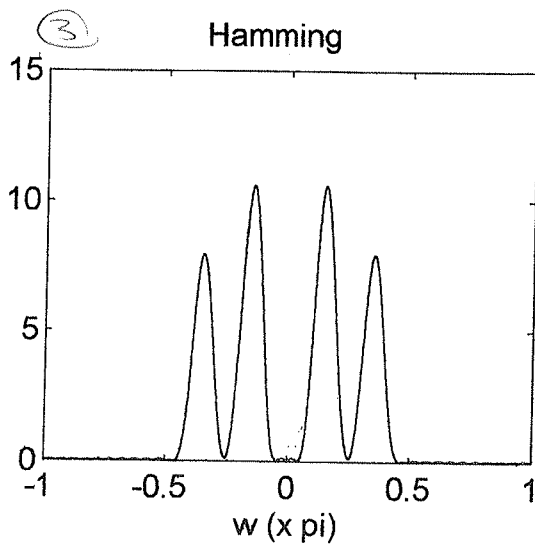
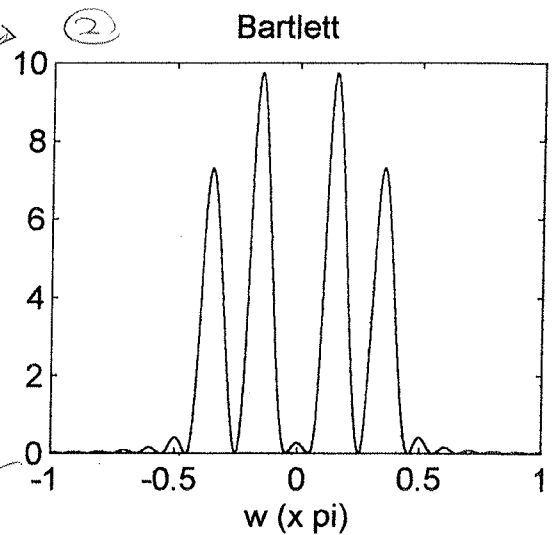
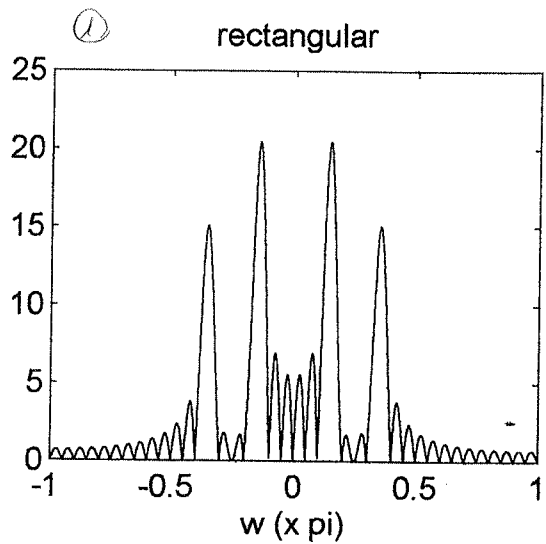
espectro de señal de 2 pulsos centrados en la ventana anterior

acercamiento de las bocas de la transparencia exterior



$\uparrow$ $w_2 - w_1 = 0.04\pi < \text{resolution}$

$L=40 \Rightarrow \text{resolution} = \frac{4\pi}{40} = 0.1\pi$



En este orden, la anchura va aumentando (lobos principal), pero las
fugas van disminuyendo

