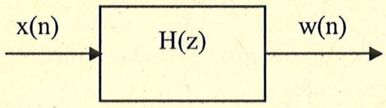
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL 2

TEMA I: ESTIMACIÓN ESPECTRAL PARAMÉTRICA

Ejercicio I-1.
Considere el diagrama de la figura adjunta.



Se sabe que:

$$H(z) = -4 + z^{-1} - 2.z^{-2} + z^{-3}$$

$$S_w(f) = 1$$

a) Identifique el orden p del predictor óptimo, así como los coeficientes del filtro predictor, del filtro de error de predicción y la potencia de dicho error.
b) Obtenga los coeficientes de los filtros de error de predicción óptimos de orden inferior (p-1, p-2, ...), e indique en cada caso la potencia del error de predicción.
c) Obtenga la autocorrelación de la señal x(n) en los instantes 0, 1,...p-1.
d) Dé una formula recursiva para obtener el resto de valores de la autocorrelación.
e) ¿Qué modelo es apropiado para la señal x(n)?

Ejercicio I-2
Se desea estimar la señal d(n) mediante filtrado de la señal x(n):

$$\hat{d}(n) = \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i)$$

Se define el error cuadrático:

$$\xi = \sum_{n=a}^{b} \left(d(n) - \hat{d}(n) \right)^2$$

a) Obtenga razonadamente la expresión de los coeficientes que minimizan el error cuadrático.

Sea: d(0)=1, d(1)=-2, d(2)=3, d(3)=-4, d(4)=5; x(0)=1, x(1)=-1, x(2)=-1, x(3)=-1, x(4)=1 a=1; b=4; p=1.

b) Calcule el valor de lo coeficientes según el criterio anterior.
c) Repita el punto 2, para a=0; b=5. Asuma nulas las muestras de las señales que necesite y no se le hayan dado.
d) Comente las diferencias que existen entre los procedimientos seguidos en los puntos 2 y 3. ¿Cuál le parece mejor?

Solución:

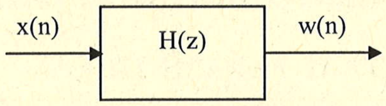
2) $a_0=2$; $a_1=-1.5$; $\xi=29$

3) $a_0=1.8$; $a_1=-1.2$; $\xi=31.6$

Ejercicio I-3.

Un sistema LTI se caracteriza por una respuesta en frecuencia H(z):

$$H(z) = -3 + z^{-1} - 2.z^{-2} + 2.z^{-3}$$



a) Mediante el algoritmo de Schur-Chon compruebe si admite filtro inverso causal y estable.

Cuando se hace pasar cierta señal aleatoria x(n) por el filtro H(z) se obtiene a la salida ruido blanco de potencia igual a 2.

b) Obtener la autocorrelación de la señal x(n).

c) Obtenga los coeficientes de los filtros de error de predicción óptimos de orden 4, 3, 2 y 1 e indique en cada caso la potencia del error de predicción.

d) ¿Qué modelo es apropiado para la señal x(n)?

e) ¿Que ganancia tendría un cuantificador diferencial que usara el predictor de orden 3?

Ejercicio I-4.

Una señal aleatoria y estacionaria x[n], con media cero y función de autocorrelación

$$\gamma_x(k) = \beta^{|k|}$$

pasa por un sistema lineal descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

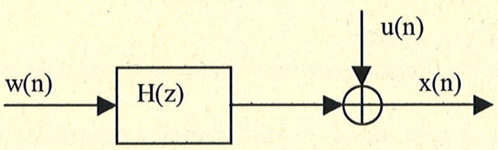
1. Determinar la densidad espectral de potencia de y[n], en el dominio transformado z e identifique el modelo de señal más adecuado para y[n]. Escriba una ecuación en diferencias que permita obtener la señal y[n] a partir de un ruido blanco w[n].
2. Determine la función de autocorrelación (en forma explícita) de la señal y[n].

Notas: Se recomienda el empleo de la transformada z inversa en el apartado 3, aunque puede resolver el problema como desee. Por si lo necesita, le recuerdo la relación entre la densidad espectral de potencia de la entrada y salida de un sistema lineal:

$$S_y(z) = H(z).H^*\left(1/z^*\right).S_x(z)$$

Ejercicio I-5.

En la figura adjunta, w(n) y u(n) son dos secuencias de ruido blanco cuya correlación cruzada es nula.



Suponga en primer lugar que la secuencias w(n) y u(n) tienen potencias de valor 1 y 0,5 respectivamente, y que el filtro tiene una función del sistema: $H(z)=1+z^{-1}$

a) Obtener la secuencia de autocorrelación de la señal x(n).

b) Indicar que tipo de modelo (AR, MA o ARMA) se ajusta a la señal, y obtener sus parámetros.

Suponga a continuación que el filtro presenta una función del sistema: $H(z)=1/(1-\alpha z^{-1})$, con $\alpha=4/5$.

c) Obtener los valores de la potencia de las señales w(n) y u(n) para que los valores de la autocorrelación de la señal x(n) $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ coincidan con los del apartado a).

d) Indique, justificadamente, que tipo de modelo se ajusta a la señal en este caso y obtenga los parámetros del modelo.

e) En los dos casos considerados, obtener los dos primeros coeficientes parcor (k_1 y k_2), y el error cuadrático medio correspondiente, del filtro de error de predicción (de mínimo error cuadrático medio) de la señal x(n).

Ejercicio I-6.

La señal aleatoria *x(n)* viene dada por la siguiente expresión, donde ϕ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo *[0, 2π),* y *w(n)* es una secuencia de ruido blanco y gaussiano de potencia unidad e independiente de la variable f:

$$x(n)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}+\phi\right)+w(n)$$

1. Obtener la autocorrelación y la densidad espectral de potencia (en función de la frecuencia normalizada f) de x(n).
2. Obtenga los coeficientes de los filtros de error de predicción de ordenes 1, 2, 3 y 4 que minimizan la potencia de dicho error.
3. Calcule las potencias del error de predicción obtenidos con los filtros del apartado anterior, así como la densidad espectral de potencia de la señal error de predicción del filtro de orden 2, y represéntela gráficamente.
4. Si incrementáramos el orden del predictor indefinidamente indique el límite de la potencia de dicho error y cual sería la respuesta del filtro de error de predicción correspondiente. Razone su contestación.
5. Obtener la Densidad espectral de potencia de la señal x(n), basada en su modelo AR(2), indicando el valor de frecuencia en que alcanza su máximo. Represéntela gráficamente y compárela con la original.

Ejercicio I-7.

Estimación de parámetros

Para la estimación un parámetro m se dispone de dos observaciones incorreladas, x0 y x1, y con función densidad de probabilidad conocida:

$$f_{x0}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} \qquad \forall m$$

$$f_{x1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} & m<0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{8}} & m\geq 0\end{cases}$$

El objetivo de este ejercicio es la elección del mejor estimador posible que se pueda encontrar, así como valorar sus ventajas e inconvenientes. Para ello, se van a estudiar los siguientes cinco estimadores de la media:

$$\hat{m}_0 = x_0 ; \qquad \hat{m}_1 = \frac{x_0 + x_1}{2}; \qquad \hat{m}_2 = \frac{2x_0 + x_1}{3}; \qquad \hat{m}_3 = \frac{x_0 + 2x_1}{3}; \qquad \hat{m}_4 = \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{2}$$

1. Determinar el sesgo de los cinco estimadores propuestos.
2. Determinar la varianza de los cinco estimadores propuestos.
3. Dibuje (en función de m), la varianza de los cinco estimadores propuestos.
4. Responda a las siguientes cuestiones y explique su respuesta de forma cualitativa.
   (a) ¿Es mejor el estimador m1 que el m0, para todo valor de m?
   (b) ¿Es mejor el estimador m2 que el m1, para todo valor de m?
   (c) ¿Es mejor el estimador m3 que el m1, para todo valor de m?
   (d) ¿Es mejor el estimador m4 que el m1, para todo valor de m?

√ **Ejercicio I-8.**

Sea una señal real x[n], que responde al modelo definido por la ecuación en diferencias

$$x[n]=-a_1\, x[n-1] - a_2\, x[n-2] + w[n],$$

donde a_1=-3/4 y a_2=1/2 y w[n] es un ruido blanco gaussiano del que se conocen los parámetros estadísticos E[w[n]]=0 y $E[w^2[n]]=2$.

1. Identificar el tipo de modelo que mejor se adapta a la señal x[n] y escribir una ecuación en diferencias para la función de autocorrelación $R_{xx}[k]$.
2. Determinar la densidad espectral de potencia $S_{xx}(f)$ de la señal x[n], obtener su valor para las frecuencias normalizadas {f = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4} y dibujar los resultados obtenidos.
3. Calcular el valor de la media y la varianza de la señal x[n].
4. Determinar los valores de la función de autocorrelación de $R_{xx}[k]$, para {k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Dibujar el resultado obtenido.
5. Describir el comportamiento de la función de autocorrelación obtenida. Si la función de autocorrelación es una función oscilante, determinar su frecuencia fundamental. Si es decreciente, determinar el valor de k para el cual la función alcanza un 10% de su valor máximo.

√ **Ejercicio I-9.**

Sea x(n) una señal aleatoria estacionaria. Para predecir dicha señal, se utiliza un predictor lineal de orden 3. El error de predicción de mínima potencia se obtiene con la siguiente expresión:

$$d(n) = x(n) + \frac{4}{5}.x(n-1) - \frac{2}{5}.x(n-2) - \frac{3}{5}.x(n-3)$$

$$E\left\{d^2(n)\right\} = \frac{14}{25}$$

1. Obtenga todos los valores que pueda de la autocorrelación de la señal x(n).
2. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo AR(4).
3. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo AR(3).
4. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo MA(5).

En todos los casos obtener los primeros valores e indicar el procedimiento para obtener los demás.

5. Obtener la expresión de la densidad espectral de potencia de x(n) en función de la frecuencia normalizada, asumiendo que x(n) se ajusta a un modelo MA(3), y calcular su valor para los valores de frecuencia (f= 0, ¼, ½). Explicar el resultado numérico obtenido.

√ **Ejercicio I-10.**

Una señal aleatoria $x[n]$ responde al modelo

$$x[n] = ax[n-1] + w[n] + bw[n-1]$$

donde $w[n]$ es una señal aleatoria de media cero y varianza $\sigma_w^2 = 0,25$.

a) Determinar el tipo y orden del modelo, así como las ecuaciones que relacionan los coeficientes del modelo (a y b) con la función de autocorrelación de la señal $x[n]$.
b) Calcular los coeficientes a y b del modelo, utilizando las siguientes estimas de la función de autocorrelación $\gamma_{xx}[0] = 1$ y $\gamma_{xx}[1] = 0,75$.
c) Si se utiliza un predictor lineal para la señal $x[n]$, determinar los coeficientes óptimos del predictor para los siguientes órdenes P=1,2,3 y 4, así como el valor cuadrático medio del error de predicción. Dibujar la evolución del valor cuadrático medio en función del orden del predictor P.

√ **Ejercicio I-11.**

La señal x(n) se genera filtrando ruido blanco de potencia unidad con un filtro de función de transferencia $B(z)=1+z^{-1}+3/4.z^{-2}$.

1. Obtenga la expresión de la DEP de x(n) y calucule sus valores para las frecuencias 0, ¼ y 1/2.
2. Repita el apartado anterior, aplicando a la señal x(n) un análisis espectral paramétrico basado en modelado AR(3).
3. Compare los valores numéricos obtenidos en los apartados 1 y 2 e indique que deberíamos hacer para mejorar el resultado obtenido en el segundo.

La señal y(n) se genera filtrando ruido blanco de potencia unidad con un filtro de función de transferencia H(z)=1/B(z)

4. Para dicha señal y(n), obtenga los filtros de error de predicción óptimos de orden 1, 2 y 3, así como las potencias del error de predicción obtenidas.

√ **Ejercicio I-12.**

Análisis local de señales.

La energía local de una señal x[n] puede estimarse mediante la expresión

$$e[n] = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2[m] \qquad (1)$$

donde N es el tamaño de una ventana.

a) Escribir una expresión que permita calcular e[n] en la forma recursiva:
$$e[n] = e[n-1] + \text{otros terminos} \qquad (2)$$
b) Escribir, si es posible, una expresi´on an´aloga a la del apartado anterior, pero utilizando una ventana de Hamming, definida en la forma:
$$w[n] = 0,54 - 0,46.\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$
$$w[n] = 0, \qquad \text{resto}$$
Si no se puede, explicar la razón.

c) Compare el coste computacional (en términos de multiplicaciones necesarias) para realizar la estimación de la energía utilizando las expresiones (1) y (2), para obtener estimaciones de e[n] cada N=2 muestras.

d) Determinar la relación existente entre el estimador de la función de autocorrelación local

$$r[k;n] = \frac{1}{N-|k|} \sum_{m=n-N+1+|k|}^{n} x[m]x[m-|k|] \qquad (3)$$

con el estimador de energía local dado por la ecuación (1).

e) Determinar el sesgo y la varianza del estimador de energía local (1) suponiendo que x[n] es ruido blanco gaussiano y se conoce el momento

$$E\{x^2[m]x^2[n]\} = \sigma_x^4(\delta[m-n]+1)$$

Nota: tenga en cuenta que este estimador es de energía, mientras que los datos estad´ısticos que se tienen son de potencia. Relacione ambos conceptos de forma que le permita calcular el sesgo y la varianza.

√ **Ejercicio I-13.**

Un sistema de adquisición de datos recoge la señal x[n], que consiste en la se˜nal deseada s[n] contaminada por un ruido aditivo indeseado r[n], cuyo espectro es constante en la banda de frecuencias ocupada por la señal s[n]. Se sabe que el ruido (además de ser blanco) tiene media cero y varianza unidad. También se sabe que la señal s[n] tiene media cero y función de autocorrelación $\gamma_{ss}[k] = (0,6)^{|k|}$ y está incorrelada con el ruido ($\gamma_{rs}[k] = \gamma_{sr}[k] = 0$).

El objetivo de este ejercicio consiste en el diseño de un filtro que reduzca, en lo posible, el ruido que afecta a s[n], utilizando la información estadística de la que se dispone. Para ello se utilizará un filtro lineal e invariante, con respuesta al impulso h[n], cuya salida se denominará

$$y[n] = x[n] * h[n] = (s[n] + r[n]) * h[n]$$

Por último, la diferencia entre y[n] y s[n] se denominará e[n], que corresponde al ruido residual no eliminado por el filtro.

a) Identificar el modelo al que corresponde la señal y calcular su densidad espectral de potencia.

b) Suponiendo que h[n] es un filtro FIR de orden 2, determine la expresión del error cuadrático medio E_e de la señal de error residual, en función de los valores de h[n] y de los estadísticos conocidos.

c) Obtenga los valores de los coeficientes del filtro $\{h[0], h[1]\}$ que minimiza el error E_e.

d) Obtenga la relación señal a ruido (en dB) a la salida del filtro y compárela con la obtenida sin utilizar el filtro.

e) Dibuje, aproximadamente, los espectros de las señales s[n], x[n], y[n], r[n] y e[n].

f) Si se desea utilizar un método de análisis espectral clásico (método de Bartlett) para determinar el espectro de la señal s[n], proponer un algoritmo (use un flujograma o pseudocódigo) para realizarlo, utilizando el filtro calculado.

√ **Ejercicio I-14.**

Se desea estimar la potencia media E de una señal aleatoria estacionaria en sentido amplio x[n] a partir de un conjunto limitado de muestras de la señal N = 10, de la que se conoce la media m_x y el momento de cuarto orden:

$$E\left\{x^2[m]x^2[n]\right\} = E^2\left(10.\delta[m-n]+1\right).$$

Para ello, se utilizarán los estimadores E_1 y E_2, definidos como:

$$E_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

$$E_2 = a.E_1$$

donde a es una constante.

a) Calcular el sesgo de los estimadores E_1 y E_2

b) Calcular la varianza de los estimadores E_1 y E_2

c) Calcular el error cuadrático medio que se obtiene con los estimadores E_1 y E_2.

d) Determinar el valor óptimo de a que minimiza el error cuadrático medio del estimador E_2, sabiendo que la potencia media E de la señal x[n] tiene un valor en torno a 1 ($E \approx 1$).

e) Si el valor óptimo le ha salido igual a 1, explique el porqué el estimador E_2 no puede mejorar la estima de E_1. Si no es así, explique el aparente contrasentido de que multiplicar por una constante el estimador que se utiliza habitualmente consiga un valor mejor.

TEMA II: MODELADO DE LA SEÑAL DE VOZ

Ejercicio II-1.

En los siguientes apartados asuma una ventana de análisis rectangular de N muestras.

a) Defina y explique el concepto de autocorrelación localizada $R_n[k]$ y dibuje un diagrama de un sistema que permita su obtención.

b) Compare la esperanza de la autocorrelación localizada con la autocorrelación de la señal, supuesta estacionaria.

c) Defina y explique los conceptos de Transformada de Fourier Localizada $X_n[f]$ y de Transformada Discreta de Fourier Localizada $X_n[k]$. Indique y justifique la relación entre la autocorrelación y la Transformada de Fourier Localizada.

d) Dibuje un diagrama de un banco de filtros paso banda que permita la obtención de $X_n[k]$.

e) Es posible obtener la autocorrelación localizada a partir del modulo de la DFT localizada, $|X_n[k]|$, k=0,... N-1? Justifique la respuesta.

7 **Ejercicio II-2.**

a) Describa el funcionamiento del vocoder LPC (vocoder de predicción lineal), especificando algún procedimiento de discriminación del tipo de trama (sonora o sorda) y obtención de la frecuencia fundamental.

Un vocoder LPC-3 utiliza una frecuencia de muestreo de 8 KHz y una trama de 20 ms.

El sistema de análisis identifica una trama como sonora con una frecuencia fundamental de 400 Hz, y obtiene la siguiente estima de su autocorrelación:

$\gamma(0) = 2; \quad \gamma(1) = 1; \quad \gamma(2) = 0.5; \quad \gamma(3) = 0.5$

Se pide:

b) Identifique la señal de excitación y obtenga los coeficientes del filtro de síntesis para esta trama.

Sea y(n), n=0,...,159 la trama sintetizada, e Y(k), k=0,...,159 su DFT.

c) Obtenga el valor numérico de Y(k), para k=0,...,21.

d) ¿Cree correcta la elección de un vocoder LPC-3? Razone la respuesta.

TEMA III: CODIFICACIÓN DE LA SEÑAL DE VOZ

√ **Ejercicio III-1.**

Considere una señal estacionaria y(n), con función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [-1,1]. Considere la señal x(n), resultado de atenuar la señal y(n) por un factor 100:

$$x(n) = 10^{-2}.y(n)$$

El ejercicio consiste en analizar la cuantificación de estas dos señales usando distintos tipos de cuantificadores, todos ellos de 8 bits.

Si se utiliza un cuantificador uniforme “mid rise” con nivel de saturación de 1:

a) Obtener la expresión de la potencia del ruido de cuantificación y la relación señal a ruido para las señales x(n) e y(n).
b) Repita el punto dos para un nivel de saturación del cuantificador de 1/2.

Si se utiliza un cuantificador logarítmico con ley A=100 y valor de saturación 1:

$$F(x) =) \begin{cases} \dfrac{A.|x|.sig(x)}{1+\ln(A)}, & 0 \le |x| \le \dfrac{x_M}{A} \\ x_M \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A.|x|}{x_M}\right).sig(x)}{1+\ln(A)}, & \dfrac{x_M}{A} \le |x| \le x_M \end{cases}$$

c) Obtener la relación señal a ruido para las señales x(n) e y(n).

Supuesto que la señal y(n) se generara mediante la ecuación:

$$y(n) = w(n) + y(n-1) - \frac{4}{5}y(n-2) + \frac{3}{4}y(n-3)$$

Siendo w(n) un ruido blanco

d) ¿Que predictor utilizaría y cual sería la ganancia de la configuración diferencial del cuantificador de la señal y(n)? (Suponga que la relación señal a ruido de cuantificación es mucho mayor que 1).

√ **Ejercicio III-2.**

En este ejercicio se va a realizar una simulación de un sistema de modulación delta con y sin adaptación. Para ello, se va a utilizar una señal de prueba

$$x(t) = A\,sen(2\pi f_x t)$$

donde A=10 es la amplitud de la señal y f_x = 1Hz es la frecuencia de la señal. La señal es muestreada con una frecuencia de 32 muestras/segundo y la simulación se va a realizar sobre un intervalo de tiempo de 0,5 segundos ($0 \le t \le 0,5$).

En el caso de la simulación del modulador delta sin adaptación, utilice un valor para el nivel de reconstrucción $\Delta = 1$, mientras que para el modulador delta con adaptación, utilice el siguiente algoritmo (Sklar 1988):

$$\Delta[n] = \begin{cases} |\Delta[n-1]| \dfrac{\hat{d}[n] + 0,5\,\hat{d}[n-1]}{\hat{d}[n]} & si \quad \Delta[n-1] \ge \Delta_{\min} \\ \Delta_{\min} & si \quad \Delta[n-1] < \Delta_{\min} \end{cases}$$

donde $\Delta[n]$ es el nivel de reconstrucción, $\hat{d}[n] = \pm 1$ es la señal binaria cuantificada que se envía al canal y $\Delta_{\min} = \frac{1}{8}$.

a) Dibujar el diagrama de bloque del transmisor y receptor de un modulador delta y de un modulador delta adaptativo. Asuma que el coeficiente del predictor es igual a 1: ($\tilde{x}[n] = \hat{x}[n-1]$).
b) Realizar la simulación del modulador delta sin adaptación y dibujar la señal reconstruida en el receptor junto a la señal original muestreada, asumiendo que no hay errores de canal.
c) Realizar la simulación del modulador delta con adaptación y dibujar la señal reconstruida en el receptor junto a la señal original muestreada, asumiendo que no hay errores de canal.
d) Calcular la relación señal a ruido (en dB) para los casos de los dos apartados anteriores.
e) Calcular la relación señal a ruido (en dB) que se obtendría con un cuantificador uniforme que suministre la misma tasa binaria que el modulador delta, suponiendo que el ruido está uniformemente distribuido, y que se utiliza el mayor número de niveles de cuantificación posible compatible con un muestreo eficiente de la señal.

Nota: Considere que el filtro reconstructor parte de reposo (condiciones iniciales nulas).
También considere los siguientes valores: $\hat{d}[-1] = 1$; $\hat{x}[-1] = -0{,}1$; $\Delta[-1] = 1$

✓ **Ejercicio III-3.**
Se utiliza un cuantificador de 3 bits para digitalizar una señal x(n), que presenta una función densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = a\exp(-10|x|), \qquad -1 < x < 1$$

Suponga en primer lugar que el cuantificador es uniforme "midrise" y con nivel de saturación (x_{Max}) igual a 1.

a) Obtener la relación señal a ruido de cuantificación, empleando hipótesis de ruido uniformemente distribuido.
b) Obtener la relación señal a ruido de cuantificación exacta, sin realizar la aproximación del apartado anterior.
c) Explicar de forma breve y razonada el resultado obtenido en a) y b)

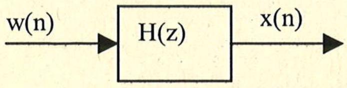
Suponga a continuación que el cuantificador es de nuevo uniforme y "midrise" pero diseñado para que la probabilidad de sobrecarga sea de 0,02

d) Obtener los valores de los niveles de decisión y de reconstrucción.
e) Repita el apartado a) con este nuevo diseño.
f) Repita el apartado b) con este nuevo diseño.
g) Explicar de forma breve y razonada la causa de la diferencia entre los resultados obtenidos en b) y f).

✓ **Ejercicio III-4**. Cuantificación

En la figura adjunta, el filtro tiene una función de transferencia $H(z)=1+z^{-1}+z^{-2}$.

w(n) es una secuencia de ruido con función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [-1, 1], e independencia estadística entre sus muestras (para k≠n, w(n) es estadísticamente independiente de w(k)).



a) Obtener la relación señal a ruido de cuantificación, si la señal x(n) es procesada por un cuantificador uniforme de 8 bits, cuyo nivel de saturación (x_M) es el mínimo posible, condicionado a que la probabilidad de saturación sea nula.
b) Idem que a) pero usando un cuantificador logarítmico de ley A (A=100):

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{A.|x|.sig(x)}{1+\ln(A)}, & 0\le |x|\le \dfrac{x_M}{A} \\ x_M\dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A.|x|}{x_M}\right).sig(x)}{1+\ln(A)}, & \dfrac{x_M}{A}\le |x|\le x_M \end{cases}$$

c) Dibuje y explique el esquema de un cuantificador diferencial.
d) Obtenga los coeficientes del predictor óptimo de orden 3 cuando se aplica la señal x(n) al cuantificador, y la ganancia lograda con este esquema diferencial.

√ **Ejercicio III-5.**

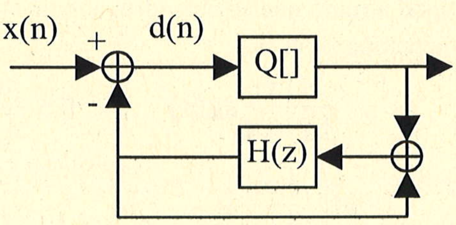
En la figura adjunta se presenta el esquema de un cuantificador diferencial de orden 3, óptimo para la señal x(n), del que se conocen los siguientes datos:

$$H(z)=\frac{5}{3}.z^{-1}-\frac{4}{3}.z^{-2}+\frac{1}{2}.z^{-3}$$

$$E\left\{d^2(n)\right\}=\frac{3}{5}$$

Q[] es un cuantificador uniforme de 10 bits, siendo $X_{max}=4$

a) Termine de dar nombres a las señales involucradas, dibuje el esquema del sintetizador y obtenga la expresión de la ganancia del cuantificador diferencial (justifique la razón de dicha ganancia).
b) Calcule la relación señal a ruido de cuantificación de este sistema (suponga que no hay saturación).
c) Sea $R_x(k)$ la autocorrelacion de la señal x(n). Teniendo en cuenta la información de que dispone, calcule el valor de $R_x(k)$ para aquellos indices k que sea posible hacerlo.



√ **Ejercicio III-6**

Una señal de voz x[n] puede modelarse de la forma

$$x(n) = s(n).f(n)$$

donde s[n] es una señal aleatoria con función densidad de probabilidad de primer orden

$$f_X(x) = a.e^{-2|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

y f[n] es una señal que depende del fonema, constante durante la duración de cada uno de los fonemas y que puede presentar dos valores, uno para el caso de fonemas sonoros f[n] = 1, mientras que su valor para el caso de fonemas no sonoros es f[n] = 0,01.

La señal se cuantifica con un cuantificador Q[ ] uniforme de 8 bits.

a) Determinar el valor de x_{max} para que el cuantificador tenga una probabilidad de sobrecarga menor del 2%.

b) En la situación del apartado anterior, determinar la relación señal a ruido, cuando los fonemas son sonoros.

c) En la situación del primer apartado, determinar la relación señal a ruido, cuando los fonemas son no sonoros.

d) Obtener la relación señal a ruido que se obtendría empleando un cuantificador logarítmico de ley A = 87,6.

e) Dibujar un diagrama de bloques de un sistema que pueda conseguir reducir la distorsión de cuantificación para esta señal, sin aumentar la tase binaria. Explicar brevemente la idea básica de la propuesta presentada y el porqué se prevé una mejora.

√ **Ejercicio III-7.**

Una señal aleatoria x[n], con función densidad de probabilidad

$$p(x) = Ae^{-4|x|}, \forall x$$

pasa por un cuantificador uniforme 'mid-rise' de 8 bits.

a) Calcular el valor del escalón de cuantificación Δ para que la probabilidad de sobrecarga sea del 0,01%.

b) Determinar la potencia media de la distorsión (ruido) de cuantificación, calculando por separado la contribución granular y de sobrecarga. Calcular la relación señal a ruido de cuantificación.

c) Para una muestra concreta k de x[n], de valor x[k]=0,1047, determinar en qué intervalo de decisión cae (identifique la posición de los intervalos positivos que corresponde a esta muestra), el valor del nivel de reconstrucción y del error de cuantificación para esta muestra.

d) Determine la relación señal a ruido que se obtendría con un cuantificador logarítmico de ley A, cuya característica de compansión es :

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{A|x|}{1+\ln A} sg(x) & 0 \le \dfrac{|x|}{x_{max}} \le \dfrac{1}{A} \\[2ex] \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A|x|}{x_{max}}\right)}{1+\ln A} x_{max} sg(x) & \dfrac{1}{A} \le \dfrac{|x|}{x_{max}} \le 1 \end{cases}$$

Ejercicio III-8.

Sea x[n] una señal estacionaria en sentido amplio, de la que se conoce la siguiente información estadística:

- Su media m_x es nula.
- Su función de autocorrelación es $\gamma_x(k) = 0,9^{|k|}$.
- Su función densidad de probabilidad es gaussiana.

a) Calcule la relación señal a ruido (en dB) de un cuantificador uniforme de 5 bits/muestra para la señal x[n], suponiendo un factor de sobrecarga

$$s = \frac{x_{max}}{\sigma_x} = 4$$

b) Si se utiliza el siguiente predictor óptimo

$$\hat{x}(n) = a_1 . x(n-1)$$

que minimiza el error cuadrático medio del error de predicción, calcule la ganancia de predicción (en dB) cuando se utiliza una configuración diferencial, así como la relación señal a ruido (en dB). (Asuma que la relación señal a ruido es suficientemente grande).

NOTA MATEMÁTICA: En muchos problemas de comunicaciones es necesario calcular la función de error complementario:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

integral que puede calcularse fácilmente de forma numérica o con la ayuda de tablas. Sin embargo, se puede obtener una buena aproximación de forma rápida (y más imprecisa, aunque suficiente para los propósitos de este examen) utilizando la siguiente media entre las cotas superior e inferior de la función erfc(x), dadas por:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} < erfc(x) < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + 4/\pi}}$$

Ejercicio III-9.

Una señal x[n], con media cero y función densidad de probabilidad triangular y valor máximo max(x(t)) = 10 se convierte en una señal digital al pasar por un cuantificador no uniforme, con niveles de decisión $\{x_i = -7, -3, -1, 0, 1, 3, 7\}$. Los niveles de reconstrucción son elegidos de forma que est´en situados en el centro de cada intervalo de posibles valores de x, salvo los niveles de reconstrucción extremos $\hat{x}_{-4}$ y $\hat{x}_4$, que deberán optimizarse.

Se pide:

a) Determine el valor de los niveles de reconstrucción $\hat{x}_{-4}$ y $\hat{x}_4$, para que el error cuadrático medio en sus intervalos sea el m´ınimo posible.

b) Calcule el valor cuadrático medio del error de cuantificación.

c) Calcule la relación señal a ruido de cuantificación.

d) Compare los resultados obtenidos con la que se obtendría con la fórmula aproximada para cuantificador uniforme en todo el intervalo. Explique cualitativamente el resultado obtenido.

Ejercicio III-10.

a) Describa el funcionamiento del vocoder LPC (vocoder de predicción lineal), especificando algún procedimiento de discriminación del tipo de trama (sonora o sorda) y obtención de la frecuencia fundamental.

Un vocoder LPC-3 utiliza una frecuencia de muestreo de 8 KHz y una trama de 20 ms.

El sistema de análisis identifica una trama como sonora con una frecuencia fundamental de 400 Hz, y obtiene la siguiente estima de su autocorrelación:

$\gamma(0)=2;\quad \gamma(1)=1;\quad \gamma(2)=0.5;\quad \gamma(3)=0.5$

Se pide:

b) Identifique la señal de excitación y obtenga los coeficientes del filtro de síntesis para esta trama.

Sea y(n), n=0,...,159 la trama sintetizada, e Y(k), k=0,...,159 su DFT.

c) Obtenga el valor numérico de Y(k), para k=0,...,21.

d) ¿Cree correcta la elección de un vocoder LPC-3? Razone la respuesta.

√ **Ejercicio III-11.**

Una señal x[n], con función densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [-a/2, a/2] pasa por un cuantificador uniforme de 8 bits, cuyos niveles de decisión son

$$x_i = \frac{i}{2^8}, \qquad \{i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^7 - 1\}$$

y niveles de reconstrucción

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_{i-1} + 2^{-8}, & \{i = 1, 2, \ldots, 2^7\} \\ x_{i+1} - 2^{-8}, & \{i = -1, -2, \ldots, -2^7\} \end{cases}$$

a) Determinar la relación señal a ruido (dB) que se obtiene con este cuantificador, para a = 10.

b) Idem que a), para a = 1.

c) Idem que, para a = 0,1.

d) Compare y explique cualitativamente los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

√ **Ejercicio III-12.**

Se desea cuantificar la señal x[n], con función densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} a(1-x^2), & |x| \le 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

siendo a una constante a determinar.

a) Determinar la relación señal a ruido (dB) que se puede obtener con un cuantificador uniforme de 8 bits, diseñado para que no haya ruido de sobrecarga.

b) Determinar la relación señal a ruido (dB) que se obtendría con un cuantificador logarítmico de ley A (A = 87,56)

c) Compare y explique cualitativamente los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

√ **Ejercicio III-13.**

Se dispone de un cuantificador de 4 niveles, con niveles de decisión

$$x_{-1} = -\Delta\,, \qquad x_0 = 0\,, \qquad x_1 = \Delta$$

y niveles de reconstrucción

$$y_{11} = -\frac{3}{2}\Delta\,, \qquad y_{10} = -\frac{1}{2}\Delta\,, \qquad y_{00} = \frac{1}{2}\Delta\,, \qquad y_{01} = \frac{3}{2}\Delta$$

para una señal x[n] con función densidad de probabilidad

$$p(x) = e^{-2|x|}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

El objetivo de este ejercicio es determinar el valor óptimo de Δ.

a) Calcular la varianza del error granular, entendiendo como tal a aquel que tiene una amplitud menor a $\Delta/2$ en función de Δ.

b) Calcular la varianza del error de sobrecarga, expresando el resultado en función de Δ.

c) Determinar, para los valores de Δ ={0,25; 0,5; 0,75; 1} el valor de las varianzas de los errores granular, de sobrecarga, así como el total de cuantificación.

d) Para el valor de Δ que obtenga un menor error, calcular la probabilidad de los cuatro símbolos posibles {(00), (01), (10), (11)} que corresponden a los cuatro niveles de reconstrucción respectivamente, definidos anteriormente.

e) Si son aproximadamente iguales (< 5%), explique el motivo. Si no lo son, explique porqué el valor menor de la potencia de error se obtiene con probabilidades diferentes.

√ **Ejercicio III-14.**

El objetivo de este problema es optimizar el diseño de un cuantificador de cuatro niveles (2 bits), para una fuente de información estacionaria con función densidad de probabilidad conocida:

$$f_X(x) = k.e^{-2|x|}\,, \qquad -2 \le x \le 2$$
$$f_X(x) = 0\,, \qquad 2 < |x|$$

Este problema consta de siete apartados, los tres primeros son de carácter teórico y permiten obtener las expresiones necesarias para resolver el resto del ejercicio. El apartado cuarto inicializa un método numérico iterativo para optimizar el diseño del cuantificador, mientras que los tres últimos apartados realizan el primer ciclo de optimización.

El cuantificador es simétrico alrededor del valor x = 0 y, por ello, sólo es necesario optimizar el valor de uno de los niveles de decisión x_1 y de dos niveles de reconstrucción y_1 e y_2, que se utilizan cuando la señal tiene valores positivos.

a) Determinar la potencia media del error de cuantificación D, en función de x_1, y_1 e y_2.

b) Suponiendo que x_1 es conocido, determinar la expresión de los valores de y_1 e y_2 que minimizan el error de cuantificación (simplificar al máximo).

c) Suponiendo que y_l e y_2 son conocidos, determinar la expresión de los valores de x_l que minimiza el error de cuantificación (simplificar al máximo).

d) Suponiendo que los valores de x_l, y_l e y_2 corresponden a un cuantificador uniforme adaptado al rango de valores de x, calcule la potencia media del error de cuantificación D.

e) Suponiendo que x_l es el valor obtenido en el apartado anterior, calcule los valores de y_l e y_2 optimizados según la fórmula que haya obtenido en el apartado b).

f) Con los valores obtenidos en el apartado anterior, determine un nuevo valor de x_l, utilizando la fórmula que haya utilizado en el apartado c).

g) Calcule el error de cuantificación con los nuevos valores de x_l, y_l e y_2.

Nota: utilice, si lo considera conveniente, las siguientes expresiones matemáticas:

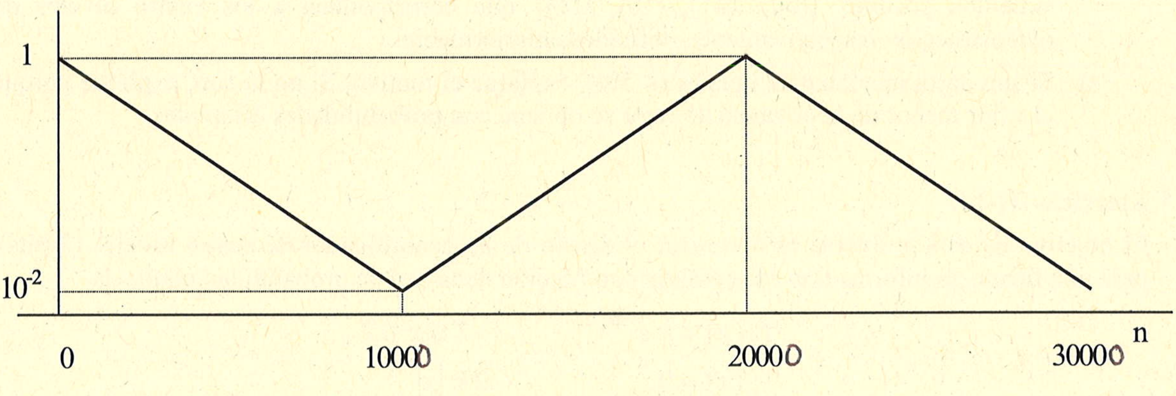
$$\int_x^{\infty}(x-a)^2 e^{-2x}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1-4ax-2a+2a^2\right)$$

Regla de Leibniz generalizada:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda,x)dx = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)}\frac{\partial f(\lambda,x)}{\partial\lambda}dx + f(\lambda,b(\lambda))\frac{db(\lambda)}{d\lambda} - f(\lambda,a(\lambda))\frac{da(\lambda)}{d\lambda}$$

Ejercicio III-15.

Una señal estacionaria y(n), con función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [-1,1] se multiplica por la señal periódica que aparece en la figura adjunta.



La señal resultante, x(n), se cuantifica usando 11 bits/muestra.

a) Indique cual es el cuantificador óptimo en cada instante de tiempo (no es necesario una justificación formal)

b) Si se utiliza un cuantificador uniforme "mid rise" con nivel de saturación de 1 (x_{MAX}=1), obtener la expresión de la potencia del ruido de cuantificación y la relación señal a ruido en cada instante de tiempo. Particularice el resultado para n=0 y n=10000.

c) Repita el punto dos para un nivel de saturación del cuantificador de 4/5.

Si se utiliza un cuantificador logarítmico con ley A=100 y valor de saturación 1:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{A.|x|.sig(x)}{1+\ln(A)}, & 0\le |x|\le \dfrac{x_M}{A} \\ x_M\dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A.|x|}{x_M}\right).sig(x)}{1+\ln(A)}, & \dfrac{x_M}{A}\le |x|\le x_M \end{cases}$$

d) Obtener la relación señal a ruido en los instantes n=0; y n=10000.

e) Supuesto que la señal y(n) se generara mediante la ecuación:

$$y(n)=w(n)+\sum_{i=1}^{3}a(i).y(n-i)$$

Siendo w(n) un ruido blanco de potencia 0.01, ¿Que orden de predictor utilizaría y cual sería la ganancia de la configuración diferencial del cuantificador de la señal x(n)?

f) Compare y comente los distintos resultados obtenidos.

g) ¿Utilizaría el mismo método de resolución del problema si el cuantificador fuera de 8 bits/muestra? Si la respuesta es negativa comente que cambiaría.

EJERCICIO I-1

$x(n) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow w(n)$ $\qquad H(z) = -4 + z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}$

$S_w(f) = 1$

a) El predictor óptimo es de orden $p=3$, ya que con un filtro de error de predicción ~~de~~ orden 3 se obtiene ruido blanco

La potencia del error de predicción es:

$$\boxed{\mathcal{E}_3^f = \frac{1}{4^2} = 1/16}$$

Hay que comprobar que $|k_m| \le 1$, si no, se invierte la raíz que dé problemas pasándola al interior del círculo unidad

Coeficientes:

$$\tilde{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, x(n-k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_3(1) &= -\tfrac{1}{4} \\ a_3(2) &= +1/2 \\ a_3(3) &= -1/4 \end{aligned}}$$

$(a_p(0) = 1)$

b) Órdenes inferiores:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - k_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{1 - k_m^2} \qquad k_3 = -1/4$$

$$\boxed{A_2(z) = \frac{16}{15}\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \cancel{\frac{1}{4}z^{-3}} + \frac{1}{4}z^{-3}\left(\cancel{1} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^{2} - \frac{1}{4}z^{3}\right)\right) = 1 - \frac{2}{15}z^{-1} + \frac{7}{15}z^{-2}}$$

$$\boxed{A_1(z) = \frac{225}{176}\left(1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \cancel{\frac{7}{15}z^{-2}} - \frac{7}{15}z^{-2}\left(\cancel{1} - \frac{2}{15}z - \frac{7}{15}z^{2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{11}z^{-1}}$$

$$\boxed{E_2^f = \frac{E_3^f}{1-|k_3|^2} = 1/15}$$

$$\boxed{E_1^f = \frac{E_2^f}{1-|k_2|^2} = \frac{15}{176}}$$

$$\boxed{E_0^f = \gamma_x(0) = \frac{E_1^f}{1-|k_1|^2} = \frac{11}{128}}$$

c) $\boxed{\gamma_x(0) = \frac{11}{128}}$ $\boxed{\gamma_x(1) = -k_1 \gamma_x(0) = \frac{1}{128}}$

$\boxed{\gamma_x(2) = -\frac{5}{128}}$

d) [illegible] AR(3):

$$\boxed{\gamma_x(m) = -\sum_{k=1}^{3} a_3(k)\,\gamma_x(m-k)} = \frac{1}{4}\gamma_x(m-1) - \frac{1}{2}\gamma_x(m-2) + \frac{1}{4}\gamma_x(m-3)$$

EJERCICIO I-2

$$\hat{d}(n) = \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) \qquad \xi = \sum_{n=a}^{b} \left(d(n) - \hat{d}(n) \right)^2$$

a) Min ξ

$$\xi = \sum_{n=a}^{b} \left(d(n) - \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) \right)^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=a}^{b} d^2(n)}_{P_d} - 2 \sum_{n=a}^{b} d(n) \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) + \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} a_i a_k x(n-i) x(n-k)$$

$$= P_d - 2 \sum_{n=a}^{b} d(n) \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) + \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} a_i a_k x(n-i) x(n-k)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_j} = 0 = -2 \sum_{n=a}^{b} d(n) x(n-j) + \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) x(n-j)$$

simétricos

$$+ \sum_{n=a}^{b} \sum_{k=0}^{p} a_k x(n-k) x(n-j)$$

$$= -2 \sum_{n=a}^{b} d(n) x(n-j) + 2 \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) x(n-j) \qquad j = 0:p$$

$$\boxed{\sum_{n=a}^{b} d(n) x(n-j) = \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=0}^{p} a_i x(n-i) x(n-j) \qquad j = 0:p}$$

b) $d(0)=1 \quad d(1)=-2 \quad d(2)=3 \quad d(3)=-4 \quad d(4)=5$

$x(0)=1 \quad x(1)=-1 \quad x(2)=-1 \quad x(3)=-1 \quad x(4)=1$

$a=1 \quad b=4 \quad p=1$

$$\sum_{n=a}^{b} d(n)x(n-j) = \sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{n=a}^{b} x(n-i)x(n-j) \qquad j=0:p$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{4} d(n)x(n) = a_0 \sum_{n=1}^{4} x(n)x(n) + a_1 \sum_{n=1}^{4} x(n-1)x(n) \\ \sum_{n=1}^{4} d(n)x(n-1) = a_0 \sum_{n=1}^{4} x(n-1)x(n) + a_1 \sum_{n=1}^{4} x(n-1)x(n-1) \end{cases}$$

$8 = a_0 \cdot 4 + a_1 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2}$

$-6 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = -3/2}$

$$\boxed{\xi = 29}$$

c) $a=0, \ b=5$

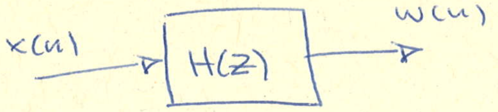
$9 = 5a_0$

$-6 = 5a_1$

$$\boxed{a_0 = \frac{9}{5} \quad a_1 = -\frac{6}{5}}$$

$$\boxed{\xi = 31.6}$$

Ejercicio I-3



$H(z) = -3 + z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3}$

$\sigma_w^2 = 2$

a) Schür-Cohn → ¿filtro estable?

La amplificación no influye en la estabilidad

$$H'(z) = A_3(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}$$

$$\sigma_{w'}^2 = \varepsilon_3^f = \frac{2}{9}$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - k_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{1 - k_m^2} = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} - \cancel{\frac{2}{3}z^{-3}} + \frac{2}{3}z^{-3}\left(\cancel{1} - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}z^{2} - \cancel{\frac{2}{3}z^{3}}\right)\right)$$

$$A_2(z) = 1 + \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{4}{5}z^{-2} \qquad k_2 = \frac{4}{5} < 1$$

$$A_1 = \frac{25}{9}\left(1 + \frac{1}{5}z^{-1} + \cancel{\frac{4}{5}z^{-2}} - \frac{4}{5}z^{-2}\left(\cancel{1} + \frac{1}{5}z + \frac{4}{5}z^{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{9}z^{-1}$$

$$|k_1| < 1$$

⇒ Sistema inverso estable

b) Autocorrelación de $x(n)$

Modelo AR(3):

$$\boxed{\gamma_x(m) = \sigma_w^2\,\delta(m) - \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\,\gamma_x(m-k)}$$

$$w(n) \longrightarrow \boxed{1/H(z)} \longrightarrow x(n)$$

$$K_1 = -\frac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)}$$

$$\boxed{\gamma_x(0) = E_0^f = \frac{\overset{2/9}{E_3^f}}{(1-|K_1|^2)(1-|K_2|^2)(1-|K_3|^2)} = \frac{9}{8}}$$

$$\boxed{\gamma_x(1) = -K_1\,\gamma_x(0) = -\frac{1}{8}} \qquad E_1^f = \frac{10}{9}$$

$$\boxed{\gamma_x(2) = -\frac{K_2E_1^f + \gamma_x(1)\,a_1(1)}{a_1(0)} = -\frac{7}{8}} \qquad E_2^f = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{\gamma_x(3) = -\frac{K_3E_2^f + \gamma_x(1)\,a_2(2) + \gamma_x(2)\,a_2(1)}{a_2(0)} = \frac{13}{24}}$$

$$\boxed{\gamma_x(m) = \frac{2}{9}\delta(m) + \frac{1}{3}\gamma_x(m-1) - \frac{2}{3}\gamma_x(m-2) + \frac{2}{3}\gamma_x(m-3)}$$

c) El filtro de predicción óptimo de orden 4 es el mismo que el de orden 3 ya que w(n) es ruido blanco

Orden 3: $A_3(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}$ $\quad E_3^f = \frac{2}{9}$

Orden 2: $A_2(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2}$ $\quad E_2^f = \frac{2}{5}$

Orden 1: $A_1(z) = 1 + \frac{1}{9}z^{-1}$ $\quad E_1^f = \frac{10}{9}$

d) Modelo AR(3)

e) Ganancia c. dif. con predictor de orden 3.

Suposiciones:

- S/N_Q muy alta
- Predictor óptimo

Ganancia máxima: $G_{dopt} = \dfrac{1}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_p(k)\rho_x(k)} = \dfrac{\gamma_x(0)}{\sigma_w^2}$

$\rho_x(k) = \dfrac{\gamma_x(k)}{\gamma_x(0)}$

$\Rightarrow \boxed{G_{dopt} = \frac{81}{18} = 7{,}94 \text{ dB}}$

EJERCICIO I-4

$x(n)$ estacionario, $m_x = 0$, $\gamma_x(k) = \beta^{|k|}$

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

1.- $S_y(z) = S_x(z)\, H(z)\, H^*(z^{-1})$

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$S_x(z) = TZ\{\gamma_x(k)\} = \frac{1}{1-\beta z^{-1}} + \frac{1}{1-\beta z} =$$

$$= \frac{1-\beta z + 1 - \beta z^{-1}}{(1-\beta z^{-1})(1-\beta z)} = \frac{2-\beta(z+z^{-1})}{1-\beta(z+z^{-1})+\beta^2}$$

$$S_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{n} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z^{-n} =$$

$$|\beta z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\beta z)^n = \frac{\beta z}{1-\beta z}$$

$$|\beta z^{-1}| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\beta z^{-1})^n = \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

$$\boxed{S_x(z)} = \frac{\beta z}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\beta z^{-1}} =$$

$$= \frac{\cancel{\beta z} - \beta^2 + 1 - \cancel{\beta z}}{1+\beta^2 - \beta(z+z^{-1})} =$$

$$= \boxed{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2-\beta(z+z^{-1})}}$$

$$\boxed{S_y(f) = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2-\beta(z+z^{-1})}\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1-2z+z^{2}\right)}$$

$$S_y(z) = (1-\beta^2)\frac{(1-2z^{-1}+z^{-2})(1-2z+z^2)}{(1-\beta z^{-1})(1-\beta z)} = \sigma_w^2 H(z) H^*(z^{-1})$$

$$\boxed{H(z) = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-\beta z^{-1}} \longrightarrow \text{ARMA}(2,1)}$$

$$y(n) = w(n) - 2w(n-1) + w(n-2) + \beta y(n-1)$$

$$= w(n) - 2w(n-1) + w(n-2) + \beta\big(w(n-1) - 2w(n-2) + w(n-3) + \beta y(n-2)\big),$$

$$= w(n) - (2+\beta)w(n-1) + (1-2\beta)w(n-2) + \beta w(n-3) + \beta^2\big(w(n-2) - 2w(n-3)$$

$$+ w(n-4) + \beta \cdot y(n-3)\big),$$

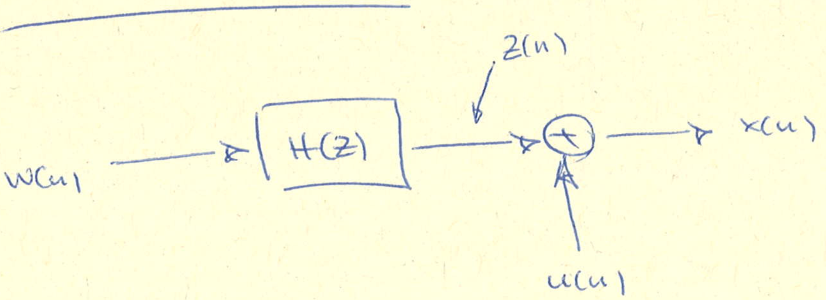
...

$$2.-\ \gamma_y(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m) - \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_x(m-k) & 0 \le m \le q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_x(m-k) & m > q \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\gamma_y(m) = (1-\beta^2)\left(\sum_{k=m}^{2} b_k h(k-m)\right) + \beta\gamma_x(m-1) \quad 0 \le m \le 2 \\ &\gamma_y(m) = \beta\gamma_x(m-1) \quad m > 2 \end{aligned}}$$

$b_0 = 1 \quad b_1 = -2 \quad b_2 = 1$

EJERCICIO I-5



$\sigma_w^2 = 1$

$\sigma_u^2 = 0,5$

$H(z) = 1 + z^{-1}$

$$\underline{X}(z) = 0,5 + (1+z^{-1})(1+z) = 0.5 + 1 + 1 + z + z^{-1} = 2,5 + z + z^{-1}$$

$$\gamma_z(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m) = \sum_{k=m}^{1} b_k b_{k-m} = \begin{cases} 2 & m=0 \\ 1 & m=1 \end{cases}$$

$z(n) \rightarrow MA(1) : b_0 = b_1 = 1$

$$\boxed{\gamma_x(m) = \gamma_z(m) + \gamma_u(m) = \begin{cases} 2,5 & m=0 \\ 1 & m=1 \end{cases}}$$

0 en el resto

b) La señal se ajusta a un modelo MA(1)

$S_x(z) = 2,5 + z + z^{-1}$

$$MA(1) \rightarrow S_x(z) = \sigma_w^2 (1 + a z^{-1})(1 + a z) = \sigma_w^2 (1 + a^2 + a z^{-1} + a z)$$

$$2,5 = \sigma_w^2 (1 + a^2) = \frac{1}{a}(1 + a^2) \Rightarrow a^2 - 2,5a + 1 = 0$$

$\sigma_w^2 a = 1$

$$a = \begin{cases} 2 & \Rightarrow \sigma_w^2 = 1/2 \\ 1/2 & \Rightarrow \sigma_w^2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H(z) = 1 + b_1 z^{-1} \qquad b_1 = 1 \\ \sigma_w^2 = 1/2 \end{array}}$$

c) $H(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ $\quad \alpha = 4/5 \Rightarrow \sigma_w^2, \sigma_u^2$ para tener los mismos valores de autocorrelación a 0 y 1

$$z(n) = w(n) + \alpha z(n-1) = w(n) + \frac{4}{5} x(n-1)$$

$$\gamma_z(m) = \sigma_w^2 \delta(m) + \frac{4}{5} \gamma_z(m-1)$$

~~$\gamma_x(m) \neq 1$ ya que $u(n)$ sólo afecta en $m=0$~~

$$\cancel{\gamma_x(m) = \sigma_w^2 \delta(m) + \sigma_u^2 \delta(m) + \frac{4}{5} \gamma_z(m-1)}$$

$$\cancel{\gamma_x(0) = \sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \frac{4}{5} \gamma_x(1)}$$

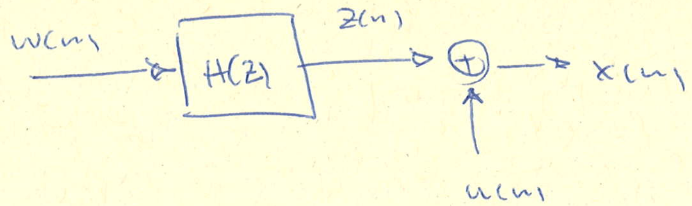
$$\cancel{\gamma_x(1) = \frac{4}{5} \left(\gamma_z(0) + \sigma_u^2 \right)}$$

$$S_x(f) = \sigma_w^2 \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} + \sigma_u^2 = \frac{\sigma_w^2 + \sigma_u^2 (1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$\Rightarrow$ ARMA (1,1)

$$\gamma_x(m) = \sigma_u^2 \delta(m) + \sigma_w^2 \delta(m) - \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_x(m-k) = \left(\sigma_u^2 + \sigma_w^2 \right) \delta(m) + \frac{4}{5} \gamma_x(m-1)$$

esto no es un ARMA



$$\gamma_x(m) = \gamma_z(m) + \gamma_u(m) = \sigma_w^2\,\delta(m) + \frac{4}{5}\gamma_z(m-1) + \sigma_u^2\,\delta(m)$$

$$z(n) = x(n) - u(n) \Rightarrow \gamma_z(m) = \gamma_x(m) - \sigma_u^2\,\delta(m)$$

$$\gamma_x(m) = (\sigma_w^2 + \sigma_u^2)\,\delta(m) + \frac{4}{5}\gamma_x(m-1) - \frac{4}{5}\sigma_u^2\,\delta(m-1)$$

$$\gamma_x(0) = \sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \frac{4}{5}\gamma_x(1) \qquad \Bigg\| \qquad 2{,}5 = \sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \frac{4}{5}\cdot 1$$

$$\gamma_x(1) = -\frac{4}{5}\sigma_u^2 + \frac{4}{5}\gamma_x(0) \qquad \Bigg\| \qquad 1 = -\frac{4}{5}\sigma_w^2 + \frac{4}{5}\cdot 2{,}5$$

$$\boxed{\sigma_w^2 = 1} \qquad \boxed{\sigma_u^2 = 0{,}7}$$

d) Modelo ARMA(1,1): $H(z) = \dfrac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$

$$S_x(f) = \frac{\sigma_w^2 + \sigma_u^2\,(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$$\sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \sigma_u^2\alpha^2 - \sigma_u^2\alpha z - \sigma_u^2\alpha z^{-1} = \sigma_v^2(1-bz^{-1})(1-bz) =$$
$$= \sigma_v^2(1+b^2) - \sigma_v^2 b z^{-1} - \sigma_v^2 b z$$

$$\begin{cases} \sigma_v^2 b = \sigma_u^2\alpha \\ \sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \sigma_u^2\alpha^2 = \sigma_v^2(1+b^2) \end{cases}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{b}$$

$$\sigma_w^2 + \sigma_u^2 + \sigma_u^2 \alpha^2 = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{b}(1+b^2)$$

$\sigma_w^2 = 1$

$\sigma_u^2 = 0,7$

$\alpha = 4,5$

$$0,56\, b^2 - 2,148\, b + 0,56 = 0 \rightarrow b = 3,55$$

$$\boxed{b = 0,28}$$

$$\boxed{\sigma_v^2 = 1,99}$$

$$\boxed{H(z) = 1,99 \frac{1 - 0,28 z^{-1}}{1 - 4,5 z^{-1}}}$$

c) Caso 1: AR(1): $\gamma_x(0) = 2,5$ $\gamma_x(1) = 1$ $\gamma_x(2) = 0$

$$\boxed{k_1 = -\frac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)} = -0,4}$$

$\varepsilon_1^f = 2,1$

$$\boxed{k_2 = -\frac{\gamma_x(1) a_1(1) + \gamma_x(2) a_1(0)}{\varepsilon_1^f} = 0,4762}$$

$$\boxed{\varepsilon_2^f = 1,624}$$

Caso 2: ARMA(1,1): $\gamma_x(0) = 2,5$ $\gamma_x(1) = 1$, $\gamma_x(2) = 4,5$

$\boxed{k_1 = -0,4}$ $\varepsilon_1^f = 2,1$ $\boxed{k_2 = 0,095}$ $\boxed{\varepsilon_2^f = 2,981}$

EJERCICIO I-6

$$x(n) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \phi\right) + w(n) \qquad \phi \text{ uniforme en } [0, 2\pi]$$

$$\sigma_w^2 = 1$$

1.- $$\boxed{R_x(m) = \cos\frac{\pi m}{2} + \sigma_w^2\,\delta(m)}$$

$$|S_x(f)| = TF\{R_x(m)\} = \sigma_w^2 + \delta\left(f - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{\pi}{2}\right)$$

2.- Predictores $p = 1:4$

$R_x(0) = 2 \quad R_x(1) = 0 \quad R_x(2) = -1$

$R_x(3) = 0 \quad R_x(4) = 1$

$\underline{p=1}$: $E_0^f = R_x(0) = 2 \qquad \underline{k_1} = -\frac{R_x(1)}{R_x(0)} = \underline{0} \qquad \underline{E_1^f = 2}$

$\underline{p=2}$: $\underline{k_2} = -\frac{R_x(1)\,a_1(1) + R_x(2)\,a_1(0)}{E_1^f} = \underline{1/2} \qquad \underline{E_2^f = \frac{3}{2}}$

$a_2(1) = a_1(1)(1 + k_2) = 0$

$\underline{p=3}$: $\underline{k_3} = -\frac{R_x(1)\,a_2(2) + R_x(2)\,a_2(1) + R_x(3)\,a_2(0)}{E_2^f} = \underline{0} \qquad \underline{E_3^f = 3/2}$

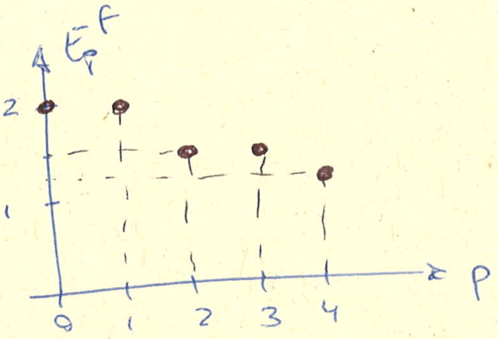
$a_3(2) = a_2(2) + k_3\,a_2(1) = 1/2$

$a_3(1) = a_2(1) + k_3\,a_2(2) = 0$

$p=4$: $k_4 = -\frac{R_x(1)a_3(3)+R_x(2)a_3(2)+R_x(3)a_3(1)+R_x(4)a_3(0)}{\varepsilon_3^f} = \ldots$

$$\boxed{\varepsilon_4^f = \frac{4}{3}}$$

3.-



Predictor de orden 2: $a_2(1) = 0$

$a_2(2) = 1/2$

$A(z) = 1 + 1/2\, z^{-2}$

$e(n) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-2)$

$P_e(f) = P_x(f) \cdot |A(f)|^2$

EJERCICIO I-7

Estimar parámetro m $\rightarrow$ 2 observaciones incorreladas $x0, x1$

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} \quad \forall m \qquad f_{x_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} & m<0 \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{8}} & m \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{m}_0 = x_0 \qquad \hat{m}_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} \qquad \hat{m}_2 = \frac{2x_0 + x_1}{3} \qquad \hat{m}_3 = \frac{x_0 + 2x_1}{3}$$

$$\hat{m}_4 = \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{2}$$

1.- Sesgo de los estimadores

$$\underline{E[\hat{m}_0]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{x_0}(x) dx = \underline{m} \qquad (\text{fdp gaussiana})$$

$$\underline{B(\hat{m}_0) = 0}$$

Todos ~~son~~ insesgados, de hecho.

2.- ~~Varianza~~

$$\boxed{Var(\hat{m}_0) = 1}$$

$$Var(x_1) = \int_{-\infty}^{a} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} dx + \int_{a}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{8}} dx$$

$$\int x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{a}} dx = \ldots$$

~~Es la mitad del intervalo de la fdp, que es simétrica, por lo que~~ $\cancel{\int_a^\infty x^2 f_{x_1}(x) dx = \frac{\sigma_{x_1}^2}{2}}$

$f = x$

$dg = x e^{-\frac{(x-m)^2}{a}}$

$$\cancel{Var(x_1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}}$$

$$\cancel{\boxed{Var(\hat{m}_1) = \frac{Var(x_0) + Var(x_1)}{2} = \frac{7}{4}}}$$

$$\cancel{\boxed{Var(\hat{m}_2) = \frac{2\,Var(x_0) + Var(x_1)}{3} = \frac{3}{2}}}$$

$$\cancel{\boxed{Var(\hat{m}_3) = 2}} \qquad \cancel{\boxed{Var(\hat{m}_4) = \frac{13}{8}}}$$

2.-Varianza de los estimadores

$$\boxed{Var(\hat{m}_0) = 1}$$

$$Var(\hat{m}_1) = \begin{cases} 1 & m < 0 \\ 3/2 & m \geq 0 \end{cases}$$

$$Var(\hat{m}_2) = \begin{cases} 1 & m < 0 \\ \frac{4}{3} & m \geq 0 \end{cases}$$

$$Var(\hat{m}_3) = \begin{cases} 1 & m < 0 \\ \frac{5}{3} & m \geq 0 \end{cases}$$

$$Var(\hat{m}_4) = \begin{cases} 1 & m < 0 \\ \frac{17}{12} & m \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO - I-8

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + w(n)$$

$a_1 = -3/4 \quad a_2 = 1/2 \qquad E[w(n)] = 0$

$E[w^2(n)] = 2$

1.- Se trata de un modelo AR(2), ya que es un filtrado IIR de orden 2:

$$w(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x(n) \qquad H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

La autocorrelación es la del modelo AR(2):

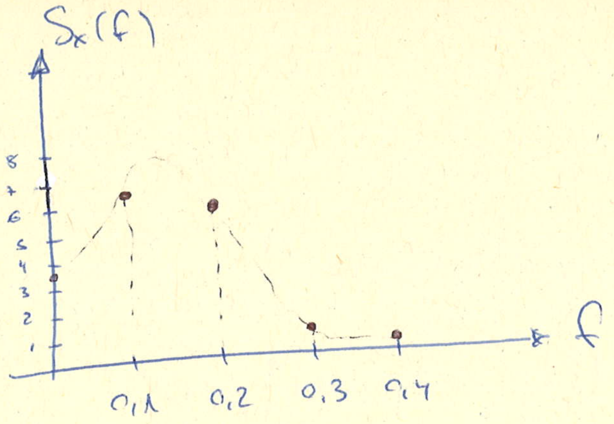
$$\boxed{\gamma_x(m) = \overset{\wedge}{\;} - \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_x(m-k) = 2\delta(m) + \frac{3}{4}\gamma_x(m-1) - \frac{1}{2}\gamma_x(m-2)}$$

$\sigma_w^2 \delta(m)$

2.- $$\boxed{S_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) e^{-j2\pi f k}\right|^2}} = \boxed{\frac{2}{\left|1 - \frac{3}{4}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}\right|^2}}$$

$S_x(0) = \frac{32}{9} \quad S_x(0{,}1) = 6{,}64 \quad S_x(0{,}2) = 6{,}49$

$S_x(0{,}3) = 1{,}18 \quad S_x(0{,}4) = 0{,}51$



3.- Media y varianza de $x(n)$

La media es nula, ya que no hay deltas en el espectro.

La varianza es el valor de la autocorrelación en $m = 0$:

$$\gamma_x(0) = \sigma_w^2 - \frac{3}{4}\gamma_x(m-1) + \frac{1}{2}\gamma_x(m-2) = \frac{\sigma_w^2}{(1-|k_1|^2)(1-|k_2|^2)}$$

$k_2 = 1/2$ Reduciendo el polinomio:

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - k_2 z^{-2} A_2(z^{-1})}{1-k_2^2} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \cancel{\frac{1}{2}z^{-2}} - \frac{1}{2}z^{-2}\left(\cancel{1} - \frac{3}{4}z + \frac{1}{2}z^{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{2}{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{32}{9}}$$

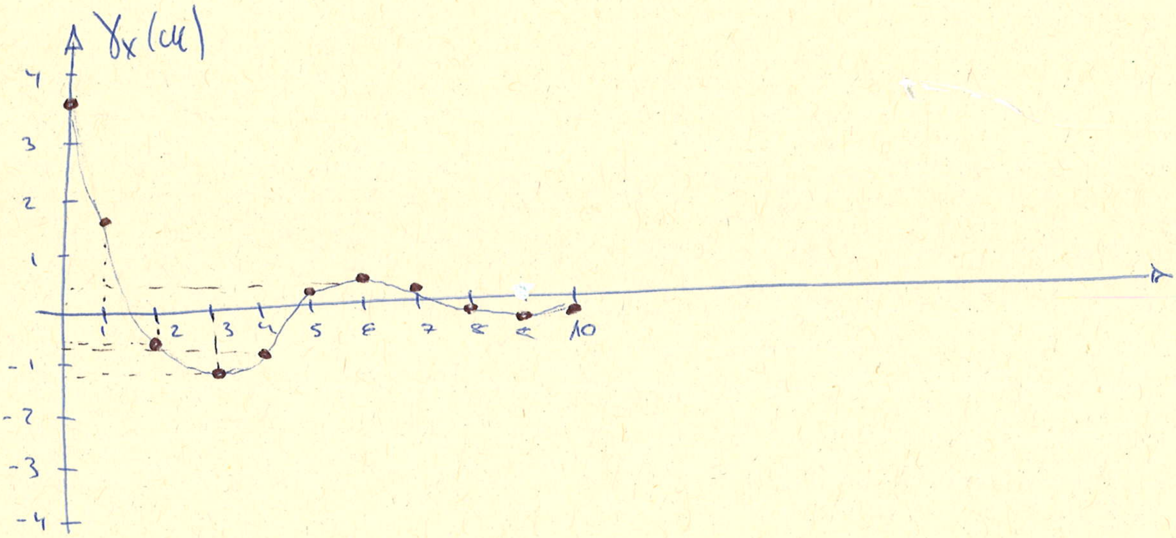
4.- $\boxed{\gamma_x(1) = -k_1 \gamma_x(0) = \frac{16}{9}}$ $\boxed{\gamma_x(0) = \frac{32}{9}}$ $\varepsilon_1^f = \frac{8}{3}$

$$\boxed{\gamma_x(2) = -\frac{k_2 \varepsilon_1^f + \gamma_x(1)\, a_1(1)}{a_1(0)} = -\frac{4}{9}}$$

$$\gamma_x(m) = -\sum_{k=1}^{2} a_k \gamma_x(m-k) = \frac{3}{4}\gamma_x(m-1) - \frac{1}{2}\gamma_x(m-2)$$

$\gamma_x(3) = -\frac{11}{9}$ $\gamma_x(4) = -\frac{25}{36}$ $\gamma_x(5) = \frac{13}{144}$ $\gamma_x(6) = \frac{239}{576}$

$\gamma_x(7) = \frac{613}{2304}$ $\gamma_x(8) = -\frac{73}{9216}$ $\gamma_x(9) = -\frac{5123}{36864}$ $\gamma_x(10) = -0{,}1$



5.- Es oscilante decreciente, de periodo aproximado 6 muestras

En $m = 9$, su valor es menor del 10% $\gamma_x(0)$

Ejercicio I-9

$$d(n) = x(n) + \frac{4}{5}x(n-1) - \frac{2}{5}x(n-2) - \frac{3}{5}x(n-3)$$

$$E[d^2(n)] = \frac{14}{25}$$ Predictor lineal para $x(n)$

1.- $k_3 = -\frac{3}{5}$, $k_2 = \frac{1}{8}$, $k_1 = \frac{7}{9}$

$$r_x(0) = \frac{9}{4}, \quad r_x(1) = -\frac{7}{4}, \quad r_x(2) = \frac{5}{4}, \quad r_x(3) = -\frac{7}{20}$$

$$x(n) = d(n) - \frac{4}{5}x(n-1) + \frac{2}{5}x(n-2) + \frac{3}{5}x(n-3)$$

2.- Si $x(n)$ se ajusta a un modelo AR(4):

$$w(n) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{A_4(z)}} \longrightarrow x(n)$$

$r_x(0) = \frac{9}{4}$, $r_x(1) = -\frac{7}{4}$, $r_x(2) = \frac{5}{4}$

$r_x(3) = -\frac{7}{20}$

¿$r_x(4)$?

$\cancel{A_4(z) = 1 + \frac{4}{5}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} - \frac{3}{5}z^{-3}}$

no es ruido blanco

$$w(n) \longrightarrow \boxed{1/A_4(z)} \xrightarrow{x(n)} \boxed{A_3(z)} \longrightarrow d(n)$$

Los k_i, $i=1:3$ son los mismos, pero me falta k_4

3.- Modelo AR(3)

$$w(n) \longrightarrow \boxed{1/A_3(z)} \xrightarrow{x(n)} \boxed{A_3(z)} \longrightarrow d(n) \equiv w(n)$$ ruido blanco

$\gamma_x(0) : \gamma_x(3)$ del apartado 1

4.- Modelo MA(5)

$$w(n) \longrightarrow \boxed{B_5(z)} \xrightarrow{x(n)} \boxed{A_3(z)} \xrightarrow{d(n)}$$ no blanco en general

$\gamma_x(0) : \gamma_x(3)$ del apartado 1

$$x(n) = \sum_{k=0}^{5} b_k\, w(n-k)$$

$$\gamma_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m)$$

$\underline{\gamma_x(m) = 0 \quad m > 5}$

$\gamma_x(4), \gamma_x(5)$?

$$x(n) = d(n) - \frac{4}{5}\left(d(n+1) - \frac{4}{5}x(n-2) + \frac{2}{5}x(n-3) + \frac{3}{5}x(n-4)\right) + \frac{2}{5}x(n-2) + \frac{3}{5}x(n-3)$$

$$= d(n) - \frac{4}{5}d(n-1) + \frac{26}{25}x(n-2) + \frac{7}{25}x(n-3) - \frac{12}{25}x(n-4) =$$

$$\boxed{\gamma_x(1) = -k_1 \gamma_x(0) = -\frac{7}{4}}$$

$$k_2 = -\frac{\gamma_x(1)a_1(1) + \gamma_x(2)a_1(0)}{E_1^f}$$

$$E_1^f = \frac{8}{9}$$

$$\boxed{\gamma_x(2) = -\frac{k_2 E_1^f + \gamma_x(1)a_1(1)}{a_1(0)} = +\frac{5}{4}}$$

$$k_3 = \frac{\gamma_x(1)a_2(2) + \gamma_x(2)a_2(1) + \gamma_x(3)a_2(0)}{E_2^f}$$

$$E_2^f = \frac{7}{8}$$

$$\boxed{\gamma_x(3) = -\left(k_3 E_2^f + \gamma_x(1)a_2(2) + \gamma_x(2)a_2(1)\right) = -\frac{7}{20}}$$

$$\boxed{\gamma_x(m) = -\sum_{k=1}^{3} a_3(k)\gamma_x(k-m) \qquad m>3}$$

2.- AR(4)

Calculo el último término del modelo estimado

$\gamma_x(4)$:

$$\underline{\gamma_x(4)} = -\left(\frac{4}{5}\left(-\frac{7}{20}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\right) = \underline{-\frac{27}{100}}$$

$$\underline{k_4} = -\frac{\sum_{k=0}^{3} a_p(k)\gamma_x(4-k)}{E_3^f} = \underline{0}$$

No se puede extraer más información sobre la señal

3.- Ya se ajusta a un modelo AR(3), mismo resultado que en 1.

4.- $\boxed{\gamma_x(5) = \frac{413}{500}}$ $\boxed{\gamma_x(m) = 0 \quad m>5}$ iguales para $m=1:4$

EJERCICIO I-9

x(n) aleatoria estacionaria

$$\begin{cases} d(n) = x(n) + \frac{4}{5}x(n-1) - \frac{2}{5}x(n-2) - \frac{3}{5}x(n-3) \\ E[d^2(n)] = \frac{14}{25} \end{cases}$$

1.- Obtener los valores de $\gamma_x(m)$

Predictor lineal de orden 3:

$$x(n) = d(n) - \frac{4}{5}x(n-1) + \frac{2}{5}x(n-2) + \frac{3}{5}x(n-3)$$

Se puede obtener la autocorrelación aplicando Levinson-Durbin a la inversa:

$$k_3 = -\frac{3}{5} \qquad A_3(z) = 1 + \frac{4}{5}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} - \frac{3}{5}z^{-3}$$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - k_3 z^{-3} A_3(z^{-1})}{1-k_3^2} = \frac{25}{16}\left(1 + \frac{4}{5}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} - \cancel{\frac{3}{5}z^{-3}} + \frac{3}{5}z^{-3}\left(\cancel{1} + \frac{4}{5}z - \frac{2}{5}z^2 - \frac{3}{5}z^3\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} \qquad k_2 = \frac{1}{8}$$

$$A_1(z) = \frac{64}{63}\left(1 + \frac{7}{8}z^{-1} + \cancel{\frac{1}{8}z^{-2}} - \frac{1}{8}z^{-2}\left(\cancel{1} + \frac{7}{8}z + \frac{1}{8}z^2\right)\right) = 1 + \frac{7}{9}z^{-1} \qquad k_1 = \frac{7}{9}$$

$$k_1 = -\frac{\gamma_x(0)}{\gamma_x(1)}$$

$$\boxed{\gamma_x(0) = \mathcal{E}_0^f = \frac{\mathcal{E}_3^f}{(1-|k_1|^2)(1-|k_2|^2)(1-|k_3|^2)} = \frac{14/25}{56/225} = \frac{9}{4}}$$

5.- DEP si se ajusta a MA(3)

$$\Gamma_x(f) = \sum_{k=-q}^{q} \gamma_x(k) e^{-j2\pi f k} = \gamma_x(0) + \gamma_x(1) 2\cos 2\pi f + 2\gamma_x(2)\cos 4\pi f + 2\gamma_x(3)\cos 6\pi f$$

$q = 3$

$$\Gamma_x(f) = \frac{9}{4} - \frac{7}{2}\cos 2\pi f + \frac{5}{2}\cos 4\pi f - \frac{7}{10}\cos 6\pi f$$

$\Gamma_x(0) = \frac{11}{20}$ $\quad \underbrace{\Gamma_x(1/4) = -\frac{1}{4}}$ $\quad \Gamma_x(1/2) = \frac{179}{20}$

este valor no puede ser negativo

$\Rightarrow$ esa secuencia de autocorrelación ($\gamma_x(0) : \gamma_x(3)$) no puede corresponder a un modelo MA(3)

EJERCICIO I-19

$$x(n) = a \cdot x(n-1) + w(n) + b \cdot w(n-1)$$

$$\sigma_w^2 = 0{,}25$$

a) Modelo ARMA(1,1)

$$\gamma_x(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m) - \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_x(m-k) & 0 \le m \le q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_x(m-k) & m > q \end{cases}$$

$$\gamma_x(m) = \begin{cases} 0{,}25\left(h(0) + b\, h(1)\right) + a\gamma_x(-1) & m = 0 \\ 0{,}25\left(b\, h(0)\right) + a\gamma_x(0) & m = 1 \\ + a \cdot \gamma_x(m-1) & m > 1 \end{cases}$$

$$x(n) = a\left(a x(n-2) + w(n-1) + b\, w(n-2)\right) + w(n) + b\, w(n-1)$$

$$= a^2 x(n-2) + w(n) + (a+b)\, w(n-1) + ab\, w(n-2)$$

$h(0) = 1$

$h(1) = a + b$

$h(2) = ab$

$$\gamma_x(m) = \begin{cases} 0{,}25\left(1 + b(a+b)\right) + a\gamma_x(-1) & m = 0 \\ 0{,}25\, b + a\gamma_x(0) & m = 1 \\ a\gamma_x(m-1) & m > 1 \end{cases}$$

b) $\gamma_x(0) = 1$

$\gamma_x(1) = 0{,}75 \Rightarrow$ ¿a, b?

$$\begin{cases} \gamma_x(0) = 0{,}25\left(1 + b(a+b)\right) + a\,\gamma_x(1) \\ \gamma_x(1) = 0{,}25\,b + a\,\gamma_x(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 0{,}25 + 0{,}25\,b(a+b) + 0{,}75\,a \\ 0{,}75 = 0{,}25\,b + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}75 = 0{,}25\,b(a+b) + 0{,}75\,a = 0{,}25\,b^2 + 0{,}25\,ab + 0{,}75\,a \\ 0{,}75 = 0{,}25\,b + a \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 0{,}75 - 0{,}25\,b$

$$0{,}75 = 0{,}25\,b^2 + 0{,}25\,b(0{,}75 - 0{,}25\,b) + 0{,}75(0{,}75 - 0{,}25\,b) =$$

$$= 0{,}1875\,b^2 + 0{,}5625 \Rightarrow \boxed{b = \pm 1}$$

$$a = \begin{cases} 0{,}5, & b = 1 \\ 1, & b = -1 \end{cases}$$

← problema de posible inestabilidad del modelo

$\Rightarrow$ tenemos solución $\boxed{a = 0{,}5,\ b = 1}$

c) Predictor lineal → coeficientes óptimos para

$p = 1:4$

$\gamma_x(m) = a\,\gamma_x(m-1) = 0,5\,\gamma_x(m-1)$

$\gamma_x(2) = 0,375 \qquad \gamma_x(3) = 0,1875 \qquad \gamma_x(4) = 0,09375$

Levinson-Durbin:

$E_0^f = \gamma_x(0) = 1 \;; \quad \boxed{k_1 = a_1(1) = -\dfrac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)} = -0,75}$

$\boxed{E_1^f = 0,4375}$

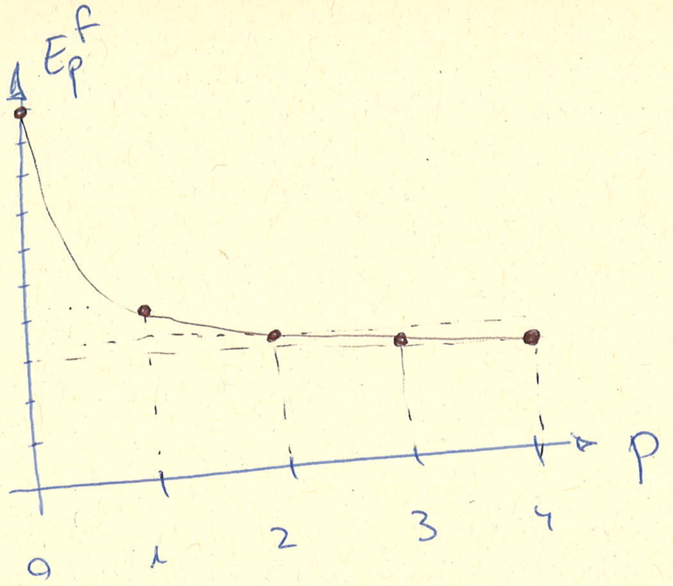
$\boxed{k_2 = a_2(2) = -\dfrac{\gamma_x(1)a_1(1) + \gamma_x(2)a_1(0)}{E_1^f} = 0,4286}$

$\boxed{a_2(1) = a_1(1)(1+k_2) = -1,0714} \qquad \boxed{E_2^f = 0,352}$

$\boxed{k_3 = a_3(3) = -0,3} \qquad \boxed{E_3^f = 0,325}$

$\boxed{a_3(2) = 0,75 \qquad a_3(1) = -1,2}$

$\boxed{k_4 = 0,2398} \qquad \boxed{E_4^f = 0,398} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_4(1) = -1,27 \\ a_4(2) = 0,9231 \\ a_4(3) = -0,577 \end{array}}$


E_p^f
p
0
1
2
3
4

EJERCICIO I-11

$x(n) \longrightarrow w(n), \sigma_w^2 = 1 \qquad B(z) = 1 + z^{-1} + 3/4\, z^{-2}$

1.- Señal modelada MA(2):

$$x(n) = w(n) + w(n-1) + 3/4\, w(n-2)$$

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \left| 1 + e^{-j2\pi f} + \frac{3}{4} e^{-j4\pi f} \right|^2}$$

$$\boxed{\Gamma_x(0) = \frac{11}{4} \qquad \Gamma_x(1/4) = \frac{17}{16} \qquad \Gamma_x(1/2) = \frac{9}{16}}$$

2.- Análisis basado en AR(3)

Calculo primero $\gamma_x(m)$ $m = 0:3$

$$\gamma_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{2} b_k h(k-m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{2} b_k b_{k-m}$$

$$\underline{\gamma_x(0)} = \sum_{k=m}^{2} b_k b_k = \underline{\frac{41}{16}} \qquad \underline{\gamma_x(1) = \frac{7}{4}} \qquad \underline{\gamma_x(2) = \frac{3}{4}} \qquad \underline{\gamma_x(3) = 0}$$

Ahora saco el modelo aplicando Levinson-Durbin:

$$E_0^f = \gamma_x(0) = \frac{41}{16} \qquad k_1 = a_1(1) = -\frac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)} = -\frac{28}{41}$$

$$E_1^f = \frac{897}{656} \qquad k_2 = a_2(2) = -\frac{\gamma_x(1)a_1(1) + \gamma_x(2)a_1(0)}{E_1^f} = \frac{292}{897}$$

$$a_2(1) = a_1(1)(1 + k_2) = -\frac{812}{897} \qquad E_2^f = 1{,}2225 = \frac{17545}{14352}$$

$$\boxed{k_3 = a_3(3) = -\frac{\gamma_x(1)a_2(2) + \gamma_x(2)a_2(1) + \gamma_x(3)a_2(0)}{E_2^f} = \frac{1568}{17545}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_3(1) &= -0{,}876 \\ a_3(2) &= 0{,}2446 \end{aligned}} \qquad \boxed{E_3^f = 1{,}213}$$

$$\Rightarrow \; P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{3} a_3(k) e^{-j2\pi f k}\right|^2} \qquad \sigma_w^2 = E_3^f = 1{,}213$$

$$\boxed{P_x(f) = \frac{1{,}213}{\left|1 - 0{,}876e^{-j2\pi f} + 0{,}2446e^{-j4\pi f} + 0{,}0894e^{-j6\pi f}\right|^2}}$$

$$\boxed{P_x(0) = 5{,}783 \qquad P_x(1/4) = 0{,}807 \qquad P_x(1/2) = 0{,}248}$$

3.- Son bastante diferentes, debido a que son modelos opuestos (todo ceros frente a todo polos) y de órdenes reducidos. Una opción es aumentar el orden del modelo AR(p), hasta que $E_p^f \simeq 1$.

Teorema de Wold: asintóticamente iguales, $MA(q) \rightarrow AR(p) \quad q \rightarrow \infty$

$AR(p) \rightarrow MA(q) \quad p \rightarrow \infty$

4.- $y(n) \longrightarrow H(z) = 1/B(z)$

$w(n), \sigma_w^2 = 1$

$$H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} + 3/4\, z^{-2}}$$

El filtro de error de predicción de orden 2 es el mismo $B(z)$

El de orden 1 lo saco reduciendo el polinomio:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - k_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{1 - k_m^2} = \frac{1 + z^{-1} + \cancel{\frac{3}{4} z^{-2}} - \frac{3}{4} z^{-2}\left(\cancel{1} + z + \frac{3}{4} z^2\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} =$$

$= 1 + \frac{4}{7} z^{-1} \qquad k_1 = \frac{4}{7} \; ; \quad \mathcal{E}_2^f = \sigma_w^2 = 1$

$$\mathcal{E}_1^f = \frac{\mathcal{E}_2^f}{1 - |k_2|^2} = \frac{16}{7}$$

$$\underline{\gamma_y(1)} = -k_1 \gamma_y(0) = \underline{-\frac{64}{33}} \qquad \mathcal{E}_0^f = \underline{\gamma_y(0)} = \frac{\mathcal{E}_1^f}{1-|k_1|^2} = \underline{\frac{112}{33}}$$

$$k_2 = -\frac{\gamma_y(1) a_1(1) + \gamma_y(2) a_1(0)}{\mathcal{E}_1^f} \Rightarrow \underline{\gamma_y(2)} = -\frac{k_2 \mathcal{E}_1^f + \gamma_y(1) a_1(1)}{a_1(0)} = \underline{-\frac{20}{33}}$$

$$\gamma_y(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) \gamma_y(k-m) \Rightarrow \underline{\gamma_y(3)} = +\frac{20}{33} + \frac{3}{4}\frac{64}{33} = \underline{\frac{68}{33}}$$

$p=2$

$a_2(1) = 1$

$a_2(2) = 3/4$

$$p = 3 \Rightarrow \underline{k_3} = -\frac{\gamma_x(1) a_2(2) + \gamma_x(2) a_2(1) + \gamma_x(3) a_2(0)}{\mathcal{E}_2^f} =$$

$$= \underline{0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_3^f = \mathcal{E}_2^f}$$

Como era de esperar ya se ha extraído todo con el predictor de orden 2, por lo que aumentar el orden no reducirá el error

EJERCICIO I-12

$$e(n) = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) \qquad (1)$$

a) $e(n) = e(n-1) + a(n) \qquad (2)$

$$\underline{a(n)} = e(n) - e(n-1) = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) - \sum_{m=n-1-N+1}^{n-1} x^2(m) =$$

$$= \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) - \sum_{m=n-N}^{n-1} x^2(m) = \underline{x^2(n) - x^2(n-N)}$$

$$\boxed{e(n) = e(n-1) + x^2(n) - x^2(n-N)}$$

b) Ventana de Hamming

$$e(n) = \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m) x^2(m)$$

$$\underline{a(n)} = \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m) x^2(m) - \sum_{m=n-1-N+1}^{n-1} w^2(n'-m) x^2(m) =$$

$$= \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m) x^2(m) - \sum_{m=n-N}^{n-1} w^2(n'-m) x^2(m) =$$

$$= x^2(n) w^2(0) - x^2(n-N) w^2(N-1) + \sum_{m=n-N+1}^{n-1} x^2(m) \left(w^2(n-m) - w^2(n-m-1)\right)$$

b) $h(n) \to$ FIR de orden 2 $\Rightarrow$ ECM, Ee

$$y(n) = h(0)\,x(n) + h(1)\,x(n-1) = h(0)\big(s(n)+r(n)\big) + h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)$$

$$e(n) = s(n) - y(n) = s(n) - h(0)\big(s(n)+r(n)\big) - h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)$$

$$\boxed{E\left[e^2(n)\right]} = E\left[\Big(s(n) - h(0)\big(s(n)+r(n)\big) - h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)\Big)^2\right]$$

$$= \sigma_s^2 - h(0)\,\gamma_{sx}(0) - h(1)\,\gamma_{sx}(1)$$ (mínimo ECM)

$$\gamma_{sx}(0) = \gamma_s(0) + \sigma_r^2 = 2$$

$$\gamma_{sx}(1) = \gamma_s(1) = 0{,}6$$

c) Minimización $\Rightarrow$

$$\gamma_{sx}(0)\,h(0) + \gamma_{sx}(1)\,h(1) = \gamma_s(0)$$

$$\gamma_{sx}(0)\,h(1) + \gamma_{sx}(1)\,h(0) = \gamma_s(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2h(0) + 0{,}6\,h(1) = 1 \\ 0{,}6\,h(1) + 2\,h(0) = 0{,}6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} h(0) = 0{,}451 \\ h(1) = 0{,}165 \end{array}}$$

d) $\boxed{MMSE = 1 - 0{,}451 - 0{,}165 \cdot 0{,}6 = 0{,}45}$

$$\boxed{\left(S/N\right)_{H(z)} = \frac{\sigma_d^2}{MMSE} = \frac{1}{0{,}45} = 3{,}47\,dB}$$ con filtro

$$\boxed{\left(S/N\right) = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_r^2} = 1 = 0\,dB}$$ sin filtro

EJERCICIO I-14

Potencia media: E

$N = 19$, me considero, $E\left[x^2(m)x^2(n)\right] = E^2\left(10\,\delta(m-n)+1\right)$

$x(n)$ s.c.e.

$$E_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \qquad E_2 = a\cdot E_1$$

a) Sesgo:

$$B(E_1) = E - E[E_1]$$

$$\underline{E[E_1]} = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)\right] = \frac{1}{N}E\left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{E\left[x^2(n)\right]}^{E} = \underline{E} \Rightarrow \text{insesgado}$$

$$E[E_2] = E\left[\frac{a}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)\right] = \ldots = a\cdot E$$

$$\underline{B(E_2) = (1-a)E} \quad \text{sesgado salvo en } a=1$$

b) $\boxed{\mathrm{Var}(E_1) = E\left[E_1^2\right] - E\left[E_1\right]^2 = E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(n)x^2(k)\right] - E^2 = E^2\left(19\,\delta(m-n)+1\right) - E^2 = 10E^2\delta(m-n)}$

$$\underline{\mathrm{Var}(E_2) = E\left[E_2^2\right] - E\left[E_2\right]^2} = \frac{a^2}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} E\left[x^2(n)x^2(k)\right] - a^2E^2 =$$

$$= \underline{10\,a^2E^2\,\delta(m-n)}$$

c) $MSE(E_1) = Var(E_1) + |B(E_1)|^2 = 10E^2\delta(m-n)$

$MSE(E_2) = 10a^2E^2\delta(m-n) + (1-a)^2E^2$

d) $E \simeq 1 \to$ ¿a / $\min MSE(E_2)$?

$$\frac{\partial MSE(E_2)}{\partial a} = 20aE^2\delta(m-n) - 2(1-a)E^2$$

$$= 22a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/11}$$

e) La varianza se reduce mucho al multiplicar por una constante menor que 1, por eso el error cuadrático es menor a pesar de ser un estimador sesgado.

Ejercicio I-12

$$e(n) = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) \qquad (1)$$

a) $e(n) = e(n-1) + a(n) \qquad (2)$

$$\underline{a(n)} = e(n) - e(n-1) = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) - \sum_{m=n-1-N+1}^{n-1} x^2(m) =$$

$$= \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) - \sum_{m=n-N}^{n-1} x^2(m) = \underline{x^2(n) - x^2(n-N)}$$

$$\boxed{e(n) = e(n-1) + x^2(n) - x^2(n-N)}$$

b) Ventana de Hamming

$$e(n) = \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m)\, x^2(m)$$

$$\underline{a(n)} = \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m)\, x^2(m) - \sum_{m=n-1-N+1}^{n-1} w^2(n'-m)\, x^2(m) =$$

$$= \sum_{m=n-N+1}^{n} w^2(n-m)\, x^2(m) - \sum_{m=n-N}^{n-1} w^2(n'-m)\, x^2(m) =$$

$$= x^2(n)\, w^2(0) - x^2(n-N)\, w^2(N-1) + \sum_{m=n-N+1}^{n-1} x^2(m) \left(w^2(n-m) - w^2(n-m-1) \right)$$

c) Coste computacional: multiplicaciones necesarias para estimaciones cada $N = 2$ muestras.

Para el caso de la ventana rectangular,

(1) ⇒ 2 multiplicaciones

(2) ⇒ 2 multiplicaciones

Ventana de Hamming:

(1) ⇒ 2 multiplicaciones

(2) ⇒ 4 multiplicaciones

d) $$r(k;n) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{m=n-N+1+|k|}^{n} x(m)\,x(m-|k|)$$

Relación con (1)

$$\boxed{r(0;n) = \frac{1}{N} \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) = \frac{1}{N} e(n)}$$

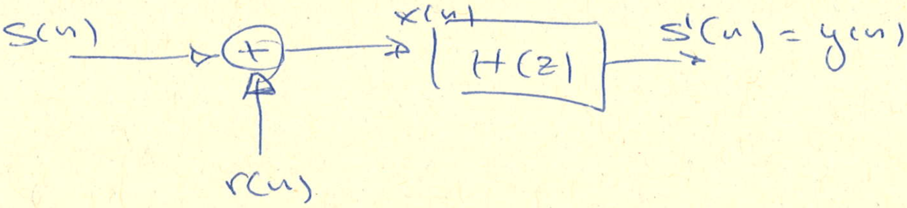
e) $x(n)$: AWGN, $E[x^2(m)x^2(n)] = \sigma_x^4 \left(\delta(m-n) + 1 \right)$

Sesgo y varianza de $e(n)$

$$E[e(n)] = E\left[\sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m) \right] = \sum_{m=n-N+1}^{n} E[x^2(m)] = N \cdot \sigma_x^2$$

Estima de energía, σ_x^2 es potencia, por lo que

EJERCICIO I-13



$\sigma_r^2 = 1$

$m_r = 0$

$\gamma_s(k) = 0{,}6^{|k|}$

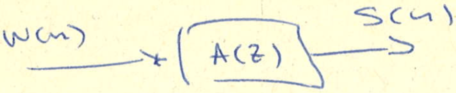
$\gamma_{sr}(k) = 0$

$e(n) = y(n) - s(n)$

$y(n) = \left(s(n) + r(n)\right) * h(n)$

a) s(n) corresponde a un modelo AR(1):

$$A(z) = \frac{1}{1 - 0{,}6z^{-1}} \qquad \Gamma_s(f) = \frac{\sigma_w^2}{\left|1 - 0{,}6e^{-j2\pi f}\right|^2}$$



$$\sigma_w^2 = E_1^f = \gamma_s(0)\left(1 - |k_1|^2\right) = 0{,}64$$

$k_1 = -0{,}6$

$\gamma_s(0) = 1$

$$\boxed{\Gamma_s(f) = \frac{0{,}64}{\left|1 - 0{,}6e^{-j2\pi f}\right|^2}}$$

b) $h(n) \to$ FIR de orden $2 \Rightarrow$ ECM, E_e

$$y(n) = h(0)\,x(n) + h(1)\,x(n-1) = h(0)\big(s(n)+r(n)\big) + h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)$$

$$e(n) = s(n) - y(n) = s(n) - h(0)\big(s(n)+r(n)\big) - h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)$$

$$\boxed{E\left[e^2(n)\right] = E\left[\Big(s(n) - h(0)\big(s(n)+r(n)\big) - h(1)\big(s(n-1)+r(n-1)\big)\Big)^2\right]}$$

$$= \sigma_s^2 - h(0)\,\gamma_{sx}(0) - h(1)\,\gamma_{sx}(1)$$ (mínimo ECM)

$$\gamma_{sx}(0) = \gamma_s(0) + \sigma_r^2 = 2$$

$$\gamma_{sx}(1) = \gamma_s(1) = 0{,}6$$

c) Minimización $\Rightarrow$ $\gamma_{sx}(0)\,h(0) + \gamma_{sx}(1)\,h(1) = \gamma_s(0)$

$$\gamma_{sx}(0)\,h(1) + \gamma_{sx}(1)\,h(0) = \gamma_s(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2h(0) + 0{,}6\,h(1) = 1 \\ 0{,}6\,h(1) + 2\,h(0) = 0{,}6 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} h(0) = 0{,}451 \\ h(1) = 0{,}165 \end{array}}$$

d) $\boxed{MMSE = 1 - 0{,}451 - 0{,}165 \cdot 0{,}6 = 0{,}45}$

$$\boxed{(S/N)_{H(z)} = \frac{\sigma_d^2}{MMSE} = \frac{1}{0{,}45} = 3{,}47\,dB}$$ con filtro

$$\boxed{(S/N) = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_r^2} = 1 = 0\,dB}$$ sin filtro

Hay que promediar en tiempo o bien tener la energía de la señal como $N\sigma_x^2$

$$\Rightarrow \boxed{B(e(n)) = 0}$$ estimador insesgado

$$Var(e(n)) = E[e^2(n)] - E[e(n)]^2 =$$

$$= \underbrace{E\left[\sum_m \sum_k x^2(n)\, x^2(k)\right]}_{\sum_m \sum_k \sigma_x^4 (\delta(m-k)+1) = N\sigma_x^4 + N^2\sigma_x^4} - (N\cdot\sigma_x^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(e(n)) = N\sigma_x^4}$$

EJERCICIO I-14

Potencia media: E

$N = 19$, nos consideran $E\left[x^2(m)x^2(n)\right] = E^2\left(10\,\delta(m-n)+1\right)$

$x(n)$ s.e.c.

$$E_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \qquad E_2 = a\cdot E_1$$

a) Sesgo:

$$B(E_1) = E - E[E_1]$$

$$\underline{E[E_1]} = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n)\right] = \frac{1}{N}E\left[\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overbrace{E\{x^2(n)\}}^{E} = \underline{E} \Rightarrow \text{insesgado}$$

$$E[E_2] = E\left[\frac{a}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n)\right] = \ldots = a\cdot E$$

$$\underline{B(E_2) = (1-a)E} \qquad \text{sesgado salvo en } a=1$$

b) $\boxed{Var(E_1) = E[E_1^2] - E[E_1]^2 = E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}x^2(n)x^2(k)\right] - E^2 = \\ = E^2(10\,\delta(m-n)+1) - E^2 = 10E^2\,\delta(m-n)}$

$$\underline{Var(E_2)} = E[E_2^2] - E[E_2]^2 = \frac{a^2}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}E\{x^2(n)x^2(k)\} - a^2E^2 =$$

$$= 10\,a^2E^2\,\delta(m-n)$$

c) $MSE(E_1) = Var(E_1) + |B(E_1)|^2 = 10E^2\delta(m-n)$

$MSE(E_2) = 10a^2E^2\delta(m-n) + (1-a)^2E^2$

d) $E \simeq 1 \rightarrow$ ¿a / $\min MSE(E_2)$?

$$\frac{\partial MSE(E_2)}{\partial a} = 20aE^2\delta(m-n) - 2(1-a)E^2$$

$$= 22a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/11}$$

e) La varianza se reduce mucho al multiplicar por una constante menor que 1, por eso el error cuadrático es menor a pesar de ser un estimador sesgado.

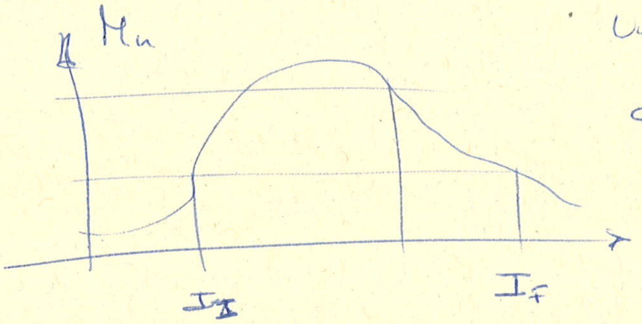
EJERCICIO II-2

a) Vocoder LPC

- Análisis de la señal en tramos de ~20ms
  - obtención del pitch
  - parámetros del modelo AR
  - tipo de sonido

- Discriminación sonoro/sordo:

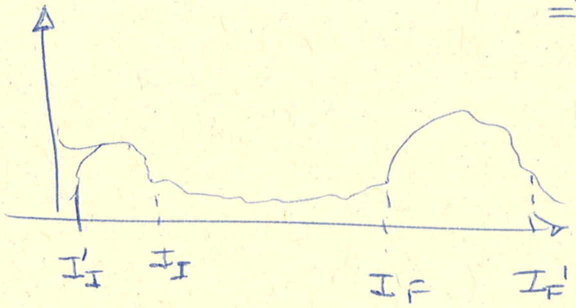
1.- Umbral energía o magnitud localizada



· umbrales determinan donde hay palabra con seguridad

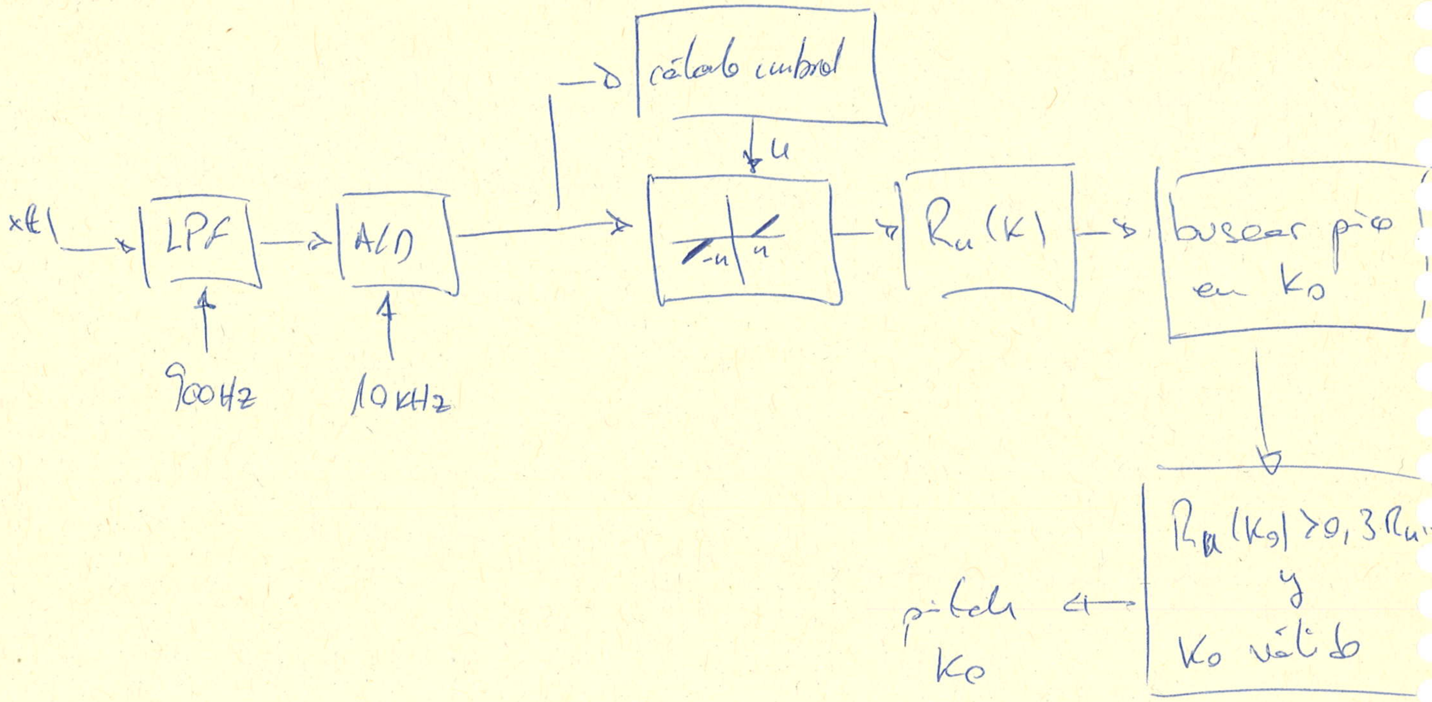
2.- Umbral cruces por cero antes y después de I_I e I_F

Muchos cruces por cero => sonido sordo => mover instantes de inicio y final



Si cruces por cero y energía bajos => silencio

- Determinar el pitch:



b) LPC-3 $f_s = 8\,kHz$ 20 ms

$F_0 = 400\,Hz$

$\gamma(0) = 2 \quad \gamma(1) = 1 \quad \gamma(2) = 0,5 \quad \gamma(3) = 0,5$

Señal excitadora: tren de pulsos con frecuencia fundamental 400 Hz

↳ porque se trata de un tramo sonoro

Coeficientes del filtro de síntesis: Levinson-Durbin

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0,5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3(1) \\ a_3(2) \\ a_3(3) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

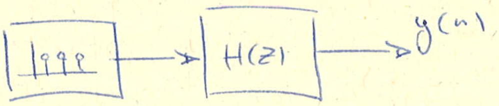
$$\boxed{\begin{aligned} a_3(1) &= -0,5 \\ a_3(2) &= 0,0833 \\ a_3(3) &= -0,167 \end{aligned}}$$

c) $y(n)$, $n = 0:159$

$Y(k)$, $k = 0:159$ la DFT

Obtener $Y(k)$, $k = 0:21$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}0833z^{-2} - 0{,}167z^{-3}}$$



¿?

d) Con un orden 3 se utilizan muy pocos valores de la autocorrelación y no se modelarán bien los formantes del tramo sonoro

PROBLEMAS TEMA 3

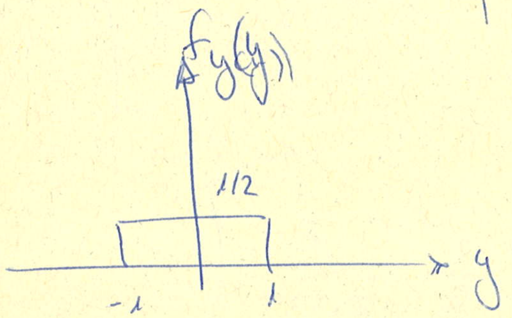
EJERCICIO III-1

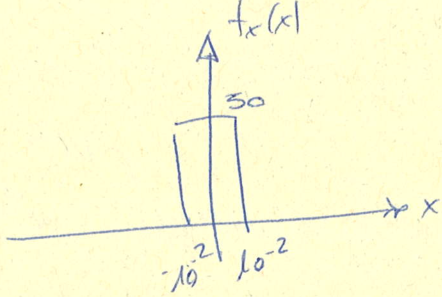
$y(n)$ estacionario, uniforme en $[-1,1]$

$x(n) = 10^{-2}\, y(n)$ $\quad B = 8$ bits

Mid-rise con saturación $= 1$

a) σ_q^2, S/N para $x(n)$, $y(n)$

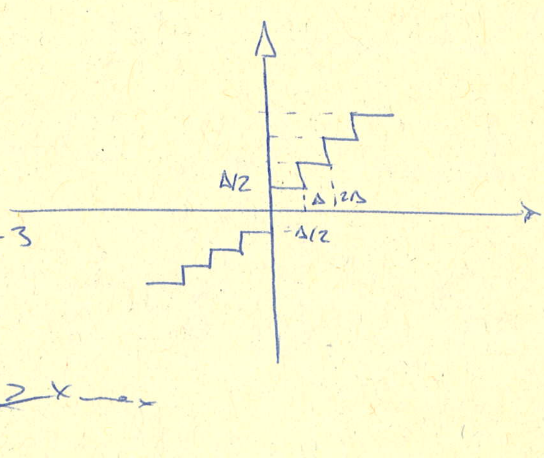




Para $y(n)$: sin saturación / ruido uniforme

$$\Delta_y = \frac{2x_m}{2^B} = \frac{1}{128} \Rightarrow \boxed{\sigma_{qy}^2 = \frac{\Delta_y^2}{12} = 5{,}086\cdot 10^{-6}}$$

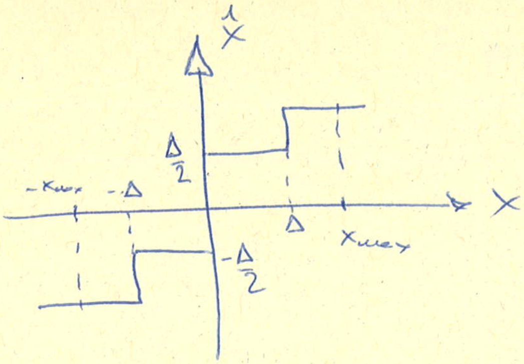
Para $x(n)$: pocos niveles útiles / señal uniforme



$\Delta = \frac{1}{128} = 7{,}8125\cdot 10^{-3}$ $\qquad \frac{\Delta}{2} = 3{,}91\cdot 10^{-3}$

$x_{max} = 10^{-2}$ $\qquad \frac{3\Delta}{2} = 0{,}0\cancel{122}\; x_{max}$

$2\Delta = 0{,}015 > x_{max}$ $\qquad$ 4 niveles útiles



$$\sigma_{qx}^2 = 2\int_0^{\Delta}\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2 f_x(x)\,dx + 2\int_{\Delta}^{x_{max}}\left(x-\frac{3\Delta}{2}\right)^2 f_x(x)\,dx$$

$$\boxed{\sigma_{qx}^2 = 100\,\frac{\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_0^{\Delta} + 100\,\frac{\left(x-\frac{3\Delta}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_{\Delta}^{x_{max}} = 5,79\cdot 10^{-9}}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_x(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \int_{-10^{-2}}^{10^{-2}} x^2 f_x(x)\,dx = 100\int_0^{10^{-2}} x^2\,dx = 100\cdot\frac{10^{-6}}{3} = \frac{1}{30.000}}$$

$$\boxed{(S/N)_y = 48,17\,dB} \quad \boxed{(S/N)_x = 7,6\,dB}$$

b) Saturación $= 1/2$

Ahora hay saturación en $y(n)$: $1/2 - \frac{\Delta}{2} \simeq 1/2$

$$P_s = 2\int_{1/2}^{1} f_y(y)\,dy = \frac{1}{2} \qquad \sigma_s^2 = 2\int_{1/2}^{1}(y-1/2)^2\cdot\frac{1}{2}\,dy =$$

$$= \frac{(y-1/2)^3}{3}\Bigg|_{1/2}^{1} = 0,04162$$

El ruido granular sigue siendo uniforme;

$$\Delta = \frac{1}{256} \Rightarrow \boxed{\sigma_{qy}^2 = p_s \sigma_s^2 + p_c \sigma_g^2 = 9{,}0298}$$

la ps está metida en el cálculo de σ_s^2

$$\Rightarrow \sigma_{qy}^2 = 0{,}0417$$

$$\Rightarrow (S/N)_y = 9{,}03\,dB$$

$$\boxed{(S/N)_y = 12{,}04\,dB}$$

$$\sigma_{qx}^2 = 290\,\frac{(\Delta/2)^3}{3} + 100\,\frac{\left(x_{max} - \frac{3\Delta}{2}\right)^3}{3} + 100\,\frac{(\Delta/2)^3}{3} =$$

$$= 300\,\frac{(\Delta/2)^3}{3} + 100\,\frac{\left(x_{max} - \frac{3\Delta}{2}\right)^3}{3} = 3{,}111 \cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{(S/N)_x = 10{,}3\,dB}$$

c) Ley A = 100, $x_{max} = 1$

$$\boxed{(S/N)_y = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 37{,}96\,dB}$$

región constante, ya que se usan todos los niveles y no hay saturación

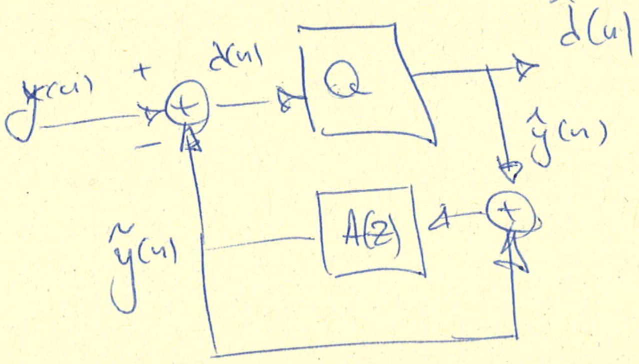
niveles bajos $\Rightarrow$ zona de ganancia

$$\boxed{(S/N)_x = 7{,}6\,dB + 10\log G_c^2 = 32{,}63\,dB}$$

$$G_c = \frac{A}{1+\ln A}$$

d) $y(n) = w(n) + y(n-1) - \frac{4}{5}y(n-2) + \frac{3}{4}y(n-3)$

Predictor $AR\cancel{(3)}$;



$$\boxed{A(z) = z^{-1} - \frac{4}{5}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3}}$$

$$G_{d\,opt} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\rho_y(k)} \qquad (S/N)_q \uparrow\uparrow$$

$\rho_y(k)$? $\sigma_y^2 = \gamma_y(0) = \frac{1}{3}$

Reduzco el polinomio: $a_3(1) = -1$; $a_3(2) = \frac{4}{5}$; $a_3(3) = -\frac{3}{4}$

$$a_2(2) = \frac{a_3(2) - k_3 a_3(1)}{1 - k_3^2} = \frac{4}{35} = k_2$$

$$E_0^f = \gamma_y(0) = \frac{1}{3}$$

$$a_2(1) = \frac{a_3(1) - k_3 a_3(2)}{1 - k_3^2} = -\frac{32}{35}$$

$$a_1(1) = \frac{a_2(1) - k_2 a_2(1)}{1 - k_2^2} = -\frac{32}{39} = k_1$$

$$\gamma_y(1) = -k_1\gamma_y(0) = \frac{32}{117} \qquad E_1^f = \frac{497}{4563}$$

$$k_2 = -\frac{\gamma_y(1)a_1(1) + \gamma_y(2)a_1(0)}{E_1^f} \Rightarrow \gamma_y(2) = -\frac{k_2E_1^f + \gamma_y(1)a_1(1)}{a_1(0)} = \frac{124}{585}$$

$$E_2^f = \frac{2201}{20475} \qquad k_3 = -\frac{\gamma_y(1)a_2(2) + \gamma_y(2)a_2(1) + \gamma_y(3)a_2(0)}{E_2^f}$$

$$\Rightarrow \gamma_y(3) = +\frac{569}{2340}$$

$$\boxed{G_{d_{opt}} = 7{,}088 = 8{,}51\,dB}$$

Ejercicio III - 2

Modulación delta

$$x(t) = A \operatorname{sen} 2\pi f_c t \quad \begin{cases} A = 10 \\ f_c = 1\ Hz \end{cases} \qquad 0 \le t \le 0{,}5$$

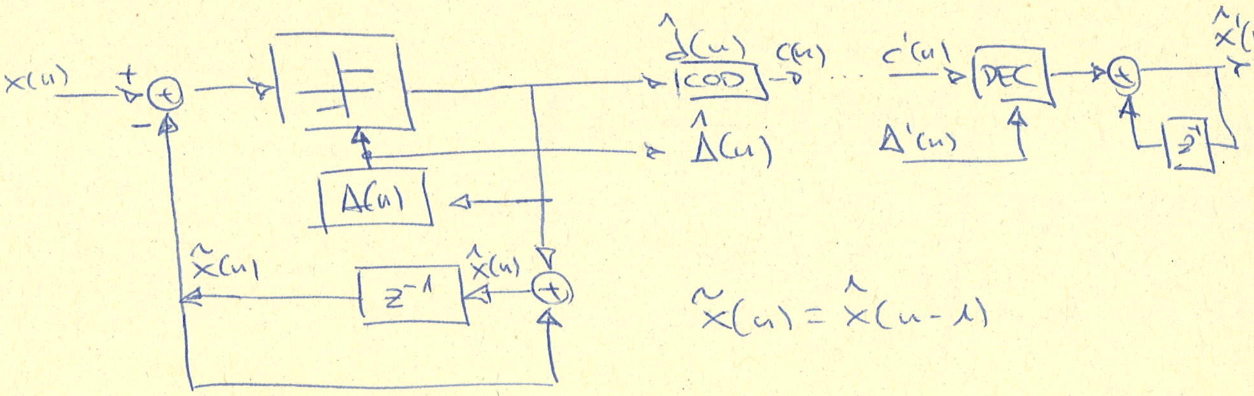
$f_s = 32$ muestras/s

Sin adaptación : $\Delta = 1$

Con adaptación $\longrightarrow$ $\Delta(n) = \begin{cases} |\Delta(n-1)| \dfrac{\hat{d}(n) + 0{,}5\,\hat{d}(n-1)}{\hat{d}(n)} & \Delta(n-1) \ge \Delta_{min} \\ \Delta_{min} & \Delta(n-1) < \Delta_{min} \end{cases}$

$\hat{d}(n) = \pm 1 \qquad \Delta_{min} = 1/8$

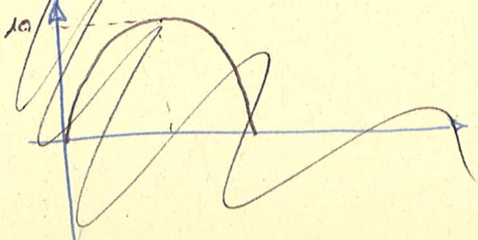
a) Tx, Rx delta adaptativo, $\tilde{x}(n) = \hat{x}(n-1)$

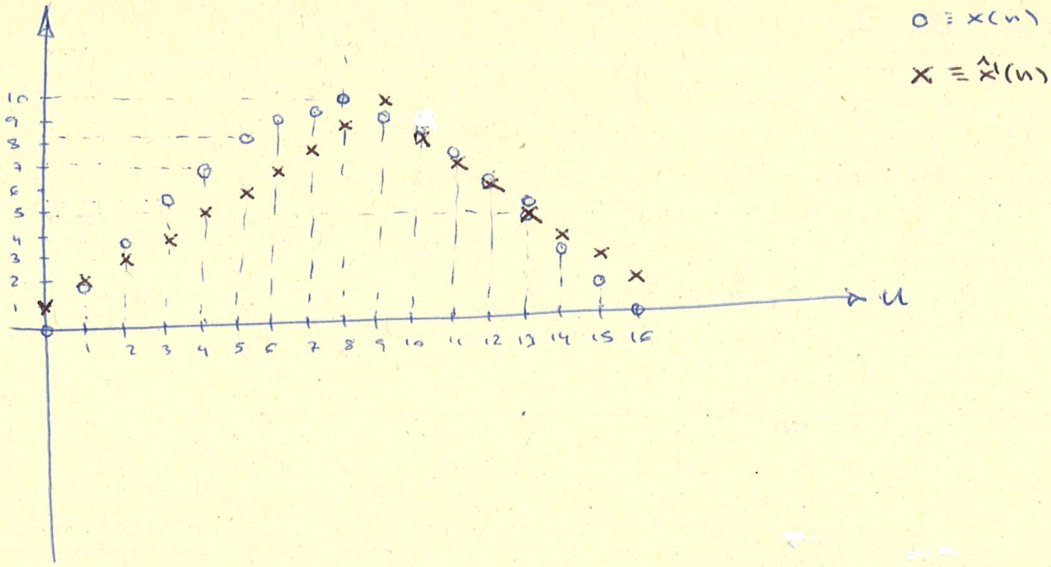


$\tilde{x}(n) = \hat{x}(n-1)$

b) Simulación delta sin adaptación

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x(n)$	0	1,95	3,83	5,56	7,07	8,32	9,24	9,81	10	9,81	9,24	8,32	7,07	5,56	3,83	1,95	0
$\hat{d}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−
$\hat{x}(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3





c) Simulación con adaptación

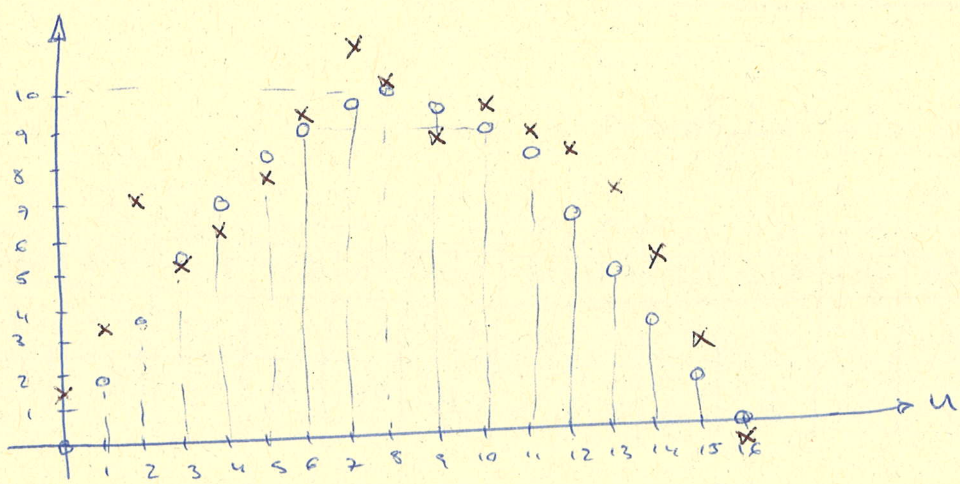
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x(n)$	0	1,95	3,83	5,56	7,07	8,32	9,24	9,81	10	9,81	9,24	8,32	7,07	5,56	3,83	1,95	0
$\hat{d}(n)$	1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$\Delta(n)$	3/2	9/4	27/8	27/16	27/32	81/64	1,9	2,85	1,43	2,15	1,075	9,54	9,81	1,22	1,83	2,75	4,12
$\hat{x}'(n)$	1,5	3,75	7,125	5,44	6,28	7,55	9,48	12,3	10,9	8,76	9,84	9,3	8,49	7,27	5,44	2,69	−1,44

$\Delta(-1) = 1$

$\hat{x}(-1) = -9,1$

$\hat{d}(-1) = 1$

$$\Delta(0) = 1\,\frac{1 + 0,5 \cdot 1}{1} = \frac{3}{2}$$



d) SNR en ambos casos

$$\sigma_q^2 = (1,5-0)^2 \frac{1}{16} + (3,75-1,95)^2 \frac{1}{16} + \ldots = 2,38$$

$$\sigma_{q_{adap}}^2 = 2,33$$

$$\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2} = 50$$

$$\boxed{S/N = 13,23 dB} \quad \boxed{(S/N)_{adap} = 13,32 dB}$$

e) Cuantificador uniforme misma tasa binaria.

Nyquist $\Rightarrow f_s = 2$ muestras/s

$\Rightarrow 16$ bits/muestra

$$S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} \rightarrow 6B + 4,8 - 20 \log \frac{X_m}{\sigma_x}$$

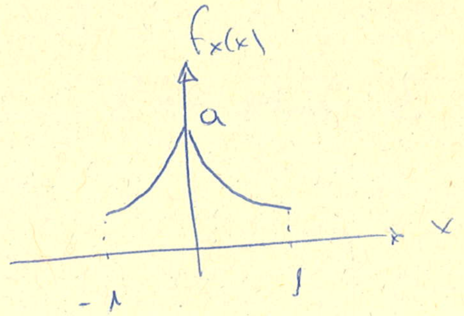
$$\sigma_x^2 = 50$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \Rightarrow \boxed{(S/N)_u = 49,93 dB}$$

EJERCICIO III - 3

3 bits, mid-rise, $x_{max} = 1$

$f_x(x) = a e^{-10|x|}$ $\quad -1 < x < 1$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1 = 2a\int_0^1 e^{-10x}dx = -\frac{1}{5}a\, e^{-10x}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}a(1-e^{-10})$$

$$\Rightarrow \boxed{a \simeq 5}$$

a) Ruido uniforme → S/N?

$$S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-1}^{1} x^2 e^{-10|x|}dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^{10x}dx + \int_0^1 x^2 e^{-10x}dx$$

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = \frac{1}{4}$$

$$= 2a\int_0^1 x^2 e^{-10x}dx$$

$$\sigma_q^2 \simeq \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{192}$$

$$= 2a\left(-\frac{x^2}{10} - \frac{1}{50}x - \frac{1}{500}\right)e^{-10x}\Big|_0^1 =$$

$$= a\left(\frac{1}{250} - 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{500}\right)e^{-10}\right) = 3{,}99 \cdot 10^{-3} a$$

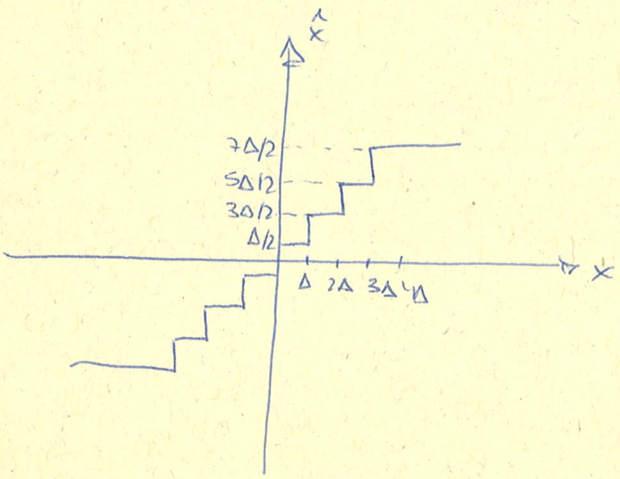
$$\simeq \frac{1}{250}a = 4 \cdot 10^{-3} a$$

$$\boxed{(S/N)_{unif} = \frac{96}{25} = 5{,}84\ dB}$$

b) S/N sin aproximación

3 bits → 8 niveles → 4 integrales:

$$\sigma_q^2 = 2\int_{x_0}^{x_1}(x-\hat{x}_0)^2 f_x(x)\,dx + 2\int_{x_1}^{x_2}(x-\hat{x}_1)^2 f_x(x)\,dx + 2\int_{x_2}^{x_3}(x-\hat{x}_2)^2 f_x(x)\,dx + 2\int_{x_3}^{x_4}(x-\hat{x}_3)^2 f_x(x)\,dx$$



$x_0 = 0$ $\qquad \hat{x}_0 = \Delta/2$

$x_1 = \Delta$ $\qquad \hat{x}_1 = 3\Delta/2$

$x_2 = 2\Delta$ $\qquad \hat{x}_2 = 5\Delta/2$

$x_3 = 3\Delta$ $\qquad \hat{x}_3 = 7\Delta/2$

$x_4 = 4\Delta = x_{max} = 1$

$$\int (x-a)^2 e^{-bx}\,dx = \left(-\frac{x^2}{b} + \frac{2ab-2}{b^2}x - \frac{2}{b^3} + \frac{2a}{b^2} - \frac{a^2}{b}\right)e^{-bx}$$

$$\int_0^{1/4} (x-1/8)^2 e^{-10x}\,dx = \left(-\frac{x^2}{10} + \underbrace{\frac{5/2-2}{100}}_{\frac{1}{200}}x \underbrace{- \frac{1}{500} + \frac{1}{400} - \frac{1}{640}}_{-\frac{17}{16000}}\right)e^{-10x}\Bigg|_0^{1/4} = 5{,}65\cdot 10^{-4}$$

$$\int_{1/4}^{1/2} (x-3/8)^2 e^{-10x}\,dx = \left(-\frac{x^2}{10} + \frac{11}{200}x - \frac{137}{16000}\right)e^{-10x}\Bigg|_{1/4}^{1/2} = 7{,}11\cdot 10^{-4}$$

$$\int_{1/2}^{3/4} (x-5/8)^2 e^{-10x}\,dx = \left(-\frac{x^2}{10} + \frac{21}{200}x - \frac{457}{16000}\right)e^{-10x}\Bigg|_{1/2}^{3/4} = 3{,}81\cdot 10^{-8}$$

$$\int_{3/4}^{1} (x-7/8)^2 e^{-10x}\,dx = \left(-\frac{x^2}{10} + \frac{31}{200}x - \frac{977}{16000}\right)e^{-10x}\Bigg|_{3/4}^{1} = 3{,}12\cdot 10^{-7}$$

$$\sigma_q^2 = 12{,}8\cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{S/N = 1{,}94\,dB}$$

c) La suposición de ruido uniforme no es válida, ya que ni hay un número suficiente de niveles (8) ni la señal tiene distribución uniforme, por lo que el error debe calcularse con su definición.

Uniforme, midrise, $P_s = 0{,}02$

d) Niveles de reconstrucción y decisión.

x_{max} es tal que $2\int_{x_{max}}^{1} f_x(x)dx = 0{,}02$

$$2\int_{x_{max}}^{1} a e^{-10x} dx = -e^{-10x}\Big|_{x_{max}}^{1} = e^{-10x_{max}} - e^{-10} = 0{,}02$$

$$e^{-10x_{max}} \simeq 0{,}02 \Rightarrow \boxed{x_{max} = 0{,}39}$$

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = 0{,}0975$$

$x_0 = 0$	$\hat{x}_0 = 0{,}04875$
$x_1 = 0{,}0975$	$\hat{x}_1 = 0{,}14625$
$x_2 = 0{,}195$	$\hat{x}_2 = 0{,}24375$
$x_3 = 0{,}2925$	$\hat{x}_3 = 0{,}34125$
$x_4 = 0{,}39$	

e) $\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 7{,}92 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$$\sigma_S^2 = 2\int_{x_{max}}^{1} (x-\hat{x}_3)^2 f_x(x)dx = 10\left(-\frac{x^2}{10} + 0{,}04825 \cdot x - 6{,}82 \cdot 10^{-3}\right)e^{-10x}\Big|_{0{,}39}^{1}$$

$$= 6{,}24 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sigma_q^2 = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{S/N = 11{,}55\,dB}$$

f) $$\int_0^{0{,}0975} (x-0{,}04875)^2 e^{-10x} dx = \left(-\frac{x^2}{10} - 0{,}01025x - 1{,}26 \cdot 10^{-3}\right)e^{-10x}\Big|_0^{0{,}0975} = 5{,}19 \cdot 10^{-5}$$

$$\int_{0{,}0975}^{0{,}195} (x-0{,}14625)^2 e^{-10x} dx = \left(-\frac{x^2}{10} + 9{,}75 \cdot 10^{-3}x - 1{,}21 \cdot 10^{-3}\right)e^{-10x}\Big|_{0{,}0975}^{0{,}195} = 1{,}83 \cdot 10^{-5}$$

$$\int_{0{,}195}^{0{,}295} (x-0{,}24375)^2 e^{-10x} dx = \left(-\frac{x^2}{10} + 0{,}02875x - 3{,}07 \cdot 10^{-3}\right)e^{-10x}\Big|_{0{,}195}^{0{,}295} = 7{,}89 \cdot 10^{-6}$$

$$\int_{0{,}295}^{0{,}39} (x-0{,}34125)^2 e^{-10x} dx = \left(-\frac{x^2}{10} + 0{,}04825x - 6{,}82 \cdot 10^{-3}\right)e^{-10x}\Big|_{0{,}295}^{0{,}39} = 2{,}43 \cdot 10^{-6}$$

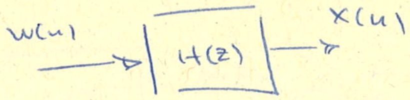
$$\sigma_q^2 = 8{,}952 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \boxed{S/N = 11{,}46\,dB}$$

$$\sigma_S^2 = 1{,}4292 \cdot 10^{-3}$$

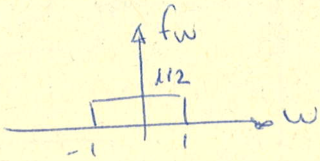
g) Aumenta el ruido de saturación, pero el ruido granular es muy reducido en comparación con el caso sin saturación, por lo que aumenta la SNR al permitir saturación.

EJERCICIO III - 4

$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$



$w(n)$ uniforme en $[-1, 1]$



a) S/N $\quad B = 8$

$x_{max} \Rightarrow p_s = 0$

$x(n) = w(n) + w(n-1) + w(n-2)$

$\gamma_w(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$ (muestras estadísticamente independientes)

$\rightarrow$ amplitud máxima de $x(n) \Rightarrow x_{max} = 3$

$\sigma_x^2 = 3\sigma_w^2 \qquad \sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 f_w(w)\, dw = \int_0^1 w^2 dw = \frac{1}{3}$

$\sigma_x^2 = 1$

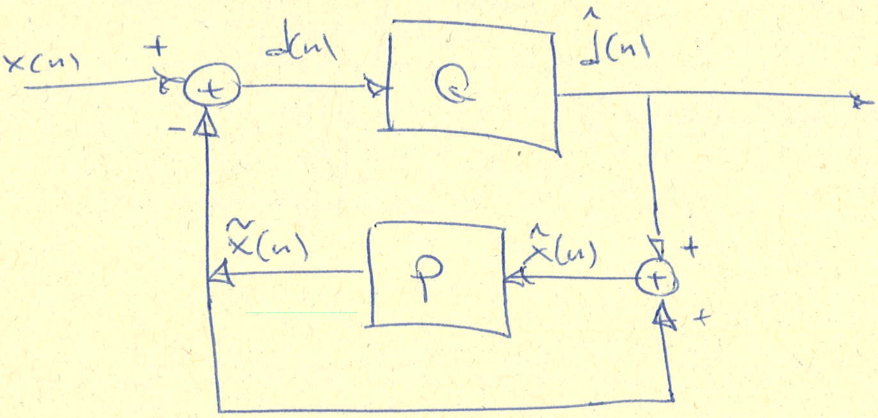
$$\boxed{S/N = 6B + 4{,}8 - 20\log \frac{x_{max}}{\sigma_x} = 43{,}26\,dB}$$

b) Ley $A = 100$ $\quad \boxed{S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1 + \ln A)^2} = 37{,}96\,dB}$

En la región constante

$G_c = \frac{A}{1 + \ln A} = 17{,}84$ para la región lineal

c) Cuantificador diferencial



$d(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$

$d(n) - \hat{d}(n) = e(n)$ ← este error de cuantificación es mucho más pequeño que si se cuantificara directamente x(n)

$\hat{x}(n) = \hat{d}(n) + \tilde{x}(n) = d(n) - e(n) + x(n) - d(n) = x(n) - e(n)$

d) Coeficientes predictor óptimo p=3

$$\gamma_x(m) = \sum_{k=m}^{q} \sigma_w^2 b_k h(k-m) \qquad 0 \le m \le q$$

Señal de A(2) → $= \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{2} 1$;

$\gamma_x(0) = 1$

$\gamma_x(1) = \frac{2}{3}$ ⇒ AR(3)

$\gamma_x(2) = \frac{1}{3}$

$\gamma_x(3) = 0$

Levinsen-Durbin:

$$E_0^f = 1 \; ; \quad a_1(1) = -\frac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)} = -\frac{2}{3} = k_1 \; ; \quad E_1^f = \frac{5}{9}$$

$$k_2 = -\frac{\gamma_x(1)a_1(1) + \gamma_x(2)a_1(0)}{E_1^f} = \frac{1}{5}$$ → ~~y tengo las autocorrelación no son buenas~~

$$E_2^f = \frac{8}{15} \qquad a_2(1) = a_1(1) + k_2 a_1(1) = -\frac{4}{5}$$

$$k_3 = -\frac{\gamma_x(1)a_2(2) + \gamma_x(2)a_2(1) + \cancelto{0}{\gamma_x(3)a_2(0)}}{E_2^f} = \boxed{\frac{1}{4} = a_3(3)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_3(1) &= a_2(1) + k_3 a_2(2) = -\frac{3}{4} \\ a_3(2) &= a_2(2) + k_3 a_2(1) = 0 \end{aligned}}$$

Ganancia:

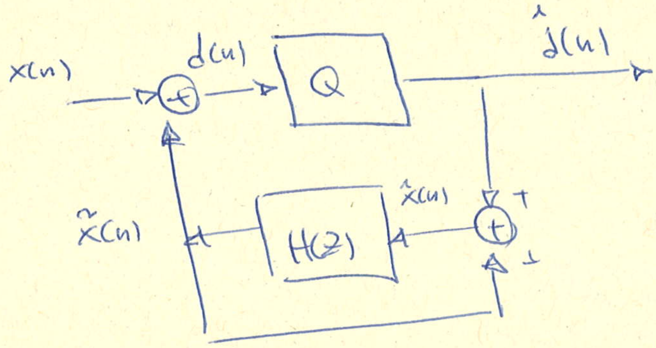
✓ $B = 8 \Rightarrow SNR \uparrow$

✓ predictor óptimo

$$\Rightarrow G_{dopt} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{3} a_3(k)\rho_x(k)} \qquad \rho_x(k) = \frac{\gamma_x(k)}{\gamma_x(0)}$$

$$\boxed{G_{dopt} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = 2 = 3\,dB}$$

Ejercicio III-5



$$H(z) = \frac{5}{3} z^{-1} - \frac{4}{3} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3}$$

$$E\left[d^2(n)\right] = \frac{3}{5}$$

$$Q \left\langle \begin{array}{l} B = 10 \text{ bits} \\ x_{max} = 4 \end{array} \right.$$

a) $B = 10$ bits $\Rightarrow$ S/N muy elevada

Predictor óptimo para $x(n)$

$$\Rightarrow \boxed{G_{d_{opt}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_p(k) \rho_x(k)}}$$

¿Cómo llego a eso?

$$d(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$$

$$\tilde{x}(n) + \hat{d}(n) = \hat{x}(n)$$

$$\underline{e(n)} = d(n) - \hat{d}(n) = x(n) - \tilde{x}(n) - \hat{x}(n) + \tilde{x}(n)$$

$$= \underline{x(n) - \hat{x}(n)}$$

$$S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2} \cdot \frac{\sigma_d^2}{\sigma_e^2} = G_d \cdot (S/N)_q$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_x(0) \qquad \sigma_d^2 = \gamma_x(0) + \sum_{k=1}^{P} a_p(k) \gamma_x(k)$$

b) Sin estéreo: $\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = 7{,}8125 \cdot 10^{-3}$

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 5{,}086 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{(S/N)_u} = \frac{3/5}{\sigma_e^2} = \underline{50{,}72\ dB}$$

$$G_d = \frac{1}{1 - \frac{5}{3}\rho_x(1) + \frac{4}{3}\rho_x(2) - \frac{1}{2}\rho_x(3)}$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3}$$

$$A_2(z) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2} \cancel{- \frac{1}{2}z^{-3}} + \frac{1}{2}z^{-3}\left(\cancel{1} - \frac{5}{3}z + \frac{4}{3}z^2 - \frac{1}{2}z^3\right)\right) = 1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}$$

$$A_1(z) = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-2}\left(1 - \frac{4}{3}z + \frac{2}{3}z^2\right)\right) = 1 - \frac{4}{5}z^{-1}$$

$$r_x(0) = E_0^f = 4$$

$$\boxed{G_d = \frac{r_x(0)}{\sigma_d^2} = \frac{20}{3} = 8{,}24\ dB}$$

$$\boxed{S/N = 58{,}96\ dB}$$

c) $\boxed{\gamma_x(0) = 4}$ $\quad \boxed{\gamma_x(1) = -K_1 \gamma_x(0) = \frac{16}{5}}$ $\quad \mathcal{E}_1^f = \frac{36}{25}$

$$\boxed{\gamma_x(2) = -\frac{K_2 \mathcal{E}_1^f + \gamma_x(1) a_1(1)}{a_1(0)} = \frac{8}{5}} \qquad \mathcal{E}_2^f = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{\gamma_x(3) = -\left(K_3 \mathcal{E}_2^f + \gamma_x(1) a_2(2) + \gamma_x(2) a_2(1)\right) = \frac{2}{5}}$$

$$\boxed{\gamma_x(m) = \frac{5}{3}\gamma_x(m-1) - \frac{4}{3}\gamma_x(m-2) + \frac{1}{2}\gamma_x(m-3) \qquad m > 3}$$

EJERCICIO III-6

$x(n) = s(n)\, f(n)$ $\qquad f_x(x) = a \cdot e^{-2|x|} \quad \forall x$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{sereno} \\ 0{,}01 & \text{sordo} \end{cases}$$

$B = 8$ bits

a) x_{max} para $p_s < 2\%$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1 = 2\int_0^{\infty} a\, e^{-2x}\,dx = a\, e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = \boxed{a = 1}$$

$$p_s = 2\int_{x_{max}}^{\infty} e^{-2x}\,dx = e^{-2x_{max}} = 0{,}02$$

$$\boxed{x_{max} = 1{,}956}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = 0{,}01528}$$

b) S/N con fuentes seneros:

$$\sigma_q^2 = \bar{P}_S \frac{\Delta^2}{12} + N_S \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{2}$$

muchos niveles, ruido granular uniforme

$$N_S = 2\int_{x_{max}}^{\infty} (x^2 - \hat{x}_N)^2 f_x(x)\,dx \qquad \hat{x}_N = x_{max} - \frac{\Delta}{2}$$

$$= 2\int_{x_{max}}^{\infty} (x^2 - \hat{x}_N)^2 e^{-2x}\,dx = 0{,}01$$

$$\boxed{\sigma_q^2 \simeq 0{,}01} \qquad \boxed{(S/N) = 49{,}24 = 16{,}92\,dB}$$

c) S/N no seneros $\longrightarrow$ x_{max} "se mueve"

$$f_x(x) = a' e^{-200|x|} \qquad \forall x \Rightarrow a = 100 \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 5 \cdot 10^{-5}}$$

$$P_S = e^{-200x}\Big|_{x_{max}}^{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_q^2 = \sigma_g^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 1{,}95 \cdot 10^{-5}}$$

$$\boxed{(S/N) = 2{,}57 = 4{,}1\,dB}$$

d) Ley $A = 87,6$

$$\boxed{S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 38,17\,dB}$$

⊛

Tramos segmentos ⊛

Suposición: - ruido de saturación suficientemente pequeño → a lo mejor no es verdad

e) Cuantificación adaptativa que adapte la ganancia al nivel de la señal.

⊛ para los segmentos: $S/N = G_c^2 \cdot (S/N)_u = 28,2\,dB$

⊛ Comprobar que la sobrecarga es muy pequeña:

$y_{max} = x_{max} = 1,956$, $\hat{x}_{N-1} \,/\, y_{max} - \frac{\Delta}{2} = F(\hat{x}_{N-1}) = 1,94836$

$$= \frac{x_{max}}{1+\ln A}\left(1 + \ln \frac{A\hat{x}_{N-1}}{x_{max}}\right) \Rightarrow \hat{x}_{N-1} = 1,915$$

$$\sigma_s^2 = 2\int_{x_{max}}^{\infty} (x - \hat{x}_{N-1})^2 e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\left((x-1,915)^2 + \frac{x-1,915}{1} + \frac{1}{2}\right)$$

$f = (x-a)^2$, $dg = e^{-2x}dx$ | $df = 2(x-a)\,dx$, $g = -\frac{e^{-2x}}{2}$ || $f = x - a$, $dg = e^{-2x}dx$ | $df = dx$, $g = -\frac{e^{-2x}}{2}$

$= 0,011$

$S/N = 38{,}17\,dB \Rightarrow \sigma_q^2 = \underline{7{,}62 \cdot 10^{-9}}$ $\boxed{!!}$

El ruido de saturación es muy grande comparado con el que se tendría en la zona de SNR constante

EJERCICIO III - 7

$$p(x) = A e^{-4|x|} \qquad \forall x$$

Q mid-rise, uniforme, $B=8$

a) Δ para $P_S \leq 0{,}01\ \%$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 = 2\int_0^{\infty} A e^{-4x}\,dx = -\frac{A}{2} e^{-4x}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{2}$$

$$\boxed{A = 2}$$

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = \frac{x_{max}}{128}$$

$$P_S = 2\int_{x_{max}}^{\infty} p(x)\,dx = -e^{-4x}\Big|_{x_{max}}^{\infty} = e^{-4x_{max}} = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = 2{,}3} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0{,}018}$$

b) $\sigma_q^2 = \sigma_s^2 + \bar{P}_s \cdot \sigma_g^2$

256 niveles $\Rightarrow$ fdp del ruido granular uniforme

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_g^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 2,7 \cdot 10^{-5}}$$

$$\boxed{\sigma_s^2 = 2 \int_{x_{max}}^{\infty} (x - \hat{x}_{N-1})^2 p(x)\,dx = (\ldots) = 5,474 \cdot 10^{-4}}$$

$$\hat{x}_{N-1} = \frac{255}{2} \times \Delta = 2,295$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = 5,744 \cdot 10^{-4}}$$

$$S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} \qquad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = 0,125$$

$$\boxed{S/N = 23,38\,dB}$$

Recalculando: $\sigma_s^2 = 1,29 \cdot 10^{-5}$

$$\Rightarrow S/N = 34,96\,dB$$

d) $x(k) = 0{,}1047$

$$\frac{x(k)}{\Delta} = 5{,}82$$

$$\Rightarrow (x_k, x_{k+1}) = (0{,}09,\ 0{,}108)$$

$$\boxed{\hat{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = 0{,}099}$$

$$\boxed{e(k) = x(k) - \hat{x}_k = 5{,}7 \cdot 10^{-3}}$$

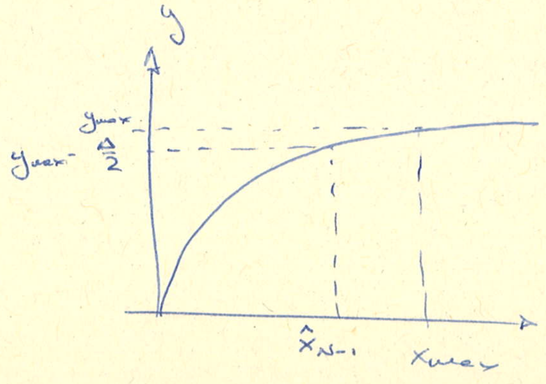
c) Ley A $A = 87{,}56$

Se utilizan todos los niveles y la saturación es reducida por la función de compresión:

$$\boxed{S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 38{,}17\ \text{dB}}$$

Se encuentra en la región de S/N constante.

Compruebo que el ruido de saturación es despreciable:



$$\sigma_s^2 = 2 \int_{x_{max}}^{\infty} (x - \hat{x}_{N-1})^2 p(x)\, dx$$

¿$\hat{x}_{N-1}$?

$$y_{max} - \frac{\Delta}{2} = F(\hat{x}_{N-1})$$

$$y_{max} - \frac{\Delta}{2} = 2{,}3 - \frac{0{,}018}{2} = 2{,}291 = \frac{y_{max}}{1+\ln A}\left(1 + \ln \frac{A\,\hat{x}_{N-1}}{x_{max}}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}_{N-1} = 2{,}25}$$

$$\sigma_s^2 = 2\int_{2,3}^{\infty} 2(x-2{,}25)^2\, e^{-4x}\, dx$$

$$\int (x-a)^2 e^{-4x} dx = -\frac{e^{-4x}}{4}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int (x-a)\, e^{-4x} dx = -\frac{e^{-4x}}{4}(x-a)^2 - \frac{e^{-4x}}{8}(x-a) + \frac{1}{8}\int e^{-4x} dx$$

$$f = (x-a)^2 \quad \Big| \quad df = 2(x-a)\,dx \qquad \Big\| \qquad f = x-a \quad \Big| \quad df = dx$$

$$dg = e^{-4x} dx \quad \Big| \quad g = -\frac{e^{-4x}}{4} \qquad \Big\| \qquad dg = e^{-4x} dx \quad \Big| \quad g = -\frac{e^{-4x}}{4}$$

$$= -\frac{e^{-4x}}{4}\left((x-a)^2 + \frac{x-a}{2} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\underline{\sigma_s^2} = -e^{-4x}\left((x-2{,}25)^2 + \frac{x-2{,}25}{2} + \frac{1}{8}\right)\Big|_{2,3}^{\infty} = \underline{1{,}54 \cdot 10^{-5}}$$

¿σ_q^2? $S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 38{,}17\,dB$

$$\sigma_x^2 = 0{,}125 \Rightarrow \underline{\sigma_q^2 = 1{,}91 \cdot 10^{-5}}$$

Tal vez no sea tan despreciable !!

EJERCICIO III-8

$x(n)$ estacionaria

$m_x = 0 \qquad \gamma_x(k) = 0{,}9^{|k|}$ fdp gaussiana

a) S/N , B = 5 $\quad f_s = \frac{x_{max}}{\sigma_x} = 4$

(*)

$$\boxed{S/N = 6 \cdot B + 4{,}8 - 20 \log f_s = 22{,}76 \text{ dB}}$$

b) $\hat{x}(n) = a_1\, x(n-1)$ predictor óptimo

$$(S/N)_a \uparrow\uparrow \Rightarrow \boxed{G_p = \frac{1}{1-\rho_x^2(1)} = 7{,}21 \text{ dB}}$$

$a_1 = -\gamma_x(1)$

(*) para usar esa fórmula de la SNR hay que verificar que no hay saturación:

$$P_s = 2\int_{x_{max}}^{\infty} [illegible] \, f_x(x)\,dx$$

$$\sigma_x^2 = 1 = V_x(1)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$x_{max} = 4$$

$$\hat{x}_{N-1} = x_{max} - \frac{\Delta}{2} = 3{,}875$$

$$P_s = 2\int_{x_{max}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t_{max}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$x = \sqrt{2}\,t$$

$$dx = \sqrt{2}\,dt$$

$$t_{max} = \frac{x_{max}}{\sqrt{2}}$$

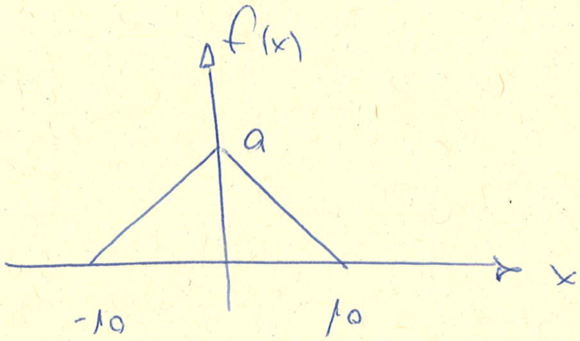
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t_{max}^2}}{t_{max} + \sqrt{t_{max}^2 + 2}} < P_s < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t_{max}^2}}{t_{max} + \sqrt{t_{max}^2 + 4/\pi}}$$

$$\boxed{6{,}32 \cdot 10^{-5} < P_s < 6{,}45 \cdot 10^{-5}}$$

muy pequeña $\Rightarrow$ la aproximación es válida

EJERCICIO III - 9

$x(n)$, $m_x = 0$, fdp triangular, max $\{x(n)\} = 10$



$$\int_{-10}^{10} f(x)dx = 1 = 2\int_0^{10} (\ldots)dx =$$

$$= a \cdot 10 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{10}}$$

Cuantificador no uniforme: $x_i = \{-7, -3, -1, 0, 1, 3, 7\}$

$$f(x) = \frac{1}{100}(10 - |x|) \qquad |x| < 10$$

a) $\hat{x}_4 \rightarrow$ óptimo $\Rightarrow$ Lloyd-Max : $x_i = \dfrac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$

$$\hat{x}_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} x f(x)dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx}$$

$x_{max} = 10 = x_4 \qquad x_3 = 7$

$\hat{x}_i = \{-5, -2, -0{,}5, 0{,}5, 2, 5\}$

$$\boxed{\hat{x}_4 = \frac{\int_7^{10} x \frac{1}{100}(10 - x)dx}{\int_7^{10} \frac{1}{100}(10-x)dx} = \frac{5x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_7^{10}}{10x - \frac{x^2}{2}\Big|_7^{10}} = 8} \qquad \boxed{\hat{x}_{-4} = -8}$$

b) $\sigma_q^2 = \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f(x)\, dx$

$$= 2\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{100}(10-x)dx + 2\int_1^3 (x-2)^2 \frac{1}{100}(10-x)dx + 2\int_3^7 (x-5)^2 \frac{1}{100}(10-x)dx$$

$$+ 2\int_7^{10} (x-8)^2 \frac{1}{100}(10-x)dx = (\ldots)$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = 0{,}4308}$$

c) $\sigma_x^2 = \int_{-10}^{10} x^2 f(x) dx = 2\int_0^{10} \frac{1}{100} x^2 (10-x) dx = \frac{1}{50}\left(\frac{10}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{10} =$

$$= 16{,}67$$

$$\boxed{S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 15{,}88 dB}$$

d) Fórmula aproximada del Q uniforme:

$$\boxed{S/N = 4{,}8 + 6B - 20 \log \frac{x_{max}}{\sigma_x} = 15{,}02 dB}$$

La potencia de ruido en el intervalo (7, 10) está minimizada, por lo que aumenta la SQNR

EJERCICIO III-11

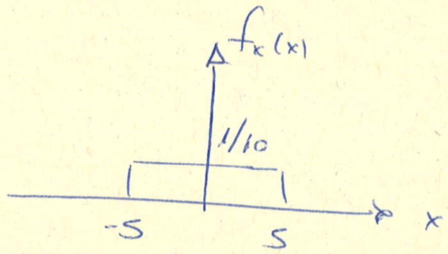
$x(n)$ uniforme en $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$

$B=8$

$$x_i = \frac{i}{2^8} \qquad i=\{0, \pm 1, \dots \pm 2^7-1\}$$

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_{i-1}+2^{-8} & i=\{1 \dots 2^7\} \\ x_{i+1}-2^{-8} & i=\{-1 : -2^7\} \end{cases}$$

a) $a = 10 \Rightarrow$ ¿SNR?



$x_{127} = 0{,}496 \Rightarrow$ saturación

$$\sigma_x^2 = 2\int_0^5 \frac{x^2}{10}\,dx = \frac{25}{3}$$

$\hat{x}_{127} = x_{127} = 0{,}496$

Ruido granular uniforme (señal uniforme):

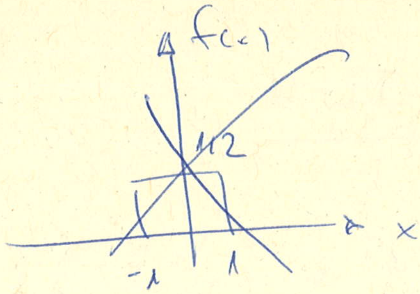
$$\underline{\sigma_g^2} = \frac{\Delta^2}{12} = \underline{1{,}27\cdot 10^{-6}} \qquad P_s = 2\int_{0{,}496}^{5} f_x(x)\,dx = $$

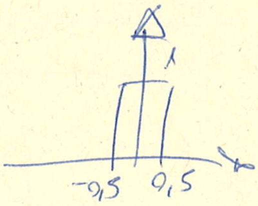
$$= 0{,}901$$

$$\underline{\sigma_s^2} = 2\int_{0{,}496}^{5} (x-0{,}496)^2 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{15}(x-0{,}496)^3 \Big|_{0{,}496}^{5} = \underline{6{,}09}$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = \sigma_s^2 + \bar{P}_s\,\sigma_g^2 = 6{,}09} \qquad \boxed{S/N = 1{,}36\ \text{dB}}$$

b) $a = 1$



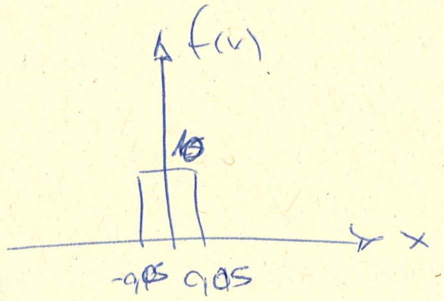


$\underline{P_s} = 2\int_{0,496}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \cancel{0,504}$ $\quad \sigma_s^2 = \cancel{0,043}$ $\quad \sigma_q^2 = \sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 1,27\cdot 10$

$\sigma_x^2 = 0,0833$

$\sigma_q^2 = \cancel{0,043} \Rightarrow \boxed{S/N = 48,16\ dB}$

c) $a = 0,1$



$\frac{25,6}{2}$ niveles usados

El ruido es uniforme porque la fdp de la señal ~~[illegible]~~ es uniforme.

$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 1,27\cdot 10^{-6}$

$\sigma_x^2 = 2\int_0^{1/20} x^2 \cdot 10\,dx = \frac{20}{3} x^3 \Big|_0^{1/20} = 8,33\cdot 10^{-4}$

$\boxed{S/N = 28,17\ dB}$

d) $a=10 \Rightarrow$ mucha saturación $\Rightarrow S/N \downarrow\downarrow$

$a=1 \Rightarrow$ todos los niveles útiles y sin saturación

$a=0,1 \Rightarrow$ poco aprovechamiento de niveles

EJERCICIO III-12

$$p(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) $2\int_0^1 a(1-x^2)\,dx = 2a\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4a}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}}$

$B = 8$ S/N σ_s^2

Ruido granular uniforme, $x_{max} = 1$

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = 7{,}8125 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_q^2 = 5{,}086 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_x^2 = 2\int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{S/N = 45{,}95\ dB}$$

b) $A = 87{,}56 \Rightarrow \boxed{S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 38{,}17\ dB}$

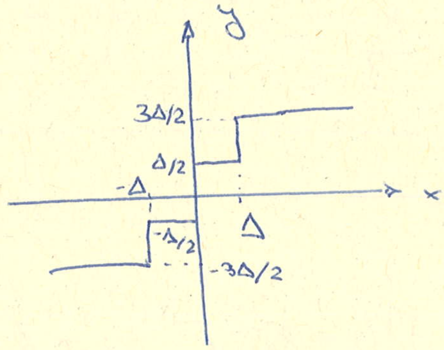
c) El Q logarítmico reduce la SNR, pero la mantiene en un amplio rango dinámico.

EJERCICIO III - 13

4 niveles $\longrightarrow$ $x_{-1} = -\Delta \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \Delta$

$$y_{11} = -\frac{3}{2}\Delta \quad y_{10} = -\frac{1}{2}\Delta \quad y_{00} = \frac{\Delta}{2} \quad y_{01} = \frac{3\Delta}{2}$$

$$p(x) = e^{-2|x|} \quad \forall x$$



Determinar el valor óptimo de Δ

a) σ_g^2 ? $\quad x_{max} = 2\Delta$

Contribuciones simétricas:

$$\sigma_g^2 = 2\int_0^{\Delta}\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2 p(x)\,dx + 2\int_{\Delta}^{2\Delta}\left(x-\frac{3\Delta}{2}\right)^2 p(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\Delta}\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2 e^{-2x}\,dx + 2\int_{\Delta}^{2\Delta}\left(x-\frac{3\Delta}{2}\right)^2 e^{-2x}\,dx$$

$$\int (x-b)^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{(x-b)^2}{2}e^{-2x} + \int (x-b)e^{-2x}\,dx = -\frac{(x-b)^2}{2}e^{-2x} - \frac{x-b}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} f = (x-b)^2 \\ dg = e^{-2x}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} df = 2(x-b)\,dx \\ g = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \Bigg\| \left.\begin{array}{l} f = x-b \\ dg = e^{-2x}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} df = dx \\ g = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \Bigg\| = -\frac{1}{2}\left((x-b)^2 + x - b + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$$

$$\sigma_g^2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-2\Delta}}{2}\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) + 2\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{e^{-4\Delta}}{2}\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\Delta}{4} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{e^{-2\Delta}}{2}\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\sigma_g^2 = \frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2} - e^{-2\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right) + e^{-2\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right) - e^{-4\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right);}$$

b) $$\boxed{\sigma_s^2 = 2\int_{2\Delta}^{\infty}\left(x - \frac{3\Delta}{2}\right)^2 e^{-2x}\,dx = \cancel{2}\,\frac{e^{-4\Delta}}{\cancel{2}}\left(\frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

c) $\Delta = \{0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75,\ 1\}$

$\Delta = 0{,}25$: $\sigma_g^2 = 3{,}32 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_s^2 = 0{,}2414$

$$p_s = 2\int_{2\Delta}^{\infty} e^{-2x}\,dx = e^{-4\Delta} = 0{,}736$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = \bar{p}_s \sigma_g^2 + \sigma_s^2 = 0{,}2435}$$

$\Delta = 0{,}5$: $\sigma_g^2 = 0{,}0186$, $\sigma_s^2 = 0{,}1184$

$p_s = 0{,}13534$

$$\boxed{\sigma_q^2 = 0{,}1345}$$

$$\Delta = 0{,}75 \begin{cases} \sigma_g^2 = 0{,}0477 \\ \sigma_s^2 = 0{,}0576 \end{cases} \qquad \boxed{\sigma_q^2 = 0{,}103}$$

$$\Delta = 1 \begin{cases} \sigma_g^2 = 0{,}092 \\ \sigma_s^2 = 0{,}275 \end{cases} \qquad \boxed{\sigma_q^2 = 0{,}1176}$$

d) Mínimo error para $\Delta = 0{,}75$

Probabilidad de los símbolos

$$\boxed{p(00)} = \int_0^{\Delta} p(x)\,dx = \int_0^{\Delta} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_0^{\Delta} = \boxed{0{,}3884}$$

$$= \boxed{p(10)}$$

$$\boxed{p(01) = p(11)} = \int_{\Delta}^{\infty} p(x)\,dx = \frac{1-2p(00)}{2} = \boxed{0{,}1116}$$

e) Se obtiene para probabilidades diferentes porque la saturación aumenta mucho el ruido y la señal no está acotada.

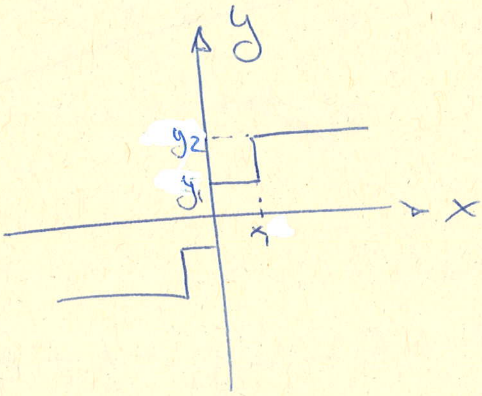
Además, la fdp de la señal no es uniforme, tiene más densidad en los símbolos más probables.

EJERCICIO III-14

4 niveles $\qquad f_x(x) = k e^{-2|x|} \qquad -2 \le x \le 2$

Simétrico en $x=0$ (mid-rise)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1 = 2\int_0^2 k e^{-2x}\,dx =$$



$$= k e^{-2x}\Big|_0^2 \Rightarrow \boxed{k = 1{,}02}$$

a) $x_{max} = 2$ ⇒ sin saturación

$$\sigma_q^2 = 2k\int_0^{x_1} (x-y_1)^2 e^{-2x}\,dx + 2k\int_{x_1}^{2} (x-y_2)^2 e^{-2x}\,dx$$

$$= 2k\left(e^{-2x}\left(-\frac{(x-y_1)^2}{2} - \frac{x-y_1}{2} - \frac{1}{4}\right)\Bigg|_0^{x_1} + e^{-2x}\left(-\frac{(x-y_2)^2}{2} - \frac{x-y_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\Bigg|_{x_1}^{2}\right) =$$

$$= k\left(\frac{1}{2} - y_1 + y_1^2 - e^{-2x_1}\left((x_1-y_1)^2 + (x_1-y_1) + \frac{1}{4}\right) + e^{-2x_1}\left((x_1-y_2)^2 + (x_1-y_2) + \frac{1}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-4}\left((2-y_2)^2 + 2 - y_2 + 1/4\right)\right)$$

b) x_1 [illegible] $\rightarrow$ y_1, y_2?

$$\frac{\partial \sigma_g^2}{\partial y_1} = \left(2y_1 - 1 + \cancel{e^{-2x_1}\left(2y_1 - 1\right)}\right) r = 0$$

$$\cancel{y_1 = \frac{e^{-2x_1} + 1}{2\left(e^{-2x_1} + 1\right)} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \sigma_g^2}{\partial y_1} = 0 = 2y_1 - 1 + e^{-2x_1}\left(2\left(x_1 - y_1\right) + 1\right)$$

$$= y_1\left(2 - 2e^{-2x_1}\right) - 1 + 2e^{-2x_1} \cdot x_1 + e^{-2x_1}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1 - e^{-2x_1}\left(1 + 2x_1\right)}{2 - 2e^{-2x_1}}}$$

$$\frac{\partial \sigma_g^2}{\partial y_2} = 0 = -e^{-2x_1}\left(2\left(x_1 - y_2\right) + 1\right) + e^{-4}\left(2\left(2 - y_2\right) + 1\right)$$

$$= y_2\left(2e^{-2x_1} - 2e^{-4}\right) + e^{-4}\left(4 + 1\right) - e^{-2x_1} \cdot 2x_1 - e^{-2x_1}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{(1 + 2x_1)e^{-2x_1} - 5e^{-4}}{2e^{-2x_1} - 2e^{-4}}}$$

c) y_1, y_2 conocidos $\rightarrow$ ¿x_1?

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_1} = 0 = 2e^{-2x_1}\left((x_1-y_1)^2+(x_1-y_1+\cancel{\tfrac{1}{4}})\right)-e^{-2x_1}\left(\cancel{2}(x_1-y_1)+\cancel{1}\right)-$$

$$-2e^{-2x_1}\left((x_1-y_2)^2+(x_1-y_2+\cancel{\tfrac{1}{4}})\right)+e^{-2x_1}\left(\cancel{2}(x_1-y_2)+\cancel{1}\right)=$$

$$=2e^{-2x_1}\left(\cancel{x_1^2}-2x_1y_1+y_1^2+\cancel{x_1}-y_1-(\cancel{x_1^2}-2x_1y_2+y_2^2+\cancel{x_1}-y_2)\right)+\cancel{2}e^{-2x_1}(y_1-y_2)=$$

$$=2e^{-2x_1}\left(y_1^2-y_1-2x_1y_1+2x_1y_2+y_2-y_2^2\right)+\cancel{2}e^{-2x_1}(y_1-y_2)=$$

$$=e^{-2x_1}\left(2y_1^2\cancel{-2y_1}-4x_1y_1+4x_1y_2\cancel{+2y_2}-2y_2^2\right)=0$$

$$x_1(4y_2-4y_1)=2y_2^2-2y_1^2+\cancel{\quad}=2(y_2-y_1)(y_2+y_1)$$

$$\boxed{x_1=\frac{1}{2}(y_2+y_1)}$$

d) Q uniforme: $y_1 = \frac{\Delta}{2}$ $y_2 = \frac{3\Delta}{2}$ $x_1 = \Delta$ $\Delta = 1$

$\boxed{\sigma_q^2 = 0{,}0983}$

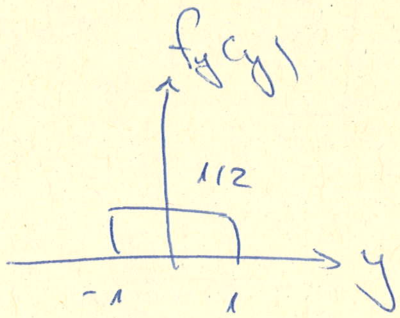
e) $x_1 = 1 \Rightarrow$ ¿y_1, y_2?

$\boxed{y_1 = 0{,}3435 \quad y_2 = 1{,}3435}$

f) $\boxed{x_1 = 0{,}8435}$

g) $\boxed{\sigma_q^2 = 0{,}0662}$

EJERCICIO III-15



$y(n)$ uniforme en $[-1,1]$

$B = 11$

a) El cuantificador óptimo es un cuantificador uniforme con $x_{max} = y(n)$, ya que la señal $x(n)$ es uniforme

b) Utilizaré, $x_{max} = 1$

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^B} = 9{,}766 \cdot 10^{-4}$$

$$\min x_{max} = 10^{-2} \Rightarrow \frac{10^{-2}}{\Delta} = 10{,}24$$

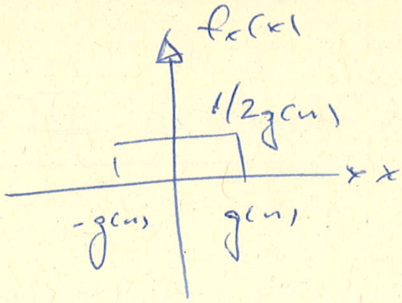
esto es para los valores positivos o negativos, el total es doble !!

Puedo aproximar el ruido por:

$$\boxed{\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 7{,}95 \cdot 10^{-8}}$$

$$S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \frac{1}{2g(u)}\int_{-g(u)}^{g(u)} x^2\,dx}$$



$$= \boxed{\frac{g^2(u)}{3}}$$

$$\boxed{S/N = \frac{g^2(u)}{3\sigma_g^2}}$$

$u = 0 \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{S/N_{u=0} = 66{,}23\ \text{dB}}$

$u = 10000 \Rightarrow g(u) = 10^{-2} \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1e^{-4}}{3}$

$$\boxed{S/N_{u=10000} = 26{,}26\ \text{dB}}$$

c) $x_{max} = 4/5 \Rightarrow \Delta = 7{,}8125 \cdot 10^{-4}$

Ruido granular: $\boxed{\sigma_g^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 5{,}086 \cdot 10^{-8}}$

Ruido de saturación para $g(u) > 4/5$:

$$\sigma_s^2 = 2\int_{4/5}^{\infty} (x - 4/5)^2 f_x(x)\,dx \qquad p_s = 2\int_{4/5}^{\infty} f_x(x)\,dx \quad \text{si } g(u) > 4/5$$

$$g(u) > 4/5 \Rightarrow \underline{\rho_s} = 2\int_{4/5}^{g(u)} \frac{1}{2g(u)}\,dx = \frac{g(u)-4/5}{g(u)} = \underline{1-\frac{4}{5g(u)}}$$

$$\underline{\sigma_s^2} = \frac{1}{g(u)}\int_{4/5}^{g(u)} (x-4/5)^2\,dx = \frac{1}{3g(u)}\left((g(u)-4/5)^3 - 0\right) =$$

$$= \underline{\frac{(g(u)-4/5)^3}{3g(u)}}$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = \begin{cases} 5{,}086\cdot 10^{-8} & g(u) \leq 4/5 \\ 5{,}086\cdot 10^{-8}\left(1-\frac{4}{5g(u)}\right) + \frac{(g(u)-4/5)^3}{3g(u)} & g(u) > 4/5 \end{cases}}$$

$u = 0 \Rightarrow g(u) = 1 \Rightarrow$ saturació

$$\boxed{\sigma_q^2 = 2{,}67\cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{S/N = \frac{1/3}{2{,}67\cdot 10^{-3}} = 29{,}97\,dB}$$

$g(u) = 10^{-2} \Rightarrow$ sin saturació $\Rightarrow \boxed{\sigma_q^2 = 5{,}086\cdot 10^{-8}}$

$$\boxed{S/N = \frac{10^{-4}/3}{5{,}086\cdot 10^{-8}} = 28{,}17\,dB}$$

d) Logarítmica ley $A = 100$, $x_{max} = 1$

$u = a$ $\Rightarrow$ $$\boxed{S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 56{,}03\,dB}$$

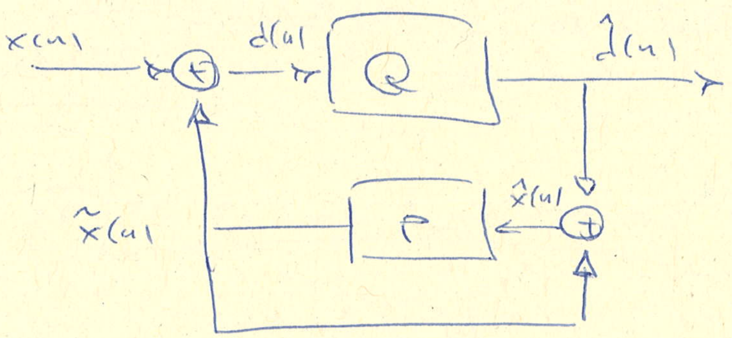
$u = 10^3 \Rightarrow (S/N)_u = 26{,}26\,dB$

$$G_c = \frac{A}{1+\ln A} = 17{,}84\ \cancel{\ldots}\,dB$$

$$\boxed{S/N = G_c^2 \cdot (S/N)_u = 51{,}29\,dB}$$

e) $$y(n) = w(n) + \sum_{i=1}^{3} a(i)\, y(n-i)$$

$\sigma_w^2 = 0{,}01$



La señal $y(n)$ está generada por un modelo AR(3), por lo que el predictor debe ser de orden 3.

La ganancia máxima del cuantificador diferencial será, para el caso de $g(n) = 1$:

$$\boxed{G_d = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{p} a(i)\rho_y(i)}}$$

siendo $a(i)$ los mismos coeficientes que los del modelo AR(3) y $\rho_y(i) = \frac{\gamma_y(i)}{\gamma_y(0)}$ $i = 1:3$

Sin embargo, conociendo la potencia del ruido que genera $y(n)$, puedo calcular la ganancia

$$\boxed{G_{d_{opt}} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_d^2} = \frac{1/3}{0{,}01} = 15{,}23\,dB}$$

Para el caso de $g(n) = 0{,}01$:

$$G_d = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2} = \frac{10^{-4}/3}{0{,}01} = \cancel{-24{,}77}\,dB \quad ??$$

Variación de $g(n)$ muy lenta $\Rightarrow x(n)$ puede considerarse estacionaria en las 3 muestras del predictor, por lo que la ganancia óptima se mantiene.

g) $B = 8 \Rightarrow \Delta = 7{,}8125 \cdot 10^{-3} \Rightarrow L = \frac{10^{-2}}{\Delta} = 1{,}28$

Para $u = 10^{-3}$, hay muy pocos niveles útiles, por lo que hay que usar integrales para calcular el ruido:

$$\sigma_q^2 = 2\int_0^{\Delta} (x - \hat{x}_1)^2 f_x(x)\,dx + 2\int_{\Delta}^{10^{-2}} (x - \hat{x}_2)^2 f_x(x)\,dx$$