

TEMA 6: ESTIMACIÓN ESPECTRAL DE SEÑALES ALEATORIAS

1.- INTRODUCCIÓN

2.- ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS: SESGO Y VARIANZA

3.- ESTIMACIÓN DE LA MEDIA Y LA AUTOCORRELACIÓN

4.- ESTIMACIÓN DIRECTA DE LA DEP: PERIODOGRAMA

5.- ESTIMACIÓN INDIRECTA DE LA DEP

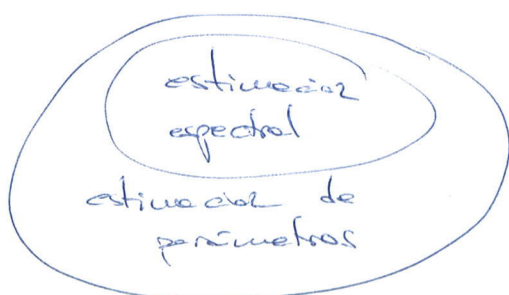
1.- INTRODUCCIÓN

FILTROS DE WIENER:

$$\frac{x[n]}{u[n]} \rightarrow y[n] = \hat{d}[n]$$

Necesitamos calcular $R_{xx}[n]$ y $R_{dx}[n]$, mientras que antes nos los daba en el problema

¿Cómo estimar los parámetros estadísticos de la señal?

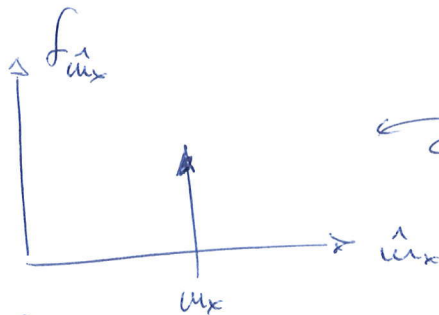
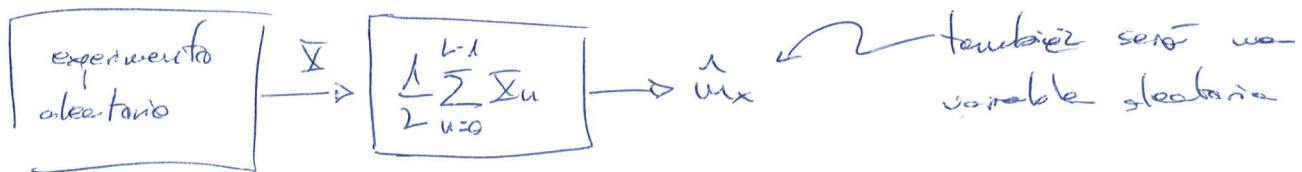


este es de gran importancia, y que tiene muchas aplicaciones

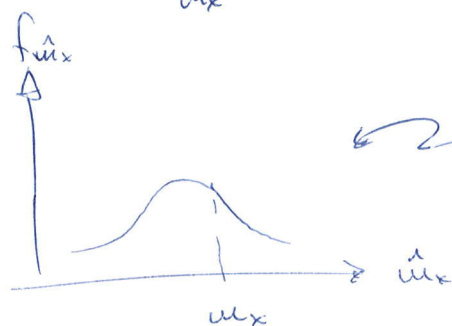
2.- ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS: SESGO Y VARIANZA

	Variable aleatoria	señal aleatoria
estimación de valor	(x, y) v.a. $\hat{y} = \Phi(x)$	$x[n] \rightarrow \boxed{\text{EST}} \rightarrow \hat{y}[n]$
estimación de parámetros	Σ v.a. $\Sigma \rightarrow \boxed{} \rightarrow \begin{matrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\sigma}_x^2 \end{matrix}$	$x[n] \rightarrow \boxed{} \rightarrow \begin{matrix} \bar{x}[n] \\ \hat{\sigma}_x^2[n] \\ \text{DEP} \end{matrix}$

- Estimación de parámetros de variables aleatorias:



¡Además μ_x es valor real



en la práctica, va a tener proporción centrada en μ_x

Señala desearse que la fdp estuviera centrada en μ_x y que fuera estrecha

- Sesgo:
$$B_{\hat{u}_x} = E[\hat{u}_x] - u_x$$

buen estimador $\Rightarrow B_{\hat{u}_x} = 0 \equiv \text{insesgo}$

- Varianza del estimador:
$$S_{\hat{u}_x}^2 = E[\hat{u}_x^2] - E[\hat{u}_x]^2$$

Como L finito $\Rightarrow S_{\hat{u}_x}^2 \neq 0$

Si $L \rightarrow \infty$, puede tender $S_{\hat{u}_x}^2 \rightarrow 0$

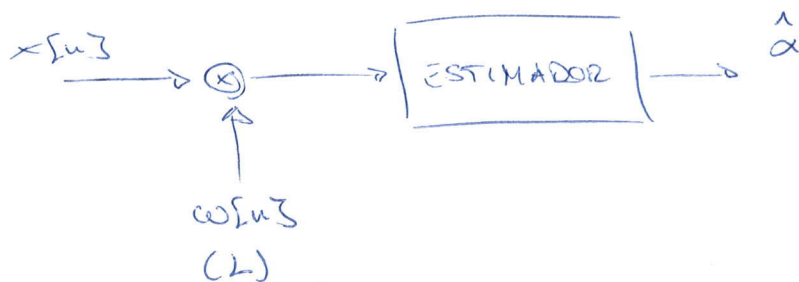
Si $\lim_{L \rightarrow \infty} S_{\hat{u}_x}^2 = 0 \equiv \text{Estimador consistente}$

Ejemplo:

Para los L los:
$$E[\hat{u}_x] = E\left[\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x_i\right] = u_x$$

Lo insesgo

3.- ESTIMACIÓN DE LA MEDIA Y LA AUTOCORRELACIÓN



3.1.- MEDIA

- Estimador de la media de la señal aleatoria:

$$\hat{u}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]$$

linealidad del operador esperanza

$$\begin{aligned} \text{Segg: } E[\hat{u}_x] &= E\left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]\right] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} E[x[n]] = \\ &= \frac{1}{L} u_x = u_x \quad \text{segg de} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Varianza: } \text{VAR} &= \text{VAR}\left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]\right] = \frac{1}{L^2} \sum_{n=0}^{L-1} \text{VAR}[x[n]] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{L} \end{aligned}$$

supervoces independientes
 $= D \text{VAR}(a \underline{x}) = a^2 \text{VAR}(x)$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x^2}{L} = 0 \Rightarrow \text{constante}$$

Es un buen estimador.

Se sabe que por ergodicidad, es decir, que en un solo realizacion tenemos toda la informacion sobre la señal aleatoria

3.2.- AUTOCORRELACION

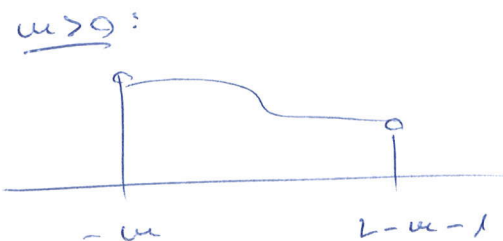
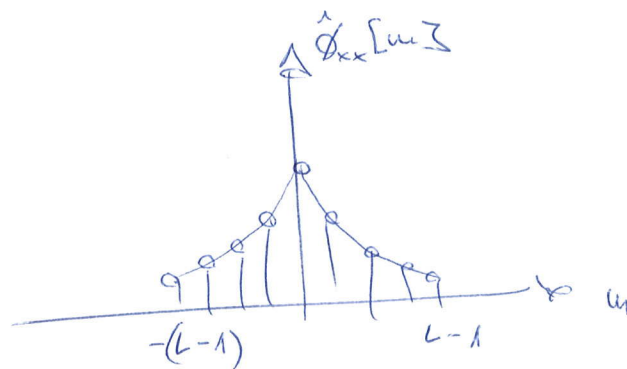
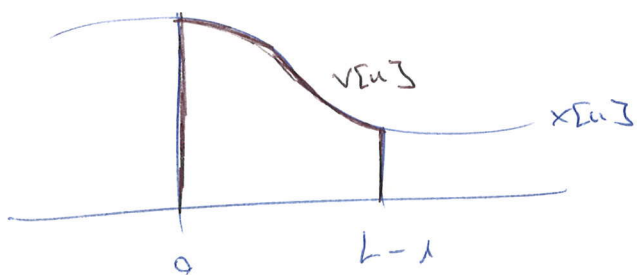
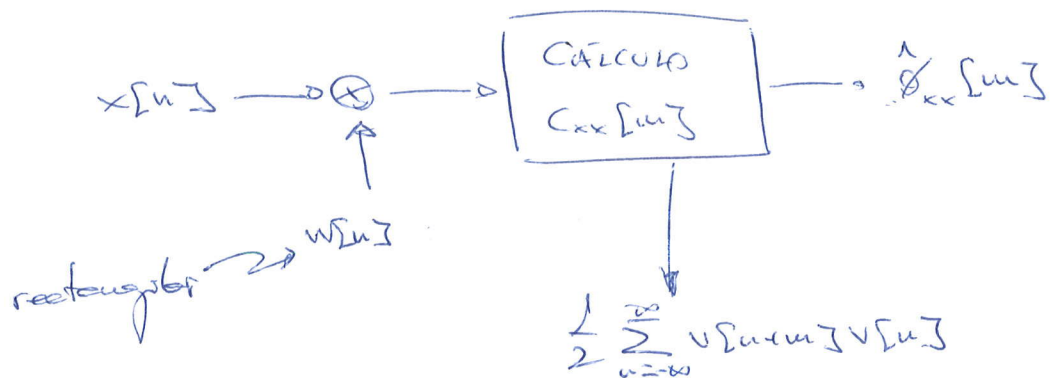
- Notación:

$\phi_{xx}[m]$ $\equiv$ autocorrelación de conjunto

$P_{xx}(\omega)$ $\equiv$ DED

$C_{xx}[m]$ $\equiv$ autocorrelación temporal

Señales ergódicas:



$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{L-m-1} x[n+m] x[n]$$

Para $m \leq 0$ se obtiene la misma $\Rightarrow m \geq |m|$

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-|m|-1} x[n+|m|] x[n] \quad - (L-1) < m < L-1$$

¿Para qué valor de m será mejor la aproximación?

Si: $m = L-1$ $\Rightarrow$ sólo se usan 2 valores de la señal

Para $m=0$, se usa el mayor número de valores posible.

$$- \text{Segg: } E[\hat{\phi}_{xx}[m]] = \frac{1}{L} E \left[\sum_{n=0}^{L-|m|-1} x[n+|m|] \cdot x[n] \right] =$$

$$= \frac{L-|m|}{L} \phi_{xx}[m]$$

$$\left(\sum E[x[n+|m|] \cdot x[n]] \right)$$

¿Es sesgado o insesgado?

$$\left| B_{\hat{\phi}_{xx}[m]} = \phi_{xx}[m] \left(\frac{L-|m|}{L} - 1 \right) \right.$$

$$\left. = - \frac{|m|}{L} \phi_{xx}[m] \right|$$

$$\begin{cases} m=0 \Rightarrow \text{insesgado} \\ m \neq 0 \Rightarrow \text{sesgado} \end{cases}$$

¿Se puede hacer inseguro siempre?

$$\hat{\Phi}_{xx}[m] = \frac{1}{L-|m|} \sum_{n=0}^{L-|m|-1} x[n+m]x[n]$$

aunque esto es inseguro, el otro tiene mejor varianza

Respecto a la varianza:

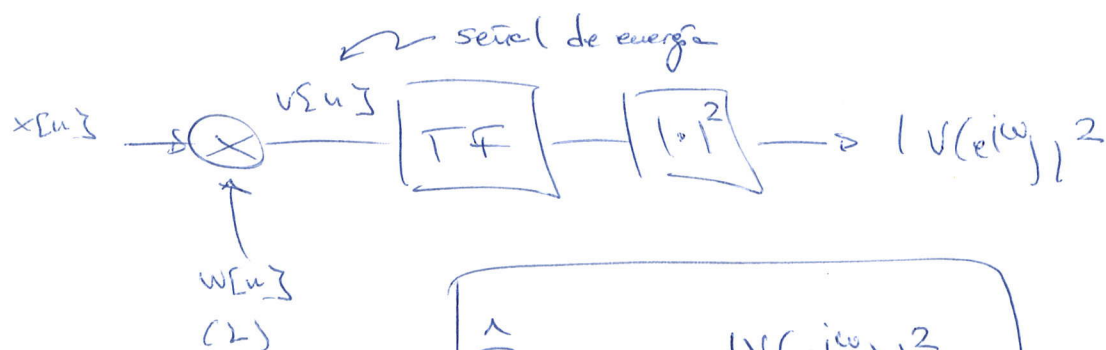
$\left\{ \begin{array}{l} m=0 \rightarrow \text{varianza mínima} \\ m=L-1 \rightarrow \text{varianza máxima} \end{array} \right.$

Esto se soluciona aumentando L

$\lim_{L \rightarrow \infty} \text{VAR}[\hat{\Phi}] \rightarrow 0$ para m fija y finita

Para m finita, el estimador es consistente
(no realmente, aunque se considera que así es)

1.- ESTIMACIÓN DIRECTA DE LA DEP: PERIODOGRAMA



DEP $\sim 2D$

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = \frac{|V(e^{j\omega})|^2}{L}$$

Periodograma $\equiv I(\omega)$

El periodograma es bastante malo

- Cálculo del sesgo:

$$\begin{aligned} E[I(\omega)] &= E\left[\frac{1}{L} |V(e^{j\omega})|^2\right] = E\left[\frac{1}{L} \text{TF} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{xx}[n] \delta[n]\right] = \\ &= \frac{1}{L} \text{TF} \left\{ E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{xx}[n] \delta[n]\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{L} \text{TF} \left\{ E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m] w[n+m] x[n] w[n]\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{L} \text{TF} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[n] w[n+m] w[n] \right\} = \\ &= \frac{1}{L} \text{TF} \left\{ \phi_{xx}[0] C_{ww}[0] \right\} \\ &= \frac{1}{L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega - \delta) |W(e^{j\delta})|^2 d\delta \end{aligned}$$

Convolution

$$\boxed{E[I(\omega)] = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega - \delta) |W(e^{j\delta})|^2 d\delta} \neq P_{xx}(\omega)$$

- El estimador es sesgado

- ¿Qué pasa si aumento el tamaño de la ventana?
- ¿Cómo debería ser la ventana para que sea insegura?
- Si la ventana fuera un delta, se cumpliría, salvo algún valor constante
- Cuanto mayor sea L , se consigue que el espectro de $w(n)$ se aproxime más a un delta

$L \rightarrow \infty \Rightarrow \text{seguro} = 0 \Rightarrow$ ASINTÓTICAMENTE INSEGURO

- Varianza:

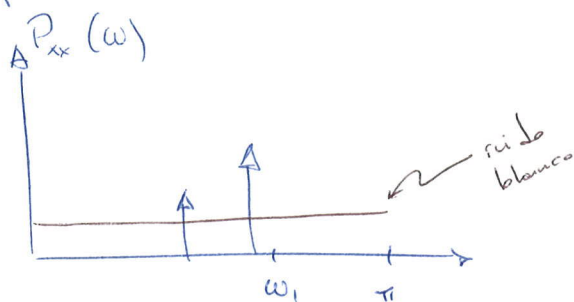
Se puede demostrar que la varianza del periodograma es aproximadamente igual al cuadrado de la DEP.

$$\text{VAR} \{ I(\omega) \} \approx P_{xx}^2(\omega)$$

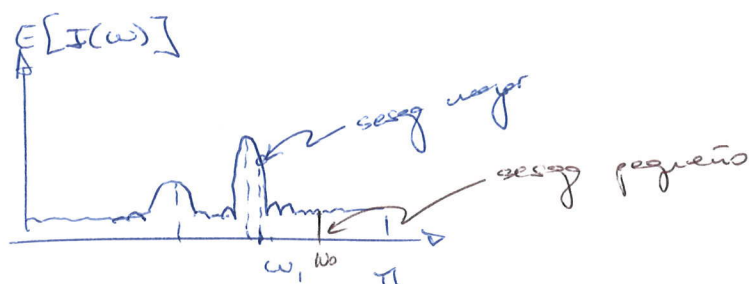
$\Rightarrow$ no varía con L

$\Rightarrow$ es inconsistente

Ejemplo:



Suponemos ventana rectangular



Con una ventana mejor, que minimice el ancho del lóbulo principal, el sesgo será menor.

(*6.1*)

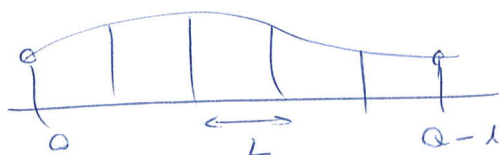
4.1.- PROMEDIADO DE PERIODOGRAMAS

(AKA método de Bartlett)

(*6.2*)

$x[n]$ → tomar Q muestras

Dividir en secciones de L puntos



$$x_r[n] = x[n + rL] \quad 0 \leq n \leq L-1 \quad r = 0:k-1$$

$$k \equiv \text{nº secciones} = \frac{Q}{L}$$

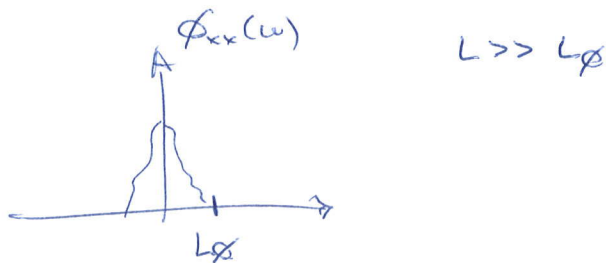
- Se calcula el periodograma de cada bloque y luego se promedia.
- Los periodogramas para los pares, al menos en el sesgo, el sesgo la ventura más pequeña.
- Al promediar los periodogramas se reduce la varianza.
- Compromiso sesgo-varianza

$$I_r(\omega) = \frac{1}{L} |X_r(e^{j\omega})|^2 \quad \text{y} \quad \boxed{\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega)}$$

Características:

- Los periodogramas tienen misma media y varianza.
- Los periodogramas son independientes

→ si L grande, existen más ventanas incorrectas que correctas $\Rightarrow$ se supone incorrectas en general



Sesgo: $E[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K} E[I_r(\omega)] \cdot K = E[I_r(\omega)]$

↑
la de cualquiera

Ventura pequeña $\Rightarrow$ el sesgo aparece

- Varianza: $VAR[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K^2} VAR[I_r(\omega)] \cdot K \approx \frac{1}{K} P_{xx}(\omega)$

Es asintóticamente inseguro

Para $Q \rightarrow \infty$, L fijo (fijo), $K \rightarrow \infty \Rightarrow VAR \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ constante

(*6.3*)

↓

Método de Welch: es un refinamiento del de Bartlett.

- Tome tramos solapados y promedie sus periodogramas.

Se aumenta K para una misma Q , disminuyendo la varianza.

Normalmente, con un solape del 50% se reduce la varianza a la mitad.

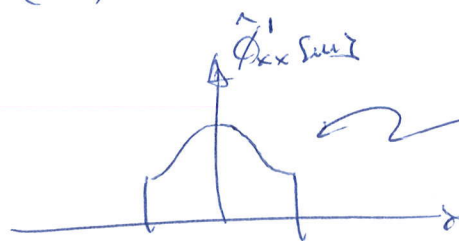
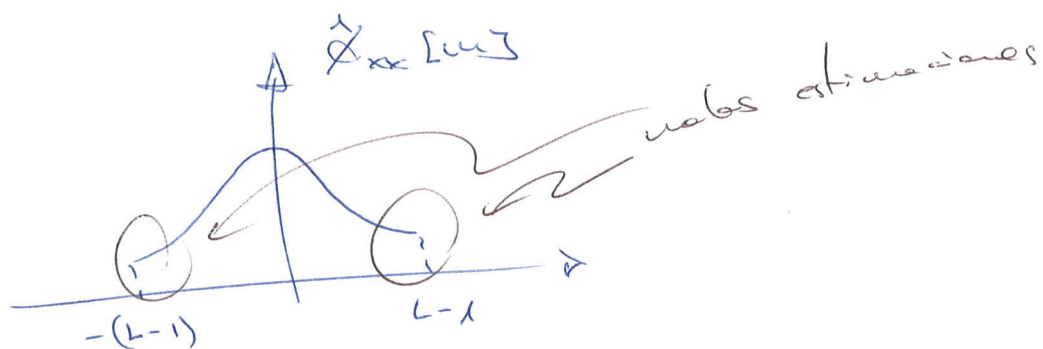
- Problema: no se pueden considerar periodogramas incorrelados $\Rightarrow$ solape $> 50\%$ no mejora.

- Se puede hacer uso de otras formas de ventana.

5.- ESTIMACIÓN INDIRECTA DE LA DEP

- Primero se estima la autocorrelación
- Luego se pasa al dominio de la frecuencia:

$$TF \left\{ \hat{\phi}_{xx}[m] \right\} = \hat{\phi}_{xx}(\omega)$$



eventuales $\Rightarrow$ quedarse con las estimaciones buenas

- Método de Blackman-Tukey: $\boxed{\hat{\phi}_{xx}(\omega) = TF \left\{ \hat{\phi}'_{xx}[m] \right\}}$

Equivalente en palabras al método de Bartlett

Interesa una ventana triangular porque todo su espectro tiene componentes positivas

(* 6.4 - 6.5 *)

