departamento de ingeniería de comunicaciones
universidad de málaga

4º Curso de Ingeniería de Telecomunicación.
EXAMEN DE TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL 2. Málaga, 12 de Junio de 2007
Tiempo: 2h 30m

APELLIDOS:
NOMBRE:

Ejercicio 1

Sea y(n) la entrada, y x(n) la salida de un sistema de respuesta en frecuencia:

$$H(f) = 1 - \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}$$

Sabiendo que la autocorrelación de la señal de entrante y(n) es $\gamma_y(k) = 2.\delta(k+1) + 5.\delta(k) + 2.\delta(k-1)$

a) Obtener la autocorrelación y DEP de la señal x(n)
b) Identificar el tipo de modelo al que se ajusta x(n) y obtener sus parámetros.
c) Obtener la DEP de x(n) basada en su modelado AR(2).

En el siguiente apartado se supone desconocida la autocorrelación de la señal x(n), pero en su lugar se conoce una realización de dicha señal de longitud 20, x(0)… x(19), y se desea obtener la DEP mediante técnicas de análisis espectral paramétrico.

d) Obtener la DEP de x(n) basada en su modelado AR(2). En particular obtenga las expresiones de los parámetros del modelo en función de los datos, tanto por el método de la autocorrelación como por el de la covarianza.

Ejercicio 2

Para cuantificar una señal x(n), cuya fdp es:

$$f_X(x) = a_1, \qquad |x| \le x_1$$
$$f_X(x) = a_2, \qquad x_1 < |x| \le x_1 + x_2$$
$$f_X(x) = 0, \qquad |x| > x_1 + x_2$$

Se utiliza un cuantificador simétrico con N_1 intervalos de decisión del mismo tamaño en el intervalo $[0, x_1]$ y N_2 niveles de representación equiespaciados en el intervalo $(x_1, x_1+x_2]$, y de manera que no se produzca saturación ($x_{MAX}=x_1+x_2$).

a) Obtener la expresión de la potencia del ruido de cuantificación, en función de N_1, N_2 y de los parámetros de la fdp.
b) Demostrar que si fijamos el número de niveles totales del cuantificador ($N=2N_1+2N_2$), el mínimo ruido de cuantificación se obtiene cuando se verifica:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

c) Si el cuantificador es de 10 bits, $a_1/a_2 = 125$, $x_1=3$, $x_2=1$, obtener la máxima relación señal a ruido del cuantificador y el valor de N_1 y N_2 para los que se obtiene.
d) Si el cuantificador es de 1 bit, y para los mismos valores de la fdp del apartado c, obtener el cuantificador óptimo y su relación señal a ruido.

EXAMEN JUNIO 2007

EJERCICIO 1

$$y(n) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow x(n) \qquad H(f) = 1 - \frac{1}{2} e^{-j4\pi f}$$

$$\gamma_y(k) = 2\delta(k+1) + 5\delta(k) + 2\delta(k-1)$$

a) $y(n) \longrightarrow MA(1)$

$$\gamma_y(k) = \sigma_w^2 \sum_{m=k}^{q} b_m h(m-k)$$

$$h(k) = b_k \ ; \quad \gamma_y(0) = \sigma_w^2 (b_0^2 + b_1^2) = 5$$

$$\gamma_y(1) = \sigma_w^2 (b_0 b_1) = 2$$

$$b_0 = 1 \Rightarrow \quad 5 = \sigma_w^2 + \sigma_w^2 b_1^2$$

$$2 = \sigma_w^2 b_1 \Rightarrow \sigma_w^2 = \frac{2}{b_1} \Rightarrow 5 = \frac{2}{b_1} + \frac{2}{b_1} b_1^2$$

$$2b_1^2 - 5b_1 + 2 = 0 \Rightarrow b_1 = \begin{cases} 2 \\ \boxed{1/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma_w^2 = 4} \quad \boxed{b_1 = 1/2}$$

$$w(n) \longrightarrow \boxed{G(f)} \xrightarrow{y(n)} \boxed{H(f)} \xrightarrow{x(n)}$$

$$\Gamma_x(f) = \sigma_w^2 \left| \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-2}\right) \right|^2$$

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \cancel{4\left|1 - \frac{1}{4}e^{-j4\pi f}\right|^2} = 4\left|1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{4}e^{-j6\pi f}\right|^2}$$

$$x(n) = w(n) + \frac{1}{2}w(n-1) - \frac{1}{2}w(n-2) - \frac{1}{4}w(n-3)$$

$$\gamma_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h_{k-m} = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k b_{k-m}$$

$$q = 3 \Rightarrow \underline{\gamma_x(0)} = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{3} b_k^2 = \underline{\frac{25}{4}} \qquad \underline{\gamma_x(1) = \frac{3}{2}}$$

$$\underline{\gamma_x(2) = -\frac{5}{2}} \qquad \gamma_x\underline{(3) = -1}$$

$$\underline{\gamma_x(m) = 0 \quad m > 3}$$

b) Se ajusta a un modelo MA(3) con:

$$\frac{25}{4} = \sigma_w^2\left(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

$$\frac{3}{2} = \sigma_w^2\left(b_0 b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3\right)$$

$$-\frac{5}{2} = \sigma_w^2\left(b_0 b_2 + b_1 b_3\right) \Rightarrow b_2 = -\frac{5}{8} + \frac{b_1}{4}$$

$$-1 = \sigma_w^2\, b_0 b_3 \rightarrow \underline{b_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{b_2 = -1/2 \qquad b_1 = 1/2}$$

EXAMEN JUNIO 2007

EJERCICIO 1

$$H(f) = 1 - \frac{1}{2} e^{-j4\pi f}$$

$$y(n) \longrightarrow \gamma_y(k) = 2\delta(k+1) + 5\delta(k) + 2\delta(k-1)$$

a) Autocorrelación y DEP de $x(n)$

$y(n)$ sigue un modelo MA(1):

$$\gamma_y(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(k-m)$$

$$\gamma_y(0) = \sigma_w^2 \left(b_0^2 + b_1^2 \right) = 5$$

$$\gamma_y(1) = \sigma_w^2 \left(b_0 b_1 \right) = 2$$

$$b_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_w^2 b_1^2 + \sigma_w^2 = 5 \\ \sigma_w^2 b_1 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma_w^2 = 3} \quad \boxed{b_1 = 2/3}$$

$$y(n) = w(n) + \frac{2}{3} w(n-1)$$

$$\Gamma_y(f) = Y(f) = 3 \left| 1 + \frac{2}{3} e^{-j2\pi f} \right|^2 ; \quad \boxed{\Gamma_x(f) = 3 \left| 1 + \frac{2}{3} e^{-j2\pi f} \right|^2 \left| 1 - \frac{1}{2} e^{-j4\pi f} \right|^2}$$

$$w(n) \to \boxed{G(f)} \xrightarrow{y(n)} \boxed{H(f)} \xrightarrow{x(n)}$$

$$G(f)\cdot H(f) = \left(1 + \frac{2}{3} e^{-j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j4\pi f}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{3} e^{-j2\pi f} - \frac{1}{2} e^{-j4\pi f} - \frac{1}{3} e^{-j6\pi f}$$

$$x(n) = y(n) - \frac{1}{2} y(n-2) = w(n) + \frac{2}{3} w(n-1) - \frac{1}{2} w(n-2) - \frac{1}{3} w(n-3)$$

$$\gamma_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{q} b'_k h'(k-m) = \sigma_w^2 \sum_{k=m}^{3} b'_k \cdot b'_{k-m}$$

$$h'(n) = b'_n$$

$$\gamma_x(0) = 3\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{65}{12}$$

$$\gamma_x(1) = 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\gamma_x(2) = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right) = -\frac{13}{6}$$

$$\gamma_x(3) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$\boxed{\gamma_x(m) = \frac{65}{12}\delta(0) + \frac{3}{2}\left(\delta(1) + \delta(-1)\right) + \left(-\frac{13}{6}\right)\left(\delta(2) + \delta(-2)\right) - \left(\delta(3) + \delta(-3)\right)}$$

b) Modelo MA(3)

$$\boxed{b_0 = 1,\ b_1 = \frac{2}{3},\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = -\frac{1}{3}} \quad \boxed{\sigma_w^2 = 3}$$

EXAMEN JUNIO 2007

c) DEP de $x(n)$ basado en modelo AR(2)

Modelo AR(2) de $x(n)$:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, x(n-k)$$

$$\gamma_x(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, \gamma_x(m-k) + \sigma_w^2\, \delta(m)$$

Levinson-Durbin por ejemplo para resolver el modelo.

Orden 2:

$$\begin{bmatrix} \gamma_x(0) & \gamma_x(1) \\ \gamma_x(1) & \gamma_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p(1) \\ a_p(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_x(1) \\ \gamma_x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{65}{12} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{65}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

$a_2(1) = -0{,}41989$

$a_2(2) = 0{,}51627$

$$a_2(1) = -\frac{1638}{3901} \qquad a_2(2) = \frac{2014}{3901}$$

4

$$P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{\left|1 + a_2(1)e^{-j2\pi f} + a_2(2)e^{-j4\pi f}\right|^2}$$

$$\underline{\sigma_w^2} = \gamma_x(0) + a_2(1)\gamma_x(1) + a_2(2)\gamma_x(2) = \underline{3{,}668}$$

$$\boxed{P_x(f) = \frac{3{,}668}{\left|1 - \frac{1638}{3991}e^{-j2\pi f} + \frac{2014}{3991}e^{-j4\pi f}\right|^2}}$$

d) Análisis espectral paramétrico.

$x(0) : x(19)$ / Método de la autocorrelación (1)

AR(2) \ Método de la covarianza (2)

1.- Estimación de la autocorrelación:

$$\underline{r_x(m)} = \frac{1}{N}\sum_{k=m}^{N-1} x(k)x(k-m) = \underline{\frac{1}{20}\sum_{k=m}^{19} x(k)x(k-m)}$$

Estima sesgada para asegurar que la matriz de autocorrelación es semidefinida positiva y da lugar a un modelo estable, aunque no sea estrictamente necesario para análisis espectral

EXAMEN JUNIO 2007

Una vez estimada la autocorrelación:

$r_x(0),\ r_x(1),\ r_x(2)$

Resolver las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

Método de la autocorrelación:

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\, x(n-k)$$

$$\mathcal{E}_p^f = \sum_{n=n_I}^{n_F} f_p^2(n) \longrightarrow \text{mínimo}$$

$$n_I = 0,\ n_F = N+p-2$$

$$\Rightarrow r_x(l,k) = \sum_{n=0}^{N-p+2} x(n-k)\, x(n-l) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, r_x(l,k) = -r_x(l,0) \quad l=1..p$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_x(1,1) & r_x(1,2) \\ r_x(2,1) & r_x(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p(1) \\ a_p(2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1,0) \\ r_x(2,0) \end{bmatrix}$$

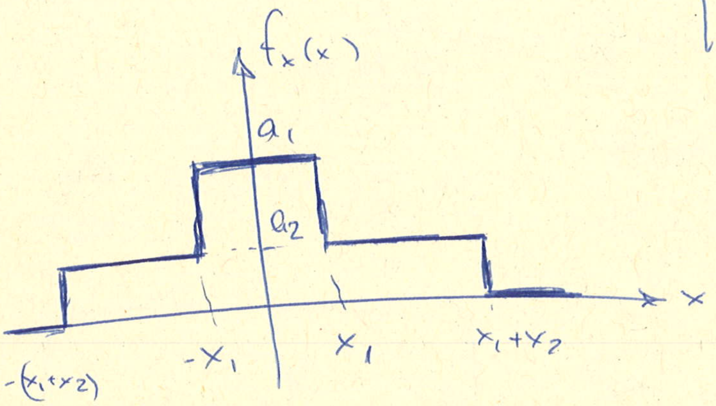
2.- Covarianza $\Rightarrow n_I = p;\ n_F = N-1$

6

EXAMEN JUNIO 2007

EJERCICIO 2

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & |x| \le x_1 \\ a_2 & x_1 < |x| \le x_1 + x_2 \\ 0 & |x| > x_1 + x_2 \end{cases}$$



Cuantificador simétrico con N_1 intervalos en $[0, x_1]$ y N_2 niveles en $(x_1, x_1+x_2]$

$x_{max} = x_1 + x_2$

a) $\sigma_q^2 = f(N_1, N_2, a_1, a_2, x_1, x_2)$

Cuantificadores uniformes, fdp uniforme

$\Longrightarrow$ ruido uniforme

$N_1 \rightarrow p_1 = f(|x| \le x_1)$, $\sigma_{q1}^2 = \dfrac{\Delta_1^2}{12}$ $\qquad p_1 = 2a_1x_1$

$$\Delta_1 = \frac{\cancel{2}x_1}{N_1} \Rightarrow \sigma_{q1}^2 = \frac{\cancel{4}x_1^2}{12N_1^2}$$

$N_2 \rightarrow p_2 = f(x_1 < |x| \le x_1 + x_2)$, $\sigma_{q2}^2 = \dfrac{\Delta_2^2}{12}$ $\qquad p_2 = 2a_2x_2$

$$\Delta_2 = \frac{\cancel{2}x_2}{N_2} \Rightarrow \sigma_{q2}^2 = \frac{x_2^2}{12N_2^2}$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = p_1 \frac{x_1^2}{12N_1^2} + p_2 \frac{x_2^2}{12N_2^2} = 2a_1 \frac{x_1^3}{12N_1^2} + 2a_2 \frac{x_2^3}{12N_2^2}}$$

8

b) $\frac{N_1}{N_2} = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/3}$

$\min \sigma_q^2$ $\qquad N = 2N_1 + 2N_2$

$\sigma_q^2 = 2a_1 \frac{x_1^3}{N_1^2} + 2a_2 \frac{x_2^3}{\left(\frac{N-2N_1}{2}\right)^2}$

$\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial N_1} = -4a_1 \frac{x_1^3}{N_1^3} + 2a_2 x_2^3 \frac{2\cdot 2}{\frac{(N-2N_1)^3}{4}} = -4a_1 \frac{x_1^3}{N_1^3} + 4a_2 x_2^3 \frac{1}{N_2^3}$

$= 0 \Rightarrow a_1 \frac{x_1^3}{N_1^3} = a_2 \frac{x_2^3}{N_2^3} \Rightarrow \boxed{\frac{N_1}{N_2} = \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_2}} \cdot \frac{x_1}{x_2}}$

c) $B = 10$ bits

$a_1/a_2 = 125$

$x_1 = 3, x_2 = 1$

$\Big\}\ N_1, N_2$, max S/N

$\frac{N_1}{N_2} = 125^{1/3} \cdot 3 = 15$ $\qquad N = 2^B = 1024 = 2N_1 + 2N_2$

$= 30N_2 + 2N_2$

$\boxed{N_2 = 32, \ N_1 = 480}$

$S/N = 10 \log S/N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$

$\sigma_q^2 =$

9

EXAMEN JUNIO 2007

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1 = 2\int_0^{x_1} a_1\,dx + 2\int_{x_1}^{x_1+x_2} a_2\,dx =$$

$$= 250\,a_2 x_1 + 2a_2 x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{752}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{125}{752}}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_q^2} = 2a_1 \frac{x_1^3}{12N_1^2} + 2a_2 \frac{x_2^3}{12N_2^2} = \underline{3{,}463\cdot 10^{-6}}$$

$$\underline{\sigma_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\,dx = 2\int_0^{x_1} a_1 x^2\,dx + 2\int_{x_1}^{x_1+x_2} a_2 x^2\,dx = \frac{2a_1 x_1^3}{3} + \frac{2a_2}{3}\left((x_1+x_2)^3 - x_1^3\right)$$

$$= \underline{3{,}09}$$

$$\boxed{S/N = 59{,}51\,dB}$$

d) $B = 1$ bit $\rightarrow$ ¿óptimo?

Condiciones de Lloyd-Max:

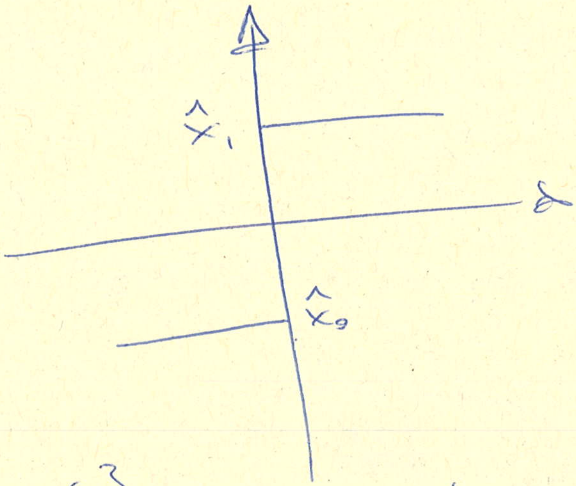
$$x_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}) \qquad \hat{x}_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x f_x(x)\,dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_x(x)\,dx}$$

1 bit $\Rightarrow$ 2 niveles

$x_0 = 0$

$x_1 = x_{max} = 4$

$x_{-1} = -x_{max} = -4$



$$\hat{x}_1 = \frac{\int_0^4 x f(x)\,dx}{\underbrace{\int_0^4 f(x)\,dx}_{1}} = \int_0^3 x f_1(x)\,dx + \int_3^4 x f(x)\,dx =$$

$$= \frac{a_1}{2} x^2 \Big|_0^3 + \frac{a_2}{2} x^2 \Big|_3^4 = 0{,}753$$

$$\boxed{\hat{x}_0 = -\hat{x}_1 = -0{,}753}$$

EXAMEN	11 de septiembre de 2006
Tratamiento Digital de la Señal II	
Ingeniería de Telecomunicación (4º curso)	
Puntuación: 5-5	Tiempo: 2 horas 30 minutos

Ejercicio. X

Una señal aleatoria $x[n]$ responde al modelo

$$x[n] = ax[n-1] + w[n] + bw[n-1]$$

donde $w[n]$ es una señal aleatoria de media cero y varianza $\sigma_w^2 = 0,25$.

1. Determinar el tipo y orden del modelo, así como las ecuaciones que relacionan los coeficientes del modelo (a y b) con la función de autocorrelación de la señal $x[n]$.
2. Calcular los coeficientes a y b del modelo, utilizando las siguientes estimas de la función de autocorrelación $\gamma_{xx}[0] = 1$ y $\gamma_{xx}[1] = 0,75$.
3. Si se utiliza un predictor lineal para la señal $x[n]$, determinar los coeficientes óptimos del predictor para los siguientes órdenes P=1,2,3 y 4, así como el valor cuadrático medio del error de predicción. Dibujar la evolución del valor cuadrático medio en función del orden del predictor P.

Cuestiones.

a) Un cuantificador logarítmico de ley A presenta una ganancia de compresión de 30 dB y una relación señal a ruido máxima de 49 dB. Determinar el valor del parámetro A, así como el número de bits del cuantificador.

b) Una señal tiene potencia unidad y su autocorrelación en uno vale -0,95. Indicar la mejora de la relación S/N que presenta un cuantificador diferencial con predictor óptimo de orden 1, frente a otro que no use esquema diferencial (asuma valores elevados de relación señal a ruido de cuantificación).

c) Describa brevemente las ideas básicas del funcionamiento de un vocoder LPC.

d) Escriba la expresión de la energia local de una señal x(n), cuando la ventana utilizada es rectangular y de longitud diez.

e) Escriba la expresión de la transformada localizada de Fourier y dibuje un diagrama para la obtención del cuadrado de su módulo a la frecuencia normalizada ¼.

Ley A:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{A.|x|.sig(x)}{1+\ln(A)}, & 0 \le |x| \le \dfrac{x_M}{A} \\[2ex] x_M \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A.|x|}{x_M}\right).sig(x)}{1+\ln(A)}, & \dfrac{x_M}{A} \le |x| \le x_M \end{cases}$$

EXAMEN SEPTIEMBRE 2006

EJERCICIO

$$x(n) = a\,x(n-1) + w(n) + b\,w(n-1) \qquad \sigma_w^2 = 0{,}25$$

1.- Modelo ARMA (1,1)

$$\gamma_x(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum\limits_{k=m}^{q} b_k\, h(\cancel{k-m}) - \sum\limits_{k=1}^{p} a_p(k)\,\gamma_x(m-k) & m \le q \\ -\sum\limits_{k=1}^{p} a_p(k)\,\gamma_x(m-k) & m > q \end{cases}$$

$$x(n) = a(a\,x(n-2) + w(n-1) + b\,w(n-2)) + w(n) + b\,w(n-1) =$$

$$= a^2 x(n-2) + w(n) + (a+b)\,w(n-1) + ab\,w(n-2)$$

$h(0) = 1$; $h(1) = a+b$; $h(2) = ab$

$$\begin{cases} \gamma_x(0) = \frac{1}{4}\left(1 + b(a+b)\right) - a\gamma_x(-1) \\ \gamma_x(1) = \frac{1}{4}(a+b) - a\gamma_x(0) \end{cases}$$

⋮

2.- $\gamma_x(0) = 1$; $\gamma_x(1) = 0{,}75 \Rightarrow \begin{cases} 4 = 1 + ab + b^2 - 4 \cdot 0{,}75a \\ 0{,}75 \cdot 4 = a + b - 4a \end{cases}$

$3 - b = -3a$; $a = \frac{b}{3} - 1$

$\Rightarrow 3 = \left(\frac{b}{3} - 1\right)b + b^2 - 3\left(\frac{b}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}b^2 - \frac{4}{3}b + 3$; $b^2 - b = 0$

$$b = \begin{cases} 0 \\ \boxed{1} \end{cases} \rightarrow a = \begin{cases} -1 \\ \boxed{-2/3} \end{cases}$$

$$\boxed{b = 1 \quad a = -\frac{2}{3}}$$

modelo estable

3.- Predictor lineal: $p = 1:4$

$\underline{p=1}$: $\varepsilon_0^f = r_x(0) = 1$ $\qquad K_1 = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)} = -3/4$

$$\varepsilon_1^f = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

$\underline{p=2}$: $$k_2 = -\frac{r_x(1)\, a_1(1) + r_x(2)\, a_1(0)}{\varepsilon_1^f} = 1/7$$

$$r_x(2) = -a \cdot r_x(1) = 1/2$$

$$a_2(1) = a_1(1)\,(1 + k_2) = -6/7$$

$$\varepsilon_2^f = 3/7 = 0{,}4286$$

$\underline{p=3}$: $$k_3 = -\frac{r_x(1)\, a_2(2) + r_x(2)\, a_2(1) + r_x(3)\, a_2(0)}{\varepsilon_2^f} = -1/36$$

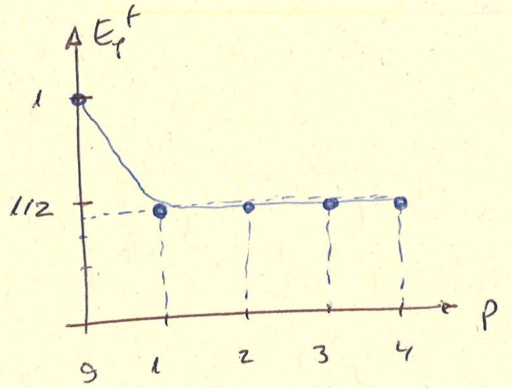
$r_x(3) = -a\, r_x(2) = \frac{1}{3}$ $\qquad a_3(1) = a_2(1) + k_3\, a_2(2) = -\frac{31}{36}$

$\varepsilon_3^f = \frac{185}{432} = 0{,}42824$ $\qquad a_3(2) = a_2(2) + k_3\, a_2(1) = 1/6$

$\underline{p=4}$: $\gamma_x(4) = \frac{2}{9}$ $\quad k_4 = \frac{1}{185}$

$a_4(1) = -\frac{478}{555}$ $\quad a_4(2) = \frac{31}{185}$ $\quad a_4(3) = -\frac{6}{185}$

$E_4^f = 9{,}42823$



CUESTIONES

a) Ley A: $G_c^2 = 30\,dB$

$S/N_{máx} = 49\ dB$

$$G_c = \frac{A}{1+\ln A} \rightarrow 10^3 = \frac{A^2}{(1+\ln A)^2}$$

$A = 199 \Rightarrow G_c^2 = 999{,}88$

$A = 200 \Rightarrow G_c^2 = 1008{,}35 \Rightarrow \boxed{A \simeq 200}$

$$S/N = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{(1+\ln A)^2} = 10^{4{,}9} \Rightarrow \boxed{B \simeq 10 \text{ bits}}$$

b) ~~Potencia~~ unidad $(\gamma_x(0) = 1)$

$\gamma_x(1) = -0{,}95$

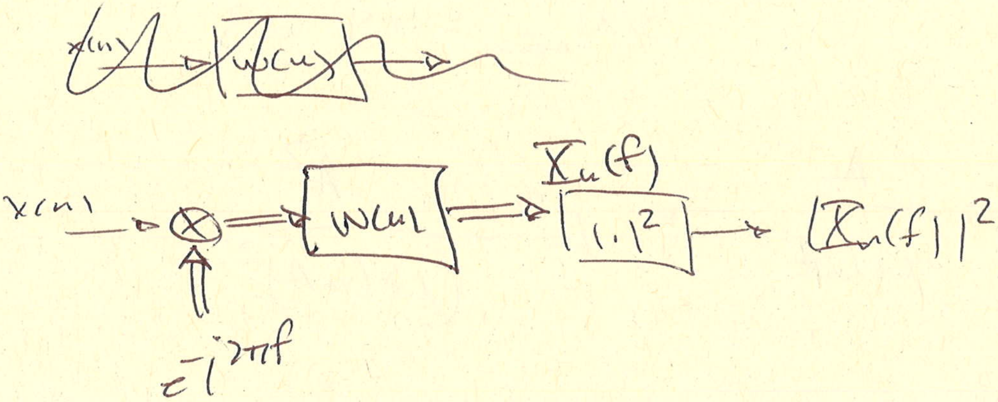
$$S/N \uparrow\uparrow \Rightarrow \boxed{G_{dopt} = \frac{1}{1-0{,}95^2} = 10{,}11\,dB}$$

Pred. ópt. $\Rightarrow \tilde{x}(n) = 0{,}95\,x(n-1)$.

d) $$\boxed{E_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(m)\, w^2(n-m) = \sum_{m=n-N+1}^{n} x^2(m)}$$

e) $$X_n(f) = \sum_{m} x(m)\, w(n-m)\, e^{-j2\pi f m}$$

$f = 1/4$



EXAMEN	15 de junio de 2006
Tratamiento Digital de la Señal II	
Ingeniería de Telecomunicación (4º curso)	
Puntuación: 5-5	Tiempo: 2 horas 30 minutos

Ejercicio 1. X

Una señal aleatoria x[n], con función densidad de probabilidad

$$p(x) = Ae^{-4|x|}, \forall x$$

pasa por un cuantificador uniforme 'mid-rise' de 8 bits.

1. Calcular el valor del escalón de cuantificación Δ para que la probabilidad de sobrecarga sea del 0,01%.
2. Determinar la potencia media de la distorsión (ruido) de cuantificación, calculando por separado la contribución granular y de sobrecarga. Calcular la relación señal a ruido de cuantificación.
3. Para una muestra concreta k de x[n], de valor x[k]=0,1047, determinar en qué intervalo de decisión cae (identifique la posición de los intervalos positivos que corresponde a esta muestra), el valor del nivel de reconstrucción y del error de cuantificación para esta muestra.
4. Determine la relación señal a ruido que se obtendría con un cuantificador logarítmico de ley A, cuya característica de compansión es :

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{A|x|}{1+\ln A} sg(x) & 0 \le \dfrac{|x|}{x_{\max}} \le \dfrac{1}{A} \\[2ex] \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A|x|}{x_{\max}}\right)}{1+\ln A} x_{\max} sg(x) & \dfrac{1}{A} \le \dfrac{|x|}{x_{\max}} \le 1 \end{cases}$$

A = 87,56

Ejercicio 2. X

Sea x(n) una señal aleatoria estacionaria. Para predecir dicha señal, se utiliza un predictor lineal de orden 3. El error de predicción de mínima potencia se obtiene con la siguiente expresión:

$$d(n) = x(n) + \frac{4}{5}.x(n-1) - \frac{2}{5}.x(n-2) - \frac{3}{5}.x(n-3)$$

$$E\left\{d^2(n)\right\} = \frac{14}{25}$$

1. Obtenga todos los valores que pueda de la autocorrelación de la señal x(n).
2. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo AR(4).
3. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo AR(3).
4. Repita el apartado 1, en caso de que x(n) se ajustara a un modelo MA(5).

En todos los casos obtener los primeros valores e indicar el procedimiento para obtener los demás.

5. Obtener la expresión de la densidad espectral de potencia de x(n) en función de la frecuencia normalizada, asumiendo que x(n) se ajusta a un modelo MA(3), y calcular su valor para los valores de frecuencia (f= 0, ¼, ½)

Explicar el resultado numérico obtenido

EXAMEN	5 de Diciembre de 2005
E.T.S.I. de Telecomunicación de Málaga	
Ingeniería Técnica de Telecomunicación.	Sistemas de Telecomunicación
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 5–5	Tiempo: 2 horas 30 minutos

Ejercicio 1. *En los siguientes apartados, asuma una ventana de análisis rectangular de N muestras.*

1. *Defina y explique el concepto de autocorrelación localizada $R_n[k]$ y dibuje un diagrama de un sistema que permita su obtención.*

2. *Compare la esperanza de la autocorrelación localizada con la autocorrelación de la señal, supuesta estacionaria.*

3. *Defina y explique los conceptos de Transformada de Fourier Localizada $X_n[f]$ y de Transformada Discreta de Fourier Localizada $X_n[k]$. Indique y justifique la relación entre la autocorrelación y la Transformada de Fourier Localizada.*

4. *Dibuje un diagrama de un banco de filtros paso banda que permita la obtención de $X_n[k]$.*

5. *¿Es posible obtener la autocorrelación localizada a partir del módulo de la DFT localizada, $|Xn[k]|$, $k = 0, ...N-1$? Justifique la respuesta.*

Ejercicio 2. *Una señal de voz $x[n]$ puede modelarse de la forma*

$$x[n] = s[n]f[n]$$

donde $s[n]$ es una señal aleatoria con función densidad de probabilidad de primer orden

$$f_S(s) = ae^{-2|s|} \qquad -\infty < s < \infty$$

y $f[n]$ es una señal que depende del fonema, constante durante la duración de cada uno de los fonemas y que puede presentar dos valores, uno para el caso de fonemas sonoros $f[n] = 1$, mientras que su valor para el caso de fonemas no sonoros es $f[n] = 0,01$. Por simplicidad, se asume que ambos casos (fonemas sonoros o no sonoros) son equiprobables.

La señal se cuantifica con un cuantificador $Q[\cdot]$ uniforme de 8 bits.

1. *Determinar el valor de x_{max} para que el cuantificador tenga una probabilidad de sobrecarga menor del 2%.*

2. *En la situación del apartado anterior, determinar la relación señal a ruido, cuando los fonemas son sonoros.*

3. *En la situación del primer apartado, determinar la relación señal a ruido, cuando los fonemas son no sonoros. Nota: Asuma sólo las aportaciones al error de cuantificación significativas $(P(x[n]) \geq 0,98)$.*

4. *Obtener la relación señal a ruido que se obtendría empleando un cuantificador logarítmico de ley $A = 87,6$.*

5. *Dibujar un diagrama de bloques de un sistema que pueda conseguir reducir la distorsión de cuantificación para esta señal, sin aumentar la tase binaria. Explicar brevemente la idea básica de la propuesta presentada y el porqué se prevé una mejora.*

EXAMEN	9 de Septiembre de 2005
Tratamiento Digital de la Señal II	NoTAS : 19/9
Ingeniería de Telecomunicación (4º curso)	
Puntuación: 5-5	Tiempo: 2 horas 30 minutos

Ejercicio 1.

Sea una señal real x[n], que responde al modelo definido por la ecuación en diferencias

$$x[n]=-a_1\, x[n-1] - a_2\, x[n-2] + w[n],$$

donde $a_1=-3/4$ y $a_2=1/2$ y w[n] es un ruido blanco gaussiano del que se conocen los parámetros estadísticos $E[w[n]]=0$ y $E[w^2[n]]=2$.

1. Identificar el tipo de modelo que mejor se adapta a la señal x[n] y escribir una ecuación en diferencias para la función de autocorrelación $R_{xx}[k]$.
2. Determinar la densidad espectral de potencia $S_{xx}(f)$ de la señal x[n], obtener su valor para las frecuencias normalizadas {f = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4} y dibujar los resultados obtenidos.
3. Calcular el valor de la media y la varianza de la señal x[n].
4. Determinar los valores de la función de autocorrelación de $R_{xx}[k]$, para {k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Dibujar el resultado obtenido.
5. Describir el comportamiento de la función de autocorrelación obtenida. Si la función de autocorrelación es una función oscilante, determinar su frecuencia fundamental. Si es decreciente, determinar el valor de k para el cual la función alcanza un 10% de su valor máximo.

Ejercicio 2.

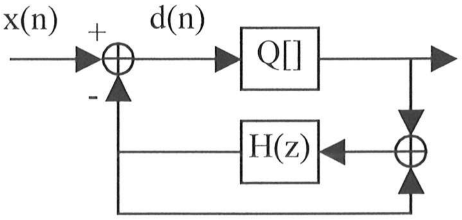
En la figura adjunta se presenta el esquema de un cuantificador diferencial de orden 3, óptimo para la señal x(n), del que se conocen los siguientes datos:

$$H(z)=\frac{5}{3}.z^{-1}-\frac{4}{3}.z^{-2}+\frac{1}{2}.z^{-3}$$

$$E\{d^2(n)\}=\frac{3}{5}$$

Q[] es un cuantificador uniforme de 10 bits, siendo $X_{max}= 4$

1. Termine de dar nombres a las señales involucradas, dibuje el esquema del sintetizador y obtenga la expresión de la ganancia del cuantificador diferencial (justifique la razón de dicha ganancia).
2. Calcule la relación señal a ruido de cuantificación de este sistema (suponga que no hay saturación).
3. Sea $R_x(k)$ la autocorrelacion de la señal x(n). Teniendo en cuenta la información de que dispone, calcule el valor de $R_x(k)$ para aquellos indices k que sea posible hacerlo.



EXAMEN	15 de Junio de 2005
Tratamiento Digital de la Señal II	
Ingeniería de Telecomunicación (4º curso)	
Puntuación: 5-5	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Ejercicio 1. X

La señal aleatoria *x(n)* viene dada por la siguiente expresión, donde ϕ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo *[0, 2π)*, y *w(n)* es una secuencia de ruido blanco y gaussiano de potencia unidad e independiente de la variable ϕ. ϕ

$$x(n) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \phi\right) + w(n)$$

1. Obtener la autocorrelación y la densidad espectral de potencia (en función de la frecuencia normalizada f) de x(n).
2. Obtenga los coeficientes de los filtros de error de predicción de ordenes 1, 2, 3 y 4 que minimizan la potencia de dicho error.
3. Calcule las potencias del error de predicción obtenidos con los filtros del apartado anterior, así como la densidad espectral de potencia de la señal error de predicción del filtro de orden 2, y represéntela gráficamente.
4. Si incrementáramos el orden del predictor indefinidamente indique el límite de la potencia de dicho error y cual sería la respuesta del filtro de error de predicción correspondiente. Razone su contestación.
5. Obtener la Densidad espectral de potencia de la señal x(n), basada en su modelo AR(2), indicando el valor de frecuencia en que alcanza su máximo. Represéntela gráficamente y compárela con la original.

Ejercicio 2. X

En este ejercicio se va a realizar una simulación de un sistema de modulación delta con y sin adaptación. Para ello, se va a utilizar una señal de prueba

$$x(t) = A\, sen(2\pi f_x t)$$

donde A=10 es la amplitud de la señal y f_x = 1Hz es la frecuencia de la señal. La señal es muestreada con una frecuencia de 32 muestras/segundo y la simulación se va a realizar sobre un intervalo de tiempo de 0,5 segundos ($0 \le t \le 0{,}5$).

En el caso de la simulación del modulador delta sin adaptación, utilice un valor para el nivel de reconstrucción $\Delta = 1$, mientras que para el modulador delta con adaptación, utilice el siguiente algoritmo (Sklar 1988):

$$\Delta[n] = \begin{cases} \left|\Delta[n-1]\right| \dfrac{\hat{d}[n] + 0{,}5\,\hat{d}[n-1]}{\hat{d}[n]} & si \quad \Delta[n-1] \ge \Delta_{\min} \\ \Delta_{\min} & si \quad \Delta[n-1] < \Delta_{\min} \end{cases}$$

donde $\Delta[n]$ es el nivel de reconstrucción, $\hat{d}[n] = \pm 1$ es la señal binaria cuantificada que se envía al canal y $\Delta_{\min} = \dfrac{1}{8}$.

1. Dibujar el diagrama de bloque del transmisor y receptor de un modulador delta y de un modulador delta adaptativo. Asuma que el coeficiente del predictor es igual a 1: ($\tilde{x}[n] = \hat{x}[n-1]$).
2. Realizar la simulación del modulador delta sin adaptación y dibujar la señal reconstruida en el receptor junto a la señal original muestreada, asumiendo que no hay errores de canal.
3. Realizar la simulación del modulador delta con adaptación y dibujar la señal reconstruida en el receptor junto a la señal original muestreada, asumiendo que no hay errores de canal.
4. Calcular la relación señal a ruido (en dB) para los casos de los dos apartados anteriores.
5. Calcular la relación señal a ruido (en dB) que se obtendría con un cuantificador uniforme que suministre la misma tasa binaria que el modulador delta, suponiendo que el ruido está uniformemente distribuido, y que se utiliza el mayor número de niveles de cuantificación posible compatible con un muestreo eficiente de la señal.

Nota: Considere que el filtro reconstructor parte de reposo: condiciones iniciales nulas.

$\hat{d}(-1) = 1$

$\hat{x}(-1) = -0{,}1$

$\Delta(-1) = 1$

40 4º TEC-SOP. 0'03F

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación.

EXAMEN DE TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL-II. Málaga, 9 de septiembre de 2004
4º Curso de Ingeniería de Telecomunicación.

Puntuación: 5-5 **Tiempo: 2h. 30m.**

Ejercicio 1. Estimación de parámetros

Para la estimación un parámetro m se dispone de dos observaciones incorreladas, x0 y x1, y con función densidad de probabilidad conocida:

$$f_{x0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} \qquad \forall m$$

$$f_{x1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} & m < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{8}} & m \geq 0 \end{cases}$$

El objetivo de este ejercicio es la elección del mejor estimador posible que se pueda encontrar, así como valorar sus ventajas e inconvenientes. Para ello, se van a estudiar los siguientes cinco estimadores de la media:

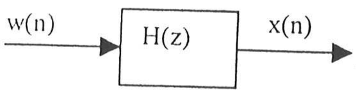
$$\hat{m}_0 = x_0\,; \qquad \hat{m}_1 = \frac{x_0 + x_1}{2}; \qquad \hat{m}_2 = \frac{2x_0 + x_1}{3}; \qquad \hat{m}_3 = \frac{x_0 + 2x_1}{3}; \qquad \hat{m}_4 = \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{2}$$

1. Determinar el sesgo de los cinco estimadores propuestos.
2. Determinar la varianza de los cinco estimadores propuestos.
3. Dibuje (en función de m), la varianza de los cinco estimadores propuestos.
4. Responda a las siguientes cuestiones y explique su respuesta de forma cualitativa.
   (a) ¿Es mejor el estimador m1 que el m0, para todo valor de m?
   (b) ¿Es mejor el estimador m2 que el m1, para todo valor de m?
   (c) ¿Es mejor el estimador m3 que el m1, para todo valor de m?
   (d) ¿Es mejor el estimador m4 que el m1, para todo valor de m?

Ejercicio 2. Cuantificación

En la figura adjunta, el filtro tiene una función de transferencia $H(z)=1+z^{-1}+z^{-2}$.

w(n) es una secuencia de ruido con función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [-1, 1], e independencia estadística entre sus muestras (para k≠n, w(n) es estadísticamente independiente de w(k)).



X_M: → se calcula x no w !!! nivel de saturación ¿?

1. Obtener la relación señal a ruido de cuantificación, si la señal x(n) es procesada por un cuantificador uniforme de 8 bits, cuyo nivel de saturación (x_M) es el mínimo posible, condicionado a que la probabilidad de saturación sea nula.
2. Idem que 1) pero usando un cuantificador logarítmico de ley A (A=100):

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{A.|x|.sig(x)}{1+\ln(A)}, & 0 \leq |x| \leq \dfrac{x_M}{A} \\ x_M \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A.|x|}{x_M}\right).sig(x)}{1+\ln(A)}, & \dfrac{x_M}{A} \leq |x| \leq x_M \end{cases}$$

3. Dibuje y explique el esquema de un cuantificador diferencial.
4. Obtenga los coeficientes del predictor óptimo de orden 3 cuando se aplica la señal x(n) al cuantificador, y la ganancia lograda con este esquema diferencial.

(32) 4º TEL. SUP 0'09 €

EXAMEN	16 de Diciembre de 2003
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 5–5	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

X **Ejercicio 1.** *Se desea estimar la señal $d[n]$ mediante filtrado de la señal $x[n]$:*

$$\hat{d}[n] = \sum_{i=0}^{p} a_i x[n-i]$$

Se define el error cuadrático:

$$\xi = \sum_{n=a}^{b} (d[n] - \hat{d}[n])^2$$

1. *Obtenga razonadamente la expresión de los coeficientes que minimizan el error cuadrático.*

Sea:

$$d[0] = 1,\ d[1] = -2,\ d[2] = 3,\ d[3] = -4,\ d[4] = 5,$$
$$x[0] = 1,\ x[1] = -1,\ x[2] = -1,\ x[3] = -1,\ x[4] = 1,$$
$$a = 1,\ b = 4,\ p = 1$$

2. *Calcule el valor de lo coeficientes según el criterio anterior.*

3. *Repita el punto 2, para $a = 0$, $b = 5$. Asuma nulas las muestras de las señales que necesite y no se le hayan dado.*

4. *Comente las diferencias que existen entre los procedimientos seguidos en los puntos 2 y 3. ¿Cuál le parece mejor?*

X **Ejercicio 2.** *Una señal $x[n]$, con media cero y función densidad de probabilidad triangular y valor máximo $max(x(t)) = 10$ se convierte en una señal digital al pasar por un cuantificador no uniforme, con niveles de decisión $\{x_i = -7, -3, -1, 0, 1, 3, 7\}$. Los niveles de reconstrucción son elegidos de forma que estén situados en el centro de cada intervalo de posibles valores de x, salvo los niveles de reconstrucción extremos $\hat{x}_{-4}$ y $\hat{x}_4$, que deberán optimizarse.*

Se pide:

1. *Determine el valor de los niveles de reconstrucción $\hat{x}_{-4}$ y $\hat{x}_4$, para que el error cuadrático medio en sus intervalos sea el mínimo posible.*

2. *Calcule el valor cuadrático medio del error de cuantificación.*

3. *Calcule la relación señal a ruido de cuantificación.*

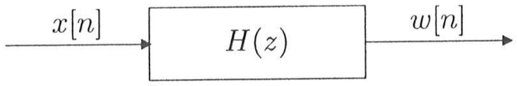
4. *Compare los resultados obtenidos con la que se obtendría con la fórmula aproximada para cuantificador uniforme en todo el intervalo. Explique cualitativamente el resultado obtenido.*

EXAMEN	21 de Diciembre de 2004
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 5–5	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Ejercicio 1. *Predicción*

Un sistema LTI se caracteriza por una respuesta en frecuencia $H(z)$:

$$H(z) = -3 + z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3}$$



1. *Mediante el algoritmo de Schur-Cöhn compruebe si admite filtro inverso causal y estable. Cuando se hace pasar cierta señal aleatoria $x(n)$ por el filtro $H(z)$ se obtiene a la salida ruido blanco de potencia igual a 2.*
2. *Obtener la autocorrelación de la señal $x(n)$*
3. *Obtenga los coeficientes de los filtros de error de predicción óptimos de orden 4, 3, 2 y 1 e indique en cada caso la potencia del error de predicción*
4. *¿Qué modelo es apropiado para la señal $x(n)$?*
5. *¿Que ganancia tendría un cuantificador diferencial que usara el predictor de orden 3?*

Ejercicio 2. *Cuantificación*

El objetivo de este problema es optimizar el diseño de un cuantificador de cuatro niveles (2 bits), para una fuente de información estacionaria con función densidad de probabilidad conocida

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-2|x|} & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Este problema consta de siete apartados, los tres primeros son de carácter teórico y permiten obtener las expresiones necesarias para resolver el resto del ejercicio. El apartado cuarto inicializa un método numérico iterativo para optimizar el diseño del cuantificador, mientras que los tres últimos apartados realizan el primer ciclo de optimización.

El cuantificador es simétrico alrededor del valor $x = 0$ y, por ello, sólo es necesario optimizar el valor de uno de los niveles de decisión x_1 y de dos niveles de reconstrucción y_1 e y_2, que se utilizan cuando la señal tiene valores positivos.

1. *Determinar la potencia media del error de cuantificación D, en función de x_1, y_1 e y_2.*

2. *Suponiendo que x_1 es conocido, determinar la expresión de los valores de y_1 e y_2 que minimizan el error de cuantificación (simplificar al máximo).*

3. *Suponiendo que y_1 e y_2 son conocidos, determinar la expresión de los valores de x_1 que minimiza el error de cuantificación (simplificar al máximo).*

4. *Suponiendo que los valores de x_1, y_1 e y_2 corresponden a un cuantificador uniforme adaptado al rango de valores de x, calcule la potencia media del error de cuantificación D.*

5. *Suponiendo que x_1 es el valor obtenido en el apartado anterior, calcule los valores de y_1 e y_2 optimizados según la fórmula que haya obtenido en el apartado 2.*

6. *Con los valores obtenidos en el apartado anterior, determine un nuevo valor de x_1, utilizando la fórmula que haya utilizado en el apartado 3.*

7. *Calcule el error de cuantificación con los nuevos valores de x_1, y_1 e y_2.*

Nota: utilice, si lo considera conveniente, las siguientes expresiones matemáticas:

$$\int (x-a)^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1 - 4ax - 2a + 2a^2)$$

Regla de Leibniz generalizada:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x) dx = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda} dx + f(\lambda, b(\lambda)) \frac{db(\lambda)}{d\lambda} - f(\lambda, a(\lambda)) \frac{da(\lambda)}{d\lambda}$$

EXAMEN	19 de Diciembre de 2001
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 3–2–5	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Ejercicio 1. *Conteste brevemente a las siguientes cuestiones:*

1. *¿Qué relación hay entre la función de autocorrelación local y la transformada local de Fourier?*

2. *¿Qué inconvenientes tiene la elección de una ventana de pequeño tamaño (3 ms) para la estimación de la varianza de la señal, que va a ser utilizada en un codificador adaptativo.*

3. *Determine la expresión de la función de autocorrelación recursiva de una señal MA(Q).*

Ejercicio 2. *Calcular los coeficientes* ($a[n]$) *de la estructura directa de un filtro FIR descrito por una celosía con coeficientes de reflexión*

$$k_i = \{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\}$$

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 8 niveles, con niveles de decisión*

$$x_n = n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 4$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, ..., \pm 4$$

para una señal $x[n]$ *con función densidad de probabilidad*

$$p(x) = a(25 - x^2), \qquad |x| \leq 5,$$

siendo a *una constante a determinar.*

1. *Dibujar la función de cuantificación y determinar la media y varianza de la señal* $x[n]$

2. *Determinar la media y varianza del ruido de cuantificación granular.*

3. *Determinar la media y varianza del ruido de cuantificación de sobrecarga.*

4. *Calcular la relación señal a ruido de cuantificación.*

5. *Describir un método para mejorar la relación señal a ruido anterior, empleando el cuantificador descrito, y pudiendo escalar la señal, multiplicándola por una constante.*

EXAMEN	7 de Septiembre de 2001
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 5–5	Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1. *Una señal AR tiene una función de autocorrelación, cuya transformada Z viene dada por la expresión:*

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{8}{8z^4 - 20z^3 + 25z^2 - 10z + 2}$$

y se ha generado al hacer pasar ruido blanco gaussiano, de media cero y varianza 1 por un filtro lineal e invariante con función de transferencia $H(z)$.

1. *Determinar las ecuaciones de Schür–Cohn para calcular los coeficientes de reflexión de un filtro en celosía, a partir de una estructura directa FIR. (Esta pregunta es un ejercicio de teoría). Se piden las ecuaciones con variable transformada* $\mathcal{Z}$.
2. *Determinar la estabilidad de* $H(z)$.
3. *Calcular la transformada* $\mathcal{Z}$ $(G(z))$ *de un filtro FIR descrito por una celosía con coeficientes de reflexión*
$$k_i = \{1/2, 1/2, 1/5, 9/10\}$$

.

Ejercicio 2. *Un sistema de cuantificación diferencial utiliza el predictor de orden 1, definido por*

$$\hat{x}[n] = ax[n-1]$$

donde $x[n]$ *es una señal estacionaria, de media cero, varianza* σ_x^2 *y función de autocorrelación conocida, y* a *una constante que se desea elegir.*

1. *Dibujar un diagrama de bloques de la configuración diferencial del transmisor y del receptor, indicando brevemente el funcionamiento teórico, así como el objetivo de esta configuración.*
2. *Calcular la varianza del error de predicción, definido por* $e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$, *en función del valor de* a.
3. *Determinar los valores de* a *que llevan a una ganancia de la configuración diferencial mayor de 1, suponiendo despreciable el error de cuantificación (comparado con la energía de la señal diferencia).*
4. *Calcular el valor óptimo de* a, *así como la varianza del error de predicción en este caso (simplifique la expresión al máximo).*
5. *Si en vez de una señal estacionaria, dispone de una señal de media cero y varianza aleatoria (considere la varianza como una variable aleatoria uniforme, con rango de valores comprendidos entre* $R_x[1]$ *y* $3R_x[1]$, *donde* $R_x[n]$ *es la función de autocorrelación), calcule la probabilidad de que el sistema tenga ganancia negativa, para un valor de* a *optimizado para la varianza media.*

EXAMEN	28 de Diciembre de 2000
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 2,5–3,5–4	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Ejercicio 1. *Elija una de las 4 posibles respuestas a las siguientes cuestiones. Tenga en cuenta que si contesta de forma correcta obtendrá 0.5 puntos por cuestión, pero que si se equivoca obtendrá -0.5 puntos.*

1. *¿Qué modelo se adapta mejor a una señal recibida por un radar, compuesta de una sinusoide de alta frecuencia más ruido blanco?*
   - *(a) AR(2)*
   - *(b) MA(2)*
   - *(c) ARMA(1,1)*
   - *(d) Por igual, el AR(2) y el MA(2)*

2. *El modelo acústico de producción de voz requiere un sistema de orden 10 para modelar la mayoría de los sonidos, excepto, tal vez, para las consonantes nasales, para las que*
   - *(a) Es suficiente el modelo de orden 10.*
   - *(b) Se requiere un modelo de orden infinito.*
   - *(c) Se puede utilizar el modelo de orden 10, junto con un modelo en paralelo de orden 2 (solamente), para modelar la cavidad nasal.*
   - *(d) Ninguna respuesta de las anteriores es esencialmente correcta.*

3. *Para una señal estacionaria en sentido amplio, con función densidad de probabilidad uniforme, ¿qué cuantificador dará mejor relación señal a ruido?*
   - *(a) Uniforme.*
   - *(b) No uniforme, optimizado numéricamente para la señal.*
   - *(c) Logarítmico.*
   - *(d) Adaptativo hacia atrás.*

4. *¿Es posible estimar la función de autocorrelación de una señal, a partir del cálculo del módulo de la transformada local de Fourier?*
   - *(a) No, porque no tiene nada que ver.*
   - *(b) No, porque se necesita también la fase.*
   - *(c) No, porque no se obtienen frecuencias equiespaciadas.*
   - *(d) Sí.*

5. *Un cuantificador diferencial, utilizado con una señal estacionaria, y optimizado para ella ¿puede producir una ganancia diferencial negativa.*
   - *(a) No, en ningún caso.*
   - *(b) Sí, si la señal cambia estadísticamente.*
   - *(c) Sí, en el caso de que la señal tenga ceros en el espectro muy agudos, que no se modelan bien con un sistema AR.*

(d) *Sí, en el caso de que la señal tenga polos en el espectro muy agudos, que no se modelan bien con un sistema AR.*

Ejercicio 2. *Dibujar, a nivel de diagrama de bloques, el esquema de cada uno de los canales de un banco de filtros (centrado en la frecuencia f_0), que calcular la transformada local de Fourier. (Asuma filtros ideales).*

1. *Para calcular su parte real e imaginaria, utilizando filtros paso bajo.*
2. *Para calcular su parte real e imaginaria, utilizando filtros paso banda.*
3. *Para calcular su módulo y fase, utilizando filtros paso bajo.*
4. *Para calcular su módulo y fase, utilizando filtros paso banda.*
5. *En los apartados anteriores, se asumió que los filtros son ideales. ¿Es un requisito necesario buscar filtros lo más ideales posibles (orden alto) o se pueden obtener buenos resultados con otra estrategia? Si no se puede, explique el porqué, y si se puede, explique que estrategia se podría sugerir.*

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 5 bits, con niveles de decisión*

$$x_n = \frac{n}{4}, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ..., 16$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm1, \pm2, ..., \pm16$$

para una señal $x[n]$ con función densidad de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} a(4 - 0,25|x|), & |x| \leq 16, \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$

siendo a una constante a determinar.

1. *Dibujar la función densidad de probabilidad de la señal, señalando los niveles de decisión. ¿Es razonable la hipótesis de ruido uniformemente distribuido?*
2. *Determinar la varianza del ruido de cuantificación (separando granular y de sobrecarga), así como la relación señal a ruido.*
3. *A la vista de los resultados obtenidos, ¿presenta el cuantificador algún problema grave? Si lo tiene, proponga una solución. Si no lo tiene, explique brevemente el porqué.*

EXAMEN	7 de Septiembre de 2000
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 2,5–4,5–3	Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Ejercicio 1. *Elija una de las 4 posibles respuestas a las siguientes cuestiones. Tenga en cuenta que si contesta de forma correcta obtendrá 0.5 puntos por cuestión, pero que si se equivoca obtendrá -0.5 puntos.*

1. *¿Qué modelo se adapta mejor a una señal compuesta ruido blanco que ha pasado por un filtro estrecho de banda eliminada?*

   (a) *AR(2)*
   (b) *MA(2)* → ya que se ha eliminado banda, para mejor?
   (c) *ARMA(1,1)*
   (d) *Por igual, el AR(2) y el MA(2)*

2. *¿Cuál de las siguientes ventanas tiene más resolución temporal y se puede utilizar para predecir mejor cambios bruscos de la señal?*

   (a) *Hamming*
   ? (b) *Rectangular*
   (c) *Ambas (Hamming y Rectangular) tienen propiedades similares*
   (d) *Triangular*

3. *Para una señal cuya energía varíe periódicamente, se puede obtiener un menor ruido de cuantificación utilizando un cuantificador:*

   (a) *Uniforme*
   (b) *de LLoyd-Max, una vez calculada su función densidad de probabilidad*
   (c) *Logarítmico*
   (d) *Adaptativo*

4. *¿Es posible obtener una buena estimación del espectro de una señal compuesta por ruido blanco que ha pasado por un filtro estrecho de banda eliminada con un sistema MA?*

   (a) *No, porque el modelo no es aplicable*
   (b) *Sí, siendo necesario un orden mayor que con el sistema AR.*
   (c) *Sí, siendo necesario un orden igual que con el sistema AR.*
   (d) *Sí, siendo necesario un orden menor que con el sistema AR.*

5. *La frecuencia del primer formante de la voz, por regla general, ¿que relación tiene respecto al tipo de personas?*

   (a) *En los hombres es mucho mayor que en las mujeres.*
   (b) *Los hombres y las mujeres no presentan diferencias significativas.*
   (c) *En los hombres es mucho menor que en las mujeres.*
   (d) *En los niños es mucho mayor.*

Ejercicio 2. *Se dispone de la siguiente secuencia de temperaturas, que corresponden a la temperatura máxima de cada mes durante dos años:*

$$13.4, 14.5, 14.3, 18.7, 23.3, 23.8, 26.1, 25.5, 24.1, 18.9, 17.4, 13.6,$$
$$13.7, 14.2, 14.4, 18.6, 23.6, 24.0, 25.6, 25.4, 24.2, 18.4, 16.6, 14.9.$$

Datos que se pretenden modelar con un sistema AR, cuyo orden debe ser menor que 3.

1. *Determinar los coeficientes óptimos del predictor, para los predictores de orden 1, 2 y 3.*
2. *Calcular la potencia media del error de predición (P_e), suponiendo que los coeficientes son óptimos.*
3. *Comparar cualitativamente los resultados obtenidos, y tomar una decisión razonada acerca de cuál sistema debería utilizarse.*
4. *Modificar el sistema de predicción (pero sin utilizar predictores de orden mayor de 3) para incluir en el modelo la variación anual cíclica de la temperatura. [Nota: debe proponerse una solución, utilizando diagramas de bloques, explicando brevemente las ideas utilizadas y su porqué]*

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 8 niveles, con niveles de decisión*

$$x_n = \frac{n}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., 4$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, ..., \pm 4$$

para una señal $x[n]$ con función densidad de probabilidad

$$p(x) = ae^{-2|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

siendo a una constante a determinar.

1. *Determinar la varianza del ruido de cuantificación (separando granular y de sobrecarga).*
2. *Calcular la relación señal a ruido de cuantificación (en dB).*

EXAMEN	27 de Junio de 2000
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 2,5–4–3,5	Tiempo: 2 horas y 45 minutos

Ejercicio 1. *Elija una de las 4 posibles respuestas a las siguientes cuestiones. Tenga en cuenta que si contesta de forma correcta obtendrá 0.5 puntos por cuestión, pero que si se equivoca obtendrá -0.5 puntos.*

1. *¿Qué modelo se adapta mejor a una señal compuesta por la suma de una sinusoide y ruido blanco gaussiano?*
   - (a) *AR(2)*
   - (b) *MA(2)*
   - (c) *ARMA(1,1)*
   - (d) *Por igual, el AR(2) y el MA(2)*
2. *¿Cuál de las siguientes ventanas es más adecuada para estimar el tono fundamental de una señal de voz?*
   - (a) *3 ms*
   - (b) *10 ms*
   - (c) *30 ms*
   - (d) *Ninguna de las anteriores es adecuada*
3. *Señale una ventaja de la ventana de Hamming sobre la rectangular en el análisis de señales de voz, ambas con la misma longitud.*
   - (a) *Tiene mayor resolución temporal*
   - (b) *Tiene mayor resolución espectral*
   - (c) *Es equivalente a una ventana de mayor longitud*
   - (d) *Ninguna de las respuestas anteriores es correcta*
4. *Para cuantificar una señal estacionaria de media distinta de cero y obtener el menor ruido de cuantificación posible, utilizaría:*
   - (a) *Un cuantificador logarítmico de ley A (A=87.56)*
   - (b) *Un cuantificador logarítmico de ley A (A=1)*
   - (c) *Un cuantificador de Lloyd–Max*
   - (d) *Un cuantificador adaptativo*
5. *¿Cuál de los fonemas que se indican a continuación tiene menor energía?*
   - (a) */a/*
   - (b) */t/*
   - (c) */s/*
   - (d) */m/*

EXAMEN	27 de Junio de 2000
E.T.S.I. de Telecomunicación	
Tratamiento Digital de la Señal II	
Puntuación: 2,5–4–3,5	Tiempo: 2 horas y 45 minutos

Ejercicio 1. *Elija una de las 4 posibles respuestas a las siguientes cuestiones. Tenga en cuenta que si contesta de forma correcta obtendrá 0.5 puntos por cuestión, pero que si se equivoca obtendrá -0.5 puntos.*

[0,5 puntos por cuestión, si es correcta. -0,5 puntos si es incorrecta. Los puntos negativos se acumulan en la suma total, salvo que la nota final sea inferior a 0].

1. *¿Qué modelo se adapta mejor a una señal compuesta por la suma de una sinusoide y ruido blanco gaussiano?*

   (a) *AR(2)* √
   (b) *MA(2)*
   (c) *ARMA(1,1)*
   (d) *Por igual, el AR(2) y el MA(2)*

2. *¿Cuál de las siguientes ventanas es más adecuada para estimar el tono fundamental de una señal de voz?*

   (a) *3 ms*
   (b) *10 ms*
   (c) *30 ms* √
   (d) *Ninguna de las anteriores es adecuada*

3. *Señale una ventaja de la ventana de Hamming sobre la rectangular en el análisis de señales de voz, ambas con la misma longitud.*

   (a) *Tiene mayor resolución temporal*
   (b) *Tiene mayor resolución espectral*
   (c) *Es equivalente a una ventana de mayor longitud*
   (d) *Ninguna de las respuestas anteriores es correcta* √

4. *Para cuantificar una señal estacionaria de media distinta de cero y obtener el menor ruido de cuantificación posible, utilizaría:*

   (a) *Un cuantificador logarítmico de ley A (A=87.56)*
   (b) *Un cuantificador logarítmico de ley A (A=1)*
   (c) *Un cuantificador de Lloyd–Max* √
   (d) *Un cuantificador adaptativo*

5. *¿Cuál de los fonemas que se indican a continuación tiene menor energía?*

   (a) */a/*
   (b) */t/* √
   (c) */s/*

Ejercicio 2. *Se utiliza un predictor lineal del tipo*

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n-5] + \beta x[n-10]$$

para una señal de media cero y con función de autocorrelación

$$r[k] = e^{-ak}\cos(\pi k/5) \qquad a = 0.98$$

1. *Determinar los coeficientes óptimos del predictor (α y β).*
2. *Calcular la potencia media del error de predición (P_e), suponiendo que los coeficientes son óptimos.*
3. *Compare la potencia obtenida en el apartado anterior con la que se obtendría con un sistema de orden inferior.*
4. *Si a la señal se le añade un ruido blanco gaussiano de media cero y varianza σ_n^2, determinar el rango de valores de σ_n^2, para que el predictor tenga todos sus ceros dentro del círculo unidad (sistema inverso estable).*

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 16 niveles, con niveles de decisión*

$$x_n = \frac{n}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., 8$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, ..., \pm 8$$

para una señal $x[n]$ con función densidad de probabilidad

$$p(x) = a(4 - x^2), \qquad |x| \leq 2,$$

siendo a una constante a determinar.

1. *Dibujar la función de cuantificación y determinar la media y varianza de la señal $x[n]$*
2. *Determinar la media y varianza del ruido de cuantificación (separando granular y de sobrecarga), así como la relación señal a ruido.*
3. *Suponiendo que los valores de los niveles de decisión y de reconstrucción son divididos por un factor de 2, repetir los cálculos del apartado anterior.*
4. *Comparar la varianza del ruido de cuantificación del apartado 3, resolviendo el problema de dos formas diferentes:*
   (a) *Suponiendo que el ruido tiene función densidad de probabilidad uniforme*
   (b) *Resolviendo el problema rigurosamente*

   ¿es razonable la hipótesis de ruido uniformemente distribuido?

(d) /m/

Ejercicio 2. *Se utiliza un predictor lineal del tipo*

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n-5] + \beta x[n-10]$$

para una señal de media cero y con función de autocorrelación

$$r[k] = e^{-ak}\cos(\pi k/5) \qquad a = 0.98$$

1. *Determinar los coeficientes óptimos del predictor (α y β).*

Solución: El método más simple para resolver este problema es considerar que la señal puede diezmarse previamente por 5, obteniendo un predictor clásico de orden 2, con ecuaciones

$$\hat{y}[n] = \alpha y[n-1] + \beta y[n-2], \quad \textit{con} \quad r_y[k] = e^{-5ak}\cos(\pi k)$$

También puede resolverse sin diezmar la secuencia, con un procedimiento idéntico, salvo que $r_y[1]$ es $r[5]$ y $r_y[2]$ es $r[10]$. Aquí se presenta esta última solución, por ser la más probable en la clase.

La señal de error de predicción es:

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] - \alpha x[n-5] - \beta x[n-10]$$

Su potencia media del error es:

$$E_{rms} = E[e^2[n]] = E[e[n](x[n] - \hat{x}[n])].$$

Los coeficientes óptimos se calculan derivando E_{rms} con respecto a los coeficientes e igualando a cero, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta E_{rms}}{\delta\alpha} \\ \frac{\delta E_{rms}}{\delta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2E[e[n]x[n-5] \\ -2E[e[n]x[n-10] \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} r[5] - \alpha r[0] - \beta r[5] \\ r[10] - \alpha r[5] - \beta r[0] \end{bmatrix},$$

donde se ha supuesto que $r[-k] = r[k]$,

Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones: [0,25 puntos]

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[5] \\ r[5] & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r[5] \\ r[10] \end{bmatrix}$$

obteniéndose los coeficientes óptimos: [0,25 puntos]

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2[0] - r^2[5]} \begin{bmatrix} r[5](r[0] - r[10]) \\ r[0]r[10] - r^2[5] \end{bmatrix}$$

Para obtener valores, puede sustituirse directamente o, teniendo en cuenta el comportamiento exponencial de la función de autocorrelación:

$$r[0] = 1 + c \qquad r[5] = -k \qquad r[10] = k^2,$$

con $k = e^{-5a}$ y $c = 0$, en este caso, obteniéndose

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{1-k^2} \begin{bmatrix} -k(1+c-k^2) \\ (1+c)k^2 - k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k+\beta \\ \frac{ck^2}{1-k^2} \end{bmatrix} \stackrel{c=0}{=} \begin{bmatrix} -k \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k = 0.0074$$

[Si el resultado correcto está bien obtenido, sin los valores intermedios, valorar con 1 punto también, en todos los ejercicios, salvo errores graves]

2. *Calcular la potencia media del error de predición (P_e), suponiendo que los coeficientes son óptimos.*

   [1 punto]

   Solución: Hay que determinar el valor de E_{rms} que, substituyendo en la fórmula anterior, da

$$E_{rms} = E[x[n](x[n] - \hat{x}[n])] = r[0] - \alpha r[5] - \beta r[10] = 1 - k^2 + c\frac{k^3}{1-k} \stackrel{c=0}{=} 1 - k^2$$

3. *Compare la potencia obtenida en el apartado anterior con la que se obtendría con un sistema de orden inferior.*

   [1 punto, por la explicación o por la resolución, en caso de obtener el mismo resultado].

   Solución: Se obtiene el mismo resultado con un predictor de orden menor, ya que β es cero.

4. *Si a la señal se le añade un ruido blanco gaussiano de media cero y varianza σ_n^2, determinar el rango de valores de σ_n^2, para que el predictor tenga todos sus ceros dentro del círculo unidad (sistema inverso estable).*

   [1 punto]

   Solución: Para este caso, se introdujo la constante c en la solución del problema, que es igual al valor de σ_n^2. Ahora, el predictor de orden 2 se obtiene de forma análoga, pero $c \neq 0$.

   [solución similar 0,5 puntos]

   El sistema de orden 1 es siempre estable, mientras $|k| < 1$, y el de orden 2 requiere que $|\beta| < 1$,

   [razonamiento: 0,25 puntos]

   que lleva a:

$$\left|\frac{ck^2}{1-k^2}\right| < 1 \Rightarrow |c| < \left|\frac{1}{k^2} - 1\right| = 1.8 \cdot 10^4$$

!! no se puede despreciar $|\sigma_n^2|$ en denominador

   [0,25 puntos, c es el valor máximo posible de σ_n^2.]

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 16 niveles, con niveles de decisión*

$$x_n = \frac{n}{2}, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ..., 8$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm1, \pm2, ..., \pm8$$

para una señal $x[n]$ con función densidad de probabilidad

$$p(x) = a(4 - x^2), \qquad |x| \leq 2,$$

siendo a una constante a determinar.

1. *Dibujar la función de cuantificación y determinar la media y varianza de la señal $x[n]$*

   [Dibujo correcto, con todos los valores: 0,25 puntos].

   [determinación de a: 0,25 puntos, media: 0,25 puntos, varianza: 0,25 puntos, TOTAL: 1 punto]

   Solución: [dibujo de la escalera de cuantificación definida]

   Primero tenemos que calcular la constante a para que tengamos una función densidad de probabilidad

$$\int_{-2}^{2} p(x)\, dx = 2a \int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx = 2a \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) = 2a \left(8 \cdot \frac{2}{3}\right) = 1,$$

$$a = \frac{3}{32}$$

   La media $m_X = 0$, debido a que $p(x)$ es par.

   La varianza es

$$\sigma_X^2 = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{3}{32}(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{3}{32}(4 - x^2)\, dx = I(0,4) = \frac{4}{5},$$

   donde la expresión de $I(0,4)$ se muestra más adelante, ya que es una primitiva de uso frecuente en este ejercicio.

   Es posible que los alumnos calculen otras primitivas similares. En este caso, valorar el resultado final, ya que es casi imposible comprobar todas las primitivas posibles].

2. *Determinar la media y varianza del ruido de cuantificación (separando granular y de sobrecarga), así como la relación señal a ruido.*

   Solución:

   La media del ruido de cuantificación es cero por simetría de la función densidad de probabilidad y de la función de cuantificación.

   [Cálculo de la varianza del ruido: 0,5 puntos, realizando las integrales, si se utiliza aproximación de ruido uniformemente distribuido, el resultado es similar, pero la hipótesis no está justificada: 0,25 puntos. Cálculo de la relación señal a ruido: 0.25 puntos. Razonamiento de que todo el ruido es granular y no hay sobrecarga: 0,25 puntos. TOTAL: 1 punto].

   La varianza es

$$\sigma_q^2 = 2\sum_{n=1}^{8} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - y_n)^2 p(x) dx = 2\sum_{n=1}^{4} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - y_n)^2 p(x) dx,$$

   por ser $p(x)$ una función acotada entre -2 y 2.

$$\sigma_q^2 = 2(I(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + I(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + I(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}) + I(\frac{7}{4}, \frac{1}{2})),$$

   donde la primitiva $I(a, \Delta)$ es

$$
\begin{aligned}
I(a,\Delta) &= \int_{a-\frac{\Delta}{2}}^{a+\frac{\Delta}{2}} (x-a)^2 p(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 p(x+a)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{3}{32}(4-(x+a)^2)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{3}{32}(4-x^2-a^2-\underbrace{2ax}_{0,\text{por ser impar}})\,dx \\
&= \frac{3}{16}\left((4-a^2)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\frac{1}{3}-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\left(\frac{(4-a^2)}{3}-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\frac{1}{5}\right),
\end{aligned}
$$

En particular,

$$
I(a,\frac{1}{2}) = \underbrace{\frac{3}{16}}_{2^4}\underbrace{\frac{1}{64}}_{2^6}\left(\frac{4-a^2}{3}-\frac{1}{80}\right) = \frac{3}{1024}\left(\frac{4-a^2}{3}-\frac{1}{80}\right),
$$

$$
I(a,\frac{1}{4}) = \underbrace{\frac{3}{16}}_{2^4}\underbrace{\frac{1}{512}}_{2^9}\left(\frac{4-a^2}{3}-\frac{1}{320}\right) = \frac{3}{8192}\left(\frac{4-a^2}{3}-\frac{1}{320}\right),
$$

Substituyendo,

$$
\sigma_q^2 = 2\frac{3}{1024}\left(\frac{43}{12}-\frac{1}{20}\right) = \frac{3}{2048}\left(43-\frac{1}{5}\right) = \frac{214}{10240} = 0,0209 \approx \frac{1}{50}
$$

$$
\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{48}, \text{ con la hipótesis de ruido uniformemente distribuido}
$$

El cuantificador no tiene sobrecarga, por lo que todo el ruido es granular.

La relación señal a ruido es

$$
\frac{S}{N} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} \approx 40
$$

3. *Suponiendo que los valores de los niveles de decisión y de reconstrucción son divididos por un factor de 2, repetir los cálculos del apartado anterior.*

[En este apartado, es razonable la hipótesis de ruido uniformemente distribuido, porque utilizamos los 16 niveles. En primer lugar se calcula la solución exacta y, en segundo lugar, la aproximación, obteniéndose el mismo resultado, prácticamente. Cualquiera de las dos soluciones: 0,5 puntos. Por el razonamiento de que seguimos sin sobrecarga y el cálculo de la relación señal a ruido: 0,25 puntos. TOTAL: 0,75 puntos]

Solución: En este caso,

La media sigue siendo cero, al igual que en el apartado anterior.

La varianza es ahora

$$
\begin{aligned}
\sigma_q^2 &= 2(I(\frac{1}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{3}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{5}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{7}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{9}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{11}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{13}{8},\frac{1}{4})+I(\frac{15}{8},\frac{1}{4})) \\
&= \frac{3}{4096}\left(8\frac{4}{3}-\frac{1}{8}(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2+15^2)-8\frac{1}{320}\right) = 0.005200
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{192} = 0.005208, \text{ con la hipótesis de ruido uniformemente distribuido}
$$

Sigue sin haber sobrecarga.

La relación señal a ruido es, ahora,

$$\frac{S}{N} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = \frac{4/5}{1/192} = 153.6$$

4. *Comparar la varianza del ruido de cuantificación del apartado 3, resolviendo el problema de dos formas diferentes:*

   (a) Suponiendo que el ruido tiene función densidad de probabilidad uniforme

   (b) Resolviendo el problema rigurosamente

   [En este caso, se debe realizar el tipo de cálculo no realizado en el apartado anterior: 0,5 puntos]

   ¿es razonable la hipótesis de ruido uniformemente distribuido?

   [Se obtiene el mismo resultado, luego la respuesta es SI: 0,25 puntos. Lo era también en el apartado segundo, a la vista de los resultados, aunque la hipótesis era algo dudosa]

Ejercicio 1

Señal estacionaria con $\gamma_x[k] = \beta^{|k|}$, que se introduce en un sistema $H(z)$:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = \alpha \cdot y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha \cdot z^{-1}}$$

$E\{x[n]\} = 0$

1. Determinación de $S_x(z)$: lo más sencillo es aplicar la (RET) transformada z a $\gamma_x[k]$:

$$S_x(z) = TZ\{\gamma_x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^{-k} \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k} \cdot z^{-k} \underset{k'=-k}{=} \sum_{k'=1}^{\infty} (\beta \cdot z)^{k'} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta/z\right)^{k} \underset{(*)}{=} \frac{\beta z}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\left(\frac{\beta}{z}\right)} =$$

$$= \frac{\beta z (1-\beta z^{-1}) + (1-\beta z)}{(1-\beta z)\cdot(1-\beta z^{-1})} = \frac{\beta z - \beta^2 + 1 - \beta z}{(1-\beta z)\cdot(1-\beta z^{-1})} = \boxed{(1-\beta^2)\cdot \frac{1}{1-\beta \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\beta z}}$$

(*): La región de convergencia de la Tz es: $|\beta| < |z| < \frac{1}{|\beta|} \rightarrow$ (sólo tiene sentido si $|\beta| < 1$).

Para establecer el modelo, hay que pensar en el siguiente sistema:

$$w[n] \longrightarrow \boxed{M(z)} \longrightarrow x[n]$$

- $w(n)$ ruido AWGN de potencia σ_w^2:
- $S_x(z) = \sigma_w^2 \cdot M(z) \cdot M^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$

Siendo β real, $(\beta = \beta^*)$, se identifican términos y en consecuencia $M(z) = \frac{1}{1-\beta \cdot z^{-1}}$. Es sobre $M(z)$ donde se mira el modelo de señal, y resulta ser de AR(1).

- Nota: se podría decir que el modelo de señal es AR(1) simplemente porque $\gamma_x[k]$ es una exponencial, y las exponenciales producen modelos AR(1).

2. Se hace lo mismo que en el apartado anterior:

$$S_y(z) = H(z) \cdot M^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \cdot S_x(z) = \boxed{(1-\beta^2) \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1+z}{1-\alpha^* z} \cdot \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\beta z}}$$

En esta ocasión el modelo viene determinado por $M(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-\alpha \cdot z^{-1})\cdot(1-\beta \cdot z^{-1})} \longrightarrow$ ARMA(2,1)

Y a partir de $M(z)$, puede deducirse la siguiente ecuación en diferencias (aplicar Tz^{-1}):

$$M(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} \Rightarrow \boxed{y[n] = (\alpha+\beta)\cdot y[n-1] - \alpha \cdot \beta \cdot y[n-2] + w[n] + w[n-1]}$$

3. Lo más sencillo es aplicar la transformada Z inversa a $S_y(z)$:

$$\gamma_y[k] = TZ^{-1}\left\{S_y(z)\right\} = TZ^{-1}\left\{(1-\beta^2)\cdot\frac{1}{1-\beta z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\beta}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha\cdot z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{z^{-1}-\alpha^*}\right\} =$$

$$= TZ^{-1}\left\{\frac{A_1}{1-\beta\cdot z^{-1}}+\frac{A_2}{z^{-1}-\beta}+\frac{B_1}{1-\alpha\cdot z^{-1}}+\frac{B_2}{z^{-1}-\alpha^*}\right\}$$

Es preciso determinar las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2. Se plantea entonces un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, que puede ser resuelto de muchas maneras. La más sencilla es esta:

$$A_1 = (1-\beta^2)\cdot\left[\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\beta}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{z^{-1}-\alpha^*}\right]\Bigg|_{z=\beta} = (1-\beta^2)\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{1+\beta^{-1}}{1-\alpha\beta^{-1}}\cdot\frac{1+\beta^{-1}}{\beta^{-1}-\alpha^*} = \frac{(1+\beta)^2}{(\beta-\alpha)\cdot(1-\alpha^*\beta)}$$

$$A_2 = (1-\beta)^2\cdot\left[\frac{1}{1-\beta z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{z^{-1}-\alpha^*}\right]\Bigg|_{z=\frac{1}{\beta}} = (1-\beta^2)\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\frac{1+\beta}{\beta-\alpha^*} = \frac{(1+\beta)^2}{(\beta-\alpha^*)\cdot(1-\alpha\beta)} = A_1^*$$

$$B_1 = (1-\beta^2)\cdot\left[\frac{1}{1-\beta z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\beta}\cdot\frac{1+z^{-1}}{z^{-1}-\alpha^*}\right]\Bigg|_{z=\alpha} = (1-\beta^2)\cdot\frac{1}{1-\beta/\alpha}\cdot\frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}-\beta}\cdot\frac{1+\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}-\alpha^*} = \frac{(1-\beta^2)\cdot\alpha(1+\alpha)}{(\alpha-\beta)\cdot(1-\alpha\beta)\cdot(1-|\alpha|^2)}$$

$$B_2 = (1-\beta^2)\cdot\left[\frac{1}{1-\beta\cdot z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\beta}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}\right]\Bigg|_{z=\frac{1}{\alpha^*}} = \ldots = B_1^*$$

Aprovechando que β es real, se cumple que $A_2 = A_1^*$ y $B_2 = B_1^*$, y entonces:

$$\gamma_y[k] = TZ^{-1}\left\{\underbrace{\frac{A_1}{1-\beta z^{-1}}}_{A(z)}+\underbrace{\frac{A_1^*}{z^{-1}-\beta}}_{A^*(z^{-1})}\right\} + TZ^{-1}\left\{\underbrace{\frac{B_1}{1-\alpha z^{-1}}}_{B(z)}+\underbrace{\frac{B_1^*}{z^{-1}-\alpha^*}}_{B^*(z^{-1})}\right\} = TZ^{-1}\left\{A(z)+A^*(z^{-1})\right\} + TZ^{-1}\left\{B(z)+B^*(z^{-1})\right\}$$

Sabiendo (por el apartado 1.) que $TZ\left\{\beta^{|k|}\right\} = \underbrace{\frac{1}{1-\beta z^{-1}}}_{C(z)} + \underbrace{\frac{1}{z^{-1}-\beta}}_{C^*(z^{-1})}$, y con la expresión de $\gamma_y[k]$ anterior, identificando términos se llega a: , ¿?

$$\boxed{\gamma_y[k] = A_1\cdot\beta^{|k|} + B_1\cdot\alpha^{|k|}}$$

4. Es fácil de calcular con el resultado anterior: MAL

$$P_y = \int_{-0,5}^{+0,5} S_y(f)\,df \underset{\text{T.V.I.}}{=} \gamma_y[k]\Big|_{k=0} = A_1 + B_1 = -18,55 + 41,74 = \boxed{23,19}$$

(debe dar ≈ 108)

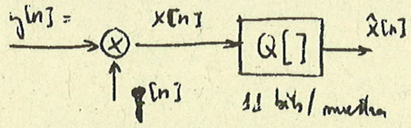
$$A_1(\alpha=0,9,\ \beta=0,6) = \frac{(1+0,6)^2}{(0,6-0,9)\cdot(1-0,9\cdot0,6)} = \frac{2,56}{-0,138} = -18,55$$ (debe dar 131,7)

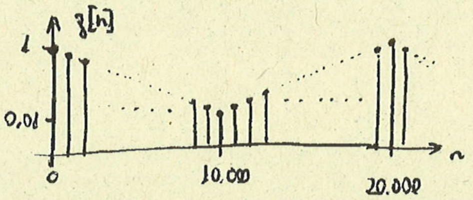
$$B_1(\alpha=0,9,\ \beta=0,6) = \frac{(1-0,6^2)\cdot0,9(1+0,9)}{(0,9-0,6)\cdot(1-0,9\cdot0,6)\cdot(1-0,9^2)} = \frac{1,0944}{0,02622} = 41,74$$ (debe dar −79,6)

o

EJERCICIO 2

Señal estacionaria $y[n]$ que se multiplica por una señal determinista:





$$f_y(y) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{si } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

➧ $g[n]$ tiene una variación muy lenta con n.

1. Cuantificador óptimo en cada instante de tiempo:

Antes de nada, hay que hacer algunas observaciones:

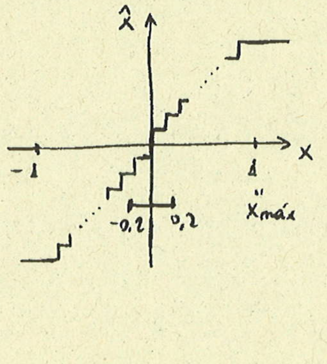
- Si $y[n]$ es estacionaria, $x[n]$ no tiene por qué serlo (aunque $g[n]$ sea determinista).
- El producto de $g[n]$ hace que $x[n]$ cambie su función densidad de probabilidad respecto de $y[n]$. Si $y[n]$ es uniforme en $[-1, 1]$, $x[n]$ también será uniforme pero en un intervalo diferente, entre $-g[n]$ y $g[n]$, de modo que:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot g[n]}, & \text{si } x \in [-g[n], g[n]] \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \longrightarrow \text{¡} f_X(x) \text{ varía dinámicamente con } n\text{!}$$

Por tanto, en cada instante de tiempo n se tendrá un cuantificador óptimo diferente. Pero lo que cumplen todos ellos es que tienen 2^{11} niveles distribuidos UNIFORMEMENTE (pues $f_X(x)$ es uniforme) entre $-g[n]$ y $g[n]$, con lo que $X_{máx} = g[n]$.

2. Cuantificador "mid-rise" con $X_{máx} = 1$:

Ocurre que en muchos instantes de tiempo $g[n] < 1$, y habrá muchos niveles del cuantificador que no llegarán a usarse. Por ejemplo:



$g[n] = 1 - 9{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot n$ si $0 \leq n < 10.000$

- $n = 8.081 \Rightarrow g[n] \cong 0{,}2 \Rightarrow x$ varía entre $-0{,}2$ y $0{,}2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ Se desaprovechan todos los niveles de cuantificación entre $0{,}2$ y 1, y entre -1 y $-0{,}2$.

(No va a ser un cuantificador muy eficiente).

Consideraciones:

- Como $x[n]$ como mucho puede valer $g[n]$, y $|g[n]| \leq 1$, $X_{máx} = 1 \Rightarrow |g[n]| \leq X_{máx}$, entonces no va a haber ruido de saturación (la señal no puede pasar por encima de $X_{máx}$ ni por debajo de $-X_{máx}$).
- Aproximación asintótica: ~~como B>1~~ se debe comprobar si el nº de niveles usados en el cuantificador es mayor que 10:
  - Caso mejor: $g[n] = 1 \rightarrow$ Se usan los 2^{11} niveles, y $2^{11} > 10 \rightarrow$ OK!
  - Caso peor: $g[n] = 0{,}01 \rightarrow$ Se usan los $2^{11} \cdot 0{,}01$ niveles que hay entre $x \in [-0{,}01, 0{,}01]$, y como $2^{11} \cdot 0{,}01 = 20{,}48 > 10 \rightarrow$ OK!

Como se puede aplicar la aproximación asintótica, supondremos que el ruido de cuantificación está uniformemente distribuido entre $\pm \frac{\Delta}{2}$.

Dicho todo esto, $\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ en cualquier instante de tiempo n, donde:

$$\Delta = \frac{2 \cdot X_{máx}}{2^B} = \frac{2 \cdot 1}{2^{11}} = 2^{-10} = 9{,}76 \cdot 10^{-4} \longrightarrow \boxed{\sigma_q^2 = 7{,}95 \cdot 10^{-8}} \quad \text{(Sólo ruido granular)}$$

Para el cálculo de la relación S/N, es preciso determinar la potencia de $x[n]$:

$$S/N = \frac{\sigma_x^2(n)}{\sigma_q^2}, \quad \text{donde } \sigma_x^2(n) = g^2[n] \cdot \sigma_y^2$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-1}^{1} y^2 \cdot \frac{1}{2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_y(y) dy \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$S/N(n) = \frac{g^2[n] \cdot 1/3}{7{,}95 \cdot 10^{-8}} = \boxed{4{,}19 \cdot 10^{6} \cdot g^2[n]} \longrightarrow S/N(n) \text{ en dB} = 66{,}23 \text{ dB} + 20 \cdot \log_{10}(g[n])$$

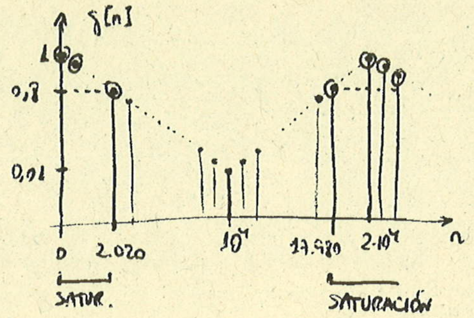
Particularizando el resultado para $n=0$ y $n = 10.000$:

$n=0$ $\quad S/N(0) = \underline{66{,}23 \text{ dB}}$

$n = 10^4$ $\quad S/N(10^4) = 66{,}23 \text{ dB} + 20 \cdot \log_{10}(g[10^4]) = \underline{26{,}23 \text{ dB}}$.

3. Cuantificador "mid-rise" con $X_{máx} = 0{,}8$:

En esta ocasión sí se va a producir ruido de saturación, pues $x[n]$ puede llegar a valer hasta ± 1, y el cuantificador sólo distingue entre $\pm 0{,}8$. Habrá ~~valores de g[n]~~ instantes de tiempo en los que haya saturación $(n / |g[n]| > 0{,}8)$ e instantes en los que no.



$$\begin{cases} \text{Saturación: } g[n] > 0{,}8 \\ \text{Sin saturación: } g[n] \leq 0{,}8. \end{cases}$$

Entonces:

- En los instantes donde no hay saturación, el ruido de cuantificación granular valdrá lo que indica la expresión conocida:

$$\Delta = \frac{2 \cdot X_{máx}}{2^B} = \frac{2 \cdot 0{,}8}{2^{11}} = 7{,}81 \cdot 10^{-4} \qquad \sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \boxed{5{,}09 \cdot 10^{-8}}$$

$$S/N\,[n] = \frac{\sigma_x^2 \cdot g^2[n]}{\sigma_q^2} \Rightarrow S/N\,(n) = \boxed{68{,}16 \text{ dB} + 20 \cdot \log_{10}(g[n])}$$

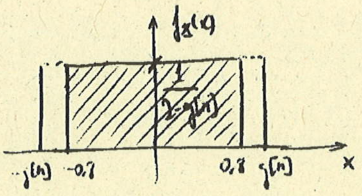
$\cancel{(S/N\,(n=0) = 68{,}16 \text{ dB})}$, $S/N\,(n = 10.000) = \underline{28{,}16 \text{ dB}}$

(la relación S/N mejora en 1,93 dB frente al apartado anterior).

- Sin embargo, cuando hay saturación, hay que distinguir entre ruido granular y ruido de sobrecarga:

$$\sigma_q^2(\text{granular}) = \frac{\Delta^2}{12} \cdot P\left[|x(n)| \leq 0{,}8\right] = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \int_{-0{,}8}^{0{,}8} f_x(x)\,dx = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \int_{-0{,}8}^{0{,}8} \frac{1}{2 \cdot g[n]}\,dx =$$

$$= \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{0{,}8}{g[n]} \longrightarrow \text{Depende de } n \quad ¿?$$



(me lo he inventado)

~~(Como σ_q^2(granular) depende de n, tomamos el valor (del caso peor) máximo, que se alcanza cuando~~
~~($g(n) = 1$, y entonces $\sigma_q^2(\text{granular}) = \frac{\Delta^2}{12} \cdot 0{,}8$).~~

En cuanto al ruido de saturación:

$$\sigma_q^2(\text{sobrecarga}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \left(X_{máx} - \frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 \cdot f_x(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0{,}8}^{g[n]} \left(x - \overbrace{\left(X_{máx} - \frac{\Delta}{2}\right)}^{\approx 0{,}8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g[n]}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot g[n]} \cdot 2 \cdot \left[\frac{(x - X_{máx})^3}{3}\right]_{0{,}8}^{g[n]} = \frac{1}{3 \cdot g[n]} \cdot (g[n] - 0{,}8)^3$$

Con lo que el ruido de cuantificación valdría:

$$\sigma_q^2 = \sigma_q^2(\text{granular}) + \sigma_q^2(\text{sobrecarga}) = \boxed{\frac{\Delta^2 \cdot 0.8}{12}\cdot\frac{1}{g[n]} + \frac{1}{3\cdot g[n]}\cdot\left(g[n]-0.8\right)^3} = \sigma_q^2[n]$$

$$S/N = \frac{\sigma_x^2 \cdot g^2[n]}{\sigma_q^2[n]} = \ldots = \text{(lo que dé)}$$

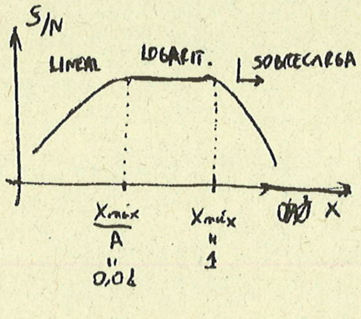
$$S/N\,(n=0) = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2\cdot g^2[0]}{\sigma_q^2[0]}\right) = 10\cdot\log_{10}\left(\frac{1/3\cdot 1^2}{4{,}07\cdot 10^{-8} + 2{,}67\cdot 10^{-3}}\right) = \underline{20{,}97\text{ dB}}$$

(Por culpa de la sobrecarga, para $n=0$ se pierden 5,26 dB de S/N frente al apartado **2**). ¡La sobrecarga es predominante frente al ruido granular!

4. Cuantificador logarítmico con ley $A = 100$ y valor de saturación $X_{máx} = 1$:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{A\cdot|x|\cdot \text{signo}(x)}{1+\ln(A)} & \text{si } 0 \le |x| \le \overset{0{,}01}{\dfrac{X_{máx}}{A}} \quad \text{LINEAL} \\[2ex] X_{máx}\cdot \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{A\cdot|x|}{X_{máx}}\right)\cdot \text{signo}(x)}{1+\ln(A)} & \text{si } \overset{0{,}01}{\dfrac{X_{máx}}{A}} \le |x| \le \overset{1}{X_{máx}} \quad \text{LOGARÍTMICA}\end{cases}$$

Planteamos la gráfica de relación S/N característica de un cuantif. logarítmico:



$g[n] = 0{,}01 \Rightarrow \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \cdot g^2[n] = \frac{1}{3}\cdot(10^{-2})^2 = 3{,}33\cdot 10^{-5}$ (zona lineal)

$g[n] = 1 \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{3}\cdot 1^2 = \frac{1}{3}$ (zona logarítmica)

En $n = 10.000$, $g[n] = 0{,}01$ y el cuantificador se comporta en la zona ~~logarítmica~~ lineal. De ahí que:

$$S/N = \underbrace{(S/N)_{uniforme}}_{\text{Calculada en el apartado 2}} + 20\cdot\log_{10}(G_c) = 26{,}23\text{ dB} + \underbrace{20\cdot\log_{10}(17{,}84)}_{25{,}03\text{ dB}} = \boxed{51{,}26\text{ dB}}$$

$$G_c = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=0} = \frac{A}{1+\ln(A)} = \frac{100}{1+\ln(100)} = 17{,}84$$

(Hay una mejora importante frente al caso ~~uniforme~~ de cuantif. uniforme)

Mientras que en $n=0$, $y[n]=1$ y el cuantificador se comporta en la zona logarítmica. La expresión del cálculo de S/N es diferente:

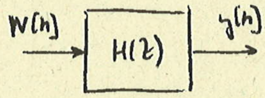
$$\left.\begin{array}{l} S/_N\,(n=0) = \dfrac{K^2}{\Delta^2/12} \\[2ex] \Delta = \dfrac{2\cdot X_{máx}}{2^B} = \dfrac{2\cdot 1}{2^{11}} = 2^{-10} = 9{,}76\cdot 10^{-4} \\[2ex] K = \dfrac{X_{máx}}{1+\ln(A)} = \dfrac{1}{1+\ln(100)} = 0{,}1784 \end{array}\right\} \quad S/_N\,(n=0) = 10\cdot\log_{10}\left(\frac{0{,}1784^2}{(9{,}76\cdot 10^{-4})^2}\cdot 12\right) = \boxed{56{,}03\ dB}$$

(se aproxima mucho a $6\cdot B - 10 = 56$ dB)

(Se pierden 10,23 dB frente al cuantificador uniforme).

6. La señal $y(n)$ se genera con la siguiente ecuación ($w[n]$: ruido blanco con $\sigma_w^2 = 0{,}01$):

$$y[n] = w[n] + \sum_{i=1}^{3} a[i]\cdot y[n-i]$$



• ¿Qué orden de predictor se debería utilizar?

El sistema $H(z)$ tiene esta respuesta:

$$Y(z) = W(z) + \sum_{i=1}^{3} a[i]\cdot Y(z)\cdot z^{-i} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{3} a[i]\cdot z^{-i}} = \frac{1}{A(z)}$$

Considerando que el predictor óptimo tiene la respuesta inversa a la del modelo usado para generar la señal, $A(z) = 1/H(z)$, entonces:

$$\boxed{A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{3} a[i]\cdot z^{-i}}$$

• ¿Cuál sería la ganancia de la configuración diferencial del cuantificador de la señal $x[n]$?

Al emplear el filtro de predicción $A(z)$, se produce una ganancia, ya que hay una reducción de la potencia del error. La ganancia sobre la señal $y[n]$ vale:

$$G_{Dy} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_w^2} = \frac{1/3}{0{,}01} = 33{,}33 \quad (15{,}23\ dB)$$

En cuanto a la señal $x(n)$, hay que hacer algunas hipótesis:

- La variación entre $y[n]$ y $y[n-1]$ es de $\frac{1-10^{-2}}{10.000} \simeq 10^{-4}$.
- El predictor adivina 3 muestras consecutivas, que tienen una variación a lo sumo del 3%.
- $x[n]$ puede considerarse estacionaria.

Bajo estos preceptos, se puede decir que $G_{Dx} = G_{Dy} = \underline{15,23 \text{ dB}}$.

EJERCICIO:

Demostrar que, para una señal de ruido blanco y gaussiano, el sesgo del estimador $r_x(m)$ es nulo y la varianza es:

$$\mathrm{Var}\left(r_x(m)\right) = \begin{cases} \frac{2}{N}\sigma_x^4 & m=0 \\ \frac{1}{N}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)\sigma_x^4 & m\neq 0 \end{cases}$$

$$\text{AWGN} \Rightarrow \gamma(m) = \sigma^2 \delta(m)$$

$$B(r_x(m)) = \frac{|m|}{N}\gamma_x(m) = \begin{cases} 0 & m=0 \\ \frac{|m|}{N}\gamma_x(m)=0 & m\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(r_x(m)) = 0}$$

$$\mathrm{Var}(r_x(m)) = \frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|}\left(1-\frac{n+|m|}{N}\right)\left(|\gamma_x(m)|^2 + \gamma_x^*(n-m)\gamma_x(n+m)\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-(N+1-|m|)}^{N-1-|m|}\left(1-\frac{n+|m|}{N}\right)\left(\sigma_x^4\delta^2(m) + \sigma_x^4\delta(n-m)\delta(n+m)\right)$$

$$\cancel{m=0 \Rightarrow \mathrm{Var}(r_x(m)) = \frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|}\left(1-\frac{n}{N}\right)\sigma_x^4 = \frac{1}{N}\cdot 2N\sigma_x^4 - \sum_{n=-N+1}^{N-1}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{Var}(r_x(m))} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\sigma_x^4 + \sigma_x^4\delta(n-\overset{0}{m})\delta(n+\overset{0}{m})\right)$$

$$= \frac{1}{N}\cdot 2\sigma_x^4 - \frac{1}{N}\sum_{\substack{n=-N+1 \\ n\neq 0}}^{N-1}\cancelto{0}{\frac{n}{N}\left(\sigma_x^4+0\right)} = \underline{\frac{2}{N}\sigma_x^4}$$

$\underline{m \neq 0}$: $r_x(n-m)\, r_x^*(n+m) = \sigma_x^4$ ya que, para señales reales:

$r_x^*(m+n) = r_x(n-m)$

$$\Rightarrow Var(r_x(m)) = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|} \left(1 - \frac{n+|m|}{N}\right)\left(\sigma_x^4 \delta(m) + \sigma_x^4 \delta(\cancel{n}-m)\right) =$$

$$= \frac{\sigma_x^4}{N} \sum_{n=\ldots}^{\ldots} (1+\delta(n-m)) - \frac{\sigma_x^4}{N^2} \sum_{\ldots}^{\ldots} (n+|m|)(1+\delta(\cancel{n}-m))$$

$m \neq 0 \Rightarrow \delta(m) = 0$

$$\Rightarrow Var(r_x(m)) = \frac{1}{N} \sum_n \left(1 - \frac{n+|m|}{N}\right) \sigma_x^4\, \delta(\cancel{n}-m)$$

$$\boxed{Var(r_x(m)) = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{n+|m|}{N}\right)\sigma_x^4}$$

11.1 La densidad espectral de potencia de un proceso AR $\{x(n)\}$ viene dada por

$$\Gamma_{xx}(w) = \frac{\sigma_w^{\,2}}{|A(w)|^2} = \frac{25}{\left|1 - e^{-jw} + \frac{1}{2}e^{-2jw}\right|^2}$$

donde $\sigma_w^{\,2}$ es la varianza de la secuencia de entrada.

a) Determine la ecuación en diferencias para generar el proceso AR cuando la excitación es ruido blanco.
b) Determine la función de transferencia para el filtro blanqueador.

a) MODELO AR:

$$\underset{\sigma_w^2}{\xrightarrow{w(n)}} \boxed{1/A(z)} \xrightarrow{x(n)}$$

Tenemos que:

$$\Gamma_x(\omega) = \frac{25}{\left|1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\omega}\right|^2} = \frac{\sigma_w^2}{|A(\omega)|^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow A(\omega) = 1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\omega} \rightarrow \text{cambio } z = e^{j\omega} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{A(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

comprobamos que $h(0) =$

$h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z) = 1$

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{X(z)}{W(z)} \rightarrow$$

$$\rightarrow W(z) = X(z) - z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-2}X(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow X(z) = W(z) + z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-2}X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}}$$

$$\rightarrow \boxed{x(n) = w(n) + x(n-1) - \frac{1}{2}x(n-2)}$$

b) Filtro blanqueador:

$$A(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

11.2 Un proceso ARMA tiene una autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ cuya transformada Z viene dada por

$$\Gamma_{xx}(Z) = 9\frac{\left(Z-\frac{1}{3}\right)(Z-3)}{\left(Z-\frac{1}{2}\right)(Z-2)} \qquad \frac{1}{2} < |Z| < 2$$

a) Determine el filtro $H(z)$ para generar $\{x(n)\}$ a partir de una secuencia de entrada de ruido blanco. ¿Es H(z) única? Explique.

b) Determine un filtro blanqueador lineal estable para la secuencia $\{x(n)\}$.

a) MODELO ARMA :

$$\underset{\sigma_w^2}{w(n)} \longrightarrow \boxed{H(z) = B(z)/A(z)} \longrightarrow x(n)$$

Tenemos que :

$$\Gamma_x(z) = 9\,\frac{\overbrace{\left(z-\frac{1}{3}\right)}^{}}{\underbrace{\left(z-\frac{1}{2}\right)}_{H(z)}} \cdot \frac{(z-3)}{\underbrace{(z-2)}_{H(z^{-1})}} = \sigma_w^2\, H(z)\cdot H(z^{-1}) = \sigma_w^2\,\frac{B(z)\cdot B(z^{-1})}{A(z)\cdot A(z^{-1})}$$

(polo con $|\,| < 1 \to$ estable)

Por lo tanto :
$$\begin{cases} H(z) = \dfrac{\left(z-\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\[2ex] \sigma_w^2 = 9 \end{cases}$$

Comprobamos si $h(0) = 1$:

$$h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z) = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'H} = \frac{1}{1} = 1 \quad \underline{OK}$$

No te olvides

$H(z)$ no es única, también podría ser $H(z) = \dfrac{z-3}{z-\frac{1}{2}}$, que sigue siendo estable, pero entonces el filtro blanqueador sería inestable !

b) Filtro blanqueador:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H^{-1}(z)} \longrightarrow w'(n)$$

Es el filtro inverso:

$$H_{BL}(z) = H^{-1}(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

11.3 Considere el proceso ARMA generado por la ecuación en diferencias

x(n) = 1.6 x(n-1) - 0.63 x(n-2) + w(n) + 0.9 w(n-1)

a) Determine la función de transferencia del filtro blanqueador y sus polos y ceros.
b) Determine la densidad espectral de potencia de {x(n)}. , $\Gamma_x(\omega)$

a) MODELO ARMA :

$$w(n) \longrightarrow \boxed{H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}} \longrightarrow x(n)$$

$$x(n) = 1'6\,x(n-1) - 0'63\,x(n-2) + w(n) + 0'9\,w(n-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow x(n) - 1'6\,x(n-1) + 0'63\,x(n-2) = w(n) + 0'9\,w(n-1) \xrightarrow{TZ}$$

$$\rightarrow X(z) - 1'6 z^{-1} X(z) + 0'63 z^{-2} X(z) = W(z) + 0'9 z^{-1} W(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1+0'9z^{-1}}{1-1'6z^{-1}+0'63z^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z) = 1 \ \underline{OK}$$

Filtro blanqueador :

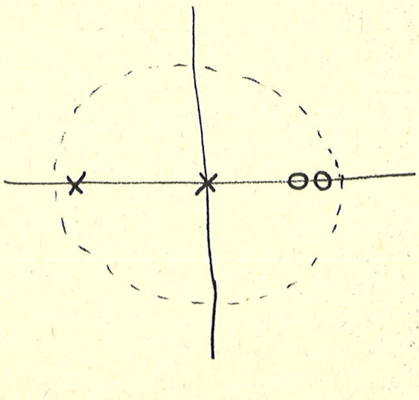
$$x(n) \longrightarrow \boxed{H^{-1}(z)} \longrightarrow w'(n)$$

$$H^{-1}(z) = \frac{1-1'6z^{-1}+0'63z^{-2}}{1+0'9z^{-1}}$$

POLOS : $0'9z^{-1} = -1 \rightarrow \boxed{z_{p_1} = -0'9}$, $\boxed{z_{p_2} = 0}$

CEROS : $1-1'6z^{-1}+0'63z^{-2} = 0 \rightarrow z^2 - 1'6z + 0'63 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{c} z_{c_1} = 0'9 \\ z_{c_2} = 0'7 \end{array}}$$



P/Z

b) dep: $\Gamma_x(\omega)$

$$\Gamma_x(z) = \sigma_w^2 \, H(z) \cdot H(z^{-1}) =$$

$$= \sigma_w^2 \, \frac{1+0'9z^{-1}}{1-1'6z^{-1}+0'63z^{-2}} \cdot \frac{1+0'9z}{1-1'6z+0'63z^2}$$

$$\Gamma_x(\omega) = \Gamma_x(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

11.4 Determine los coeficientes de la celosía correspondientes al filtro FIR con función de transferencia

$$H(Z) = A_3(Z) = 1 + \underbrace{\frac{13}{24}}_{a_3(1)} Z^{-1} + \underbrace{\frac{5}{8}}_{a_3(2)} Z^{-2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3(3)} Z^{-3}$$

$a_3(0)$

Tenemos que : $\begin{cases} a_3(0) = 1 \\ a_3(1) = \frac{13}{24} \end{cases}$ $\quad a_3(2) = \frac{5}{8} \quad a_3(3) = \frac{1}{3}$

$$\boxed{K_3 = a_3(3) = \frac{1}{3}}$$

F. DIRECTA → CELOSÍA : $\boxed{a_{m-1}(k) = \frac{a_m(k) - K_m\, a_m(m-k)}{1 - K_m^2}}$ $\quad k = 1 \,..\, m-1$

$\boxed{m=3}$

$$a_2(0) = 1$$

$$a_2(1) = \frac{a_3(1) - K_3 \cdot a_3(2)}{1 - K_3^2} = \frac{\frac{13}{24} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{K_2 = a_2(2) = \frac{a_3(2) - K_3\, a_3(1)}{1 - K_3^2} = \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{24}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{m=2}$

$$a_1(0) = 1$$

$$\boxed{K_1 = a_1(1) = \frac{a_2(1) - K_2\, a_2(1)}{1 - K_2^2} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}}$$

$\boxed{m=1}$

$$\boxed{K_0 = a_0(0) = 1}$$

11.6 a) Determine y represente los ceros para el filtro FIR en celosía con coeficientes de reflexión $K_1 = \frac{1}{2}$ $K_2 = +\frac{1}{3}$ $K_3 = 1$

b) Repita el apartado (a) pero con $K_3 = -1$

c) Debería haber encontrado que los ceros yacen sobre la circunferencia unidad. ¿Se puede generalizar este resultado? ¿Cómo?

a) CELOSÍA → F. DIRECTA : $\boxed{a_m(k) = a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}(m-k) \quad k = 1 .. m-1}$

$m=0$

$$a_0(0) = 1$$

$m=1$

$$a_1(0) = 1$$

$$a_1(1) = K_1 = \frac{1}{2}$$

$m=2$

$$a_2(0) = 1$$

$$a_2(2) = K_2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2(1) = a_1(1) + K_2 \cdot a_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$m=3$

$$a_3(0) = 1$$

$$a_3(3) = K_3 = 1$$

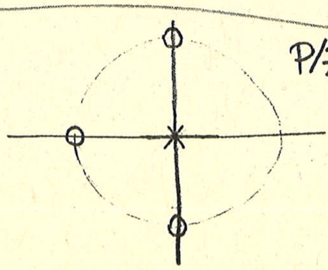
$$a_3(1) = a_2(1) + K_3\, a_2(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$a_3(2) = a_2(2) + K_3\, a_2(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$H(z) = A(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3}$$

CEROS : $z_1 = -1$

$z_{2,3} = \pm j$



P/Z

	1	1	1	1
-1		-1	0	-1
	1	0	1	0

$z^2 + 1 \rightarrow z = \pm j$

b) $K_1 = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \frac{1}{3} \qquad K_3 = -1$

$\underline{m=0} \qquad a_0(0) = 1$

$\underline{m=1} \qquad a_1(0) = 1$

$a_1(1) = K_1 = \frac{1}{2}$

$\underline{m=2} \qquad a_2(0) = 1$

$a_2(2) = K_2 = \frac{1}{3}$

$a_2(1) = a_1(1) + K_2\, a_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$\underline{m=3} \qquad a_3(0) = 1$

$a_3(3) = K_3 = -1$

$a_3(1) = a_2(1) + K_3 \cdot a_2(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$a_3(2) = a_2(2) + K_3\, a_2(1) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$$H(z) = A(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} - z^{-3} =$$

$$= \frac{z^3 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} z - 1}{z^3}$$

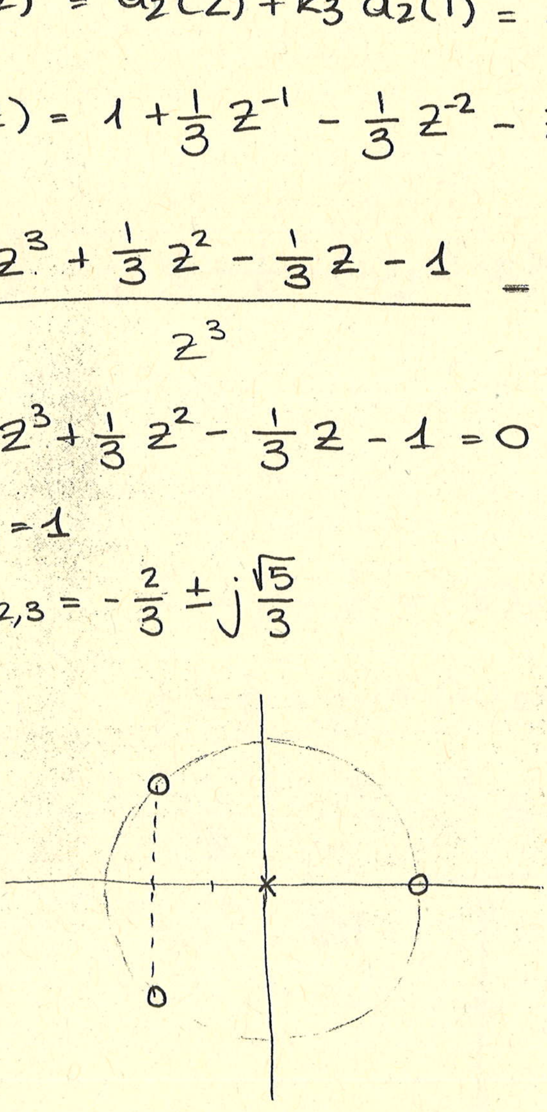
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ \hline & 1 & \frac{4}{3} & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4}}{2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm j\frac{\sqrt{20}}{3}}{2}$$

CEROS: $z^3 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} z - 1 = 0$

$z_1 = 1$

$z_{2,3} = -\frac{2}{3} \pm j\frac{\sqrt{5}}{3}$



P/Z

c)

Si $|K_m| = 1$ → Los ceros estarán sobre el círculo unidad.

MF

11.5 Determine los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$ del filtro en celosía correspondiente al filtro FIR descrito por la función de transferencia

$$H(Z) = A_2(Z) = \underbrace{1}_{a_2(0)} + \underbrace{2}_{a_2(1)}Z^{-1} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_2(2)}Z^{-2}$$

$a_2(0) = 1$

$a_2(1) = 2$

$a_2(2) = \frac{1}{3}$

F DIRECTA → CELOSÍA : $\boxed{a_{m-1}(k) = \dfrac{a_m(k) - K_m a_m(m-k)}{1 - K_m^2} \qquad k = 1 \ldots m-1}$

$$\boxed{K_2 = a_2(2) = \frac{1}{3}}$$

$m = 2$

$a_1(0) = 1$

$$\boxed{K_1 = a_1(1)} = \frac{a_2(1) - K_2 a_2(1)}{1 - K_2^2} = \frac{2 - \frac{1}{3}\cdot 2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$m = 1$

$$\boxed{K_0 = a_0(0) = 1}$$

11.7 Determine la respuesta impulsional del filtro FIR descrito por los coeficientes de la celosía $K_1 = 0.6$ $K_2 = 0.3$ $K_3 = 0.5$ y $K_4 = 0.9$.

CELOSÍA → DIRECTA

$$\boxed{a_m(k) = a_{m-1}(k) + K_m\, a_{m-1}(m-k)}$$

<u>m=0</u>

$a_0(0) = 1$

<u>m=1</u>

$a_1(0) = 1$

$a_1(1) = K_1 = 0'6$

<u>m=2</u>

$a_2(0) = 1$

$a_2(2) = K_2 = 0'3$

$a_2(1) = a_1(1) + K_2\, a_1(1) = 0'6 + 0'3 \cdot 0'6 = 0'78$

<u>m=3</u>

$a_3(0) = 1$

$a_3(3) = K_3 = 0'5$

$a_3(1) = a_2(1) + K_3 \cdot a_2(2) = 0'78 + 0'5 \cdot 0'3 = 0'93$

$a_3(2) = a_2(2) + K_3 \cdot a_2(1) = 0'3 + 0'5 \cdot 0'78 = 0'69$

<u>m=4</u>

$a_4(0) = 1$

$a_4(4) = K_4 = 0'9$

$a_4(1) = a_3(1) + K_4\, a_3(3) = 0'93 + 0'9 \cdot 0'5 = 1'38$

$a_4(2) = a_3(2) + K_4\, a_3(2) = 0'69 + 0'9 \cdot 0'69 = 1'311$

$a_4(3) = a_3(3) + K_4\, a_3(1) = 0'5 + 0'9 \cdot 0'93 = 1'337$

$$\boxed{H(z) = A(z) = 1 + 1'38\, z^{-1} + 1'311\, z^{-2} + 1'337\, z^{-3} + 0'9\, z^{-4}}$$

repensar teoría

11.9 Use el principio de ortogonalidad para determinar las ecuaciones normales y el MSE mínimo resultante para un predictor hacia delante de orden p que predice m muestras (m>1) del futuro. Dibuje el filtro de error de predicción.

PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD: $E\{f_p(n)\cdot x(n-i)\}=0 \quad i=1..p$

(de los datos y la sñ de error de predicc. hacia delante)

$f_p(n) \equiv$ sñ de error de predicción hacia delante:

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\,x(n-k)$$

definición de memoria

Sustituyendo:

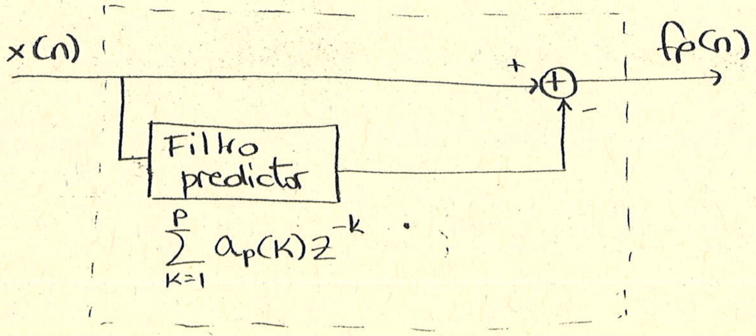
$$E\left\{\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\,x(n-k)\,x(n-i)\right\}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\,E\{x(n-k)\,x(n-i)\}=0 \quad i=1..p \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\cdot\gamma(i-k)=0 \quad i=1..p \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\,\gamma(i-k) = -\gamma(i) \quad i=1..p}$$

ECUACIONES NORMALES (YULE-WALKER)



FILTRO DE ERROR DE PREDICCIÓN

¿MMSE? Δ M7

Se obtiene cuando el filtro de error de pred. es el óptimo.

$$MMSE = E\{f_p^2(n)\} = E\{f_p(n) \cdot \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\, x(n-k)\} =$$

$$= E\{f_p(n)\left[x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, x(n-k)\right]\} =$$

$$= E\{f_p(n)\, x(n)\} + E\{f_p(n) \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\, x(n-k)\} =$$

$$= E\{f_p(n)\, x(n)\} + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) \underbrace{E\{f_p(n)\, x(n-k)\}}_{=0\text{, x el ppio de ortogonalidad}} =$$

$$= E\{f_p(n)\, x(n)\} = E\{\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\, x(n-k)\, x(n)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\, E\{x(n)\, x(n-k)\} = \boxed{\sum_{k=0}^{p} a_p(k) \cdot \gamma_x(k). = MMSE}$$

Intentar y
comprobar si está en Teoría

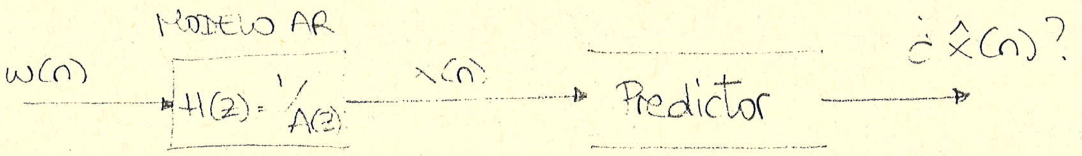
11.10 Repita el problema 11.9 para un predictor hacia atrás de m muestras.

$g_p(n) \equiv$ señal de error de predicción hacia atrás.

$$g_p(n) = \sum_{k=0}^{p} b_p(k)\, x(n-k)$$

MJ

11.19 Determine la salida de un predictor hacia delante de m muestras de longitud infinita (p=∞) y el error cuadrático medio resultante cuando la señal de entrada es un proceso autorregresivo de primer orden de la forma x(n) = a x(n-1) + w(n).



Si $\frac{1}{A(z)}$ es un proceso AR, el A(z) es un filtro blanqueador, cuyos coefs coinciden con los del denominador del proceso AR si el filtro de error de predicción es óptimo. Por lo tanto, a la salida obtenemos ruido blanco, que será el error de predicción. En este problema, el proceso AR es de orden 1, por lo que el orden del filtro óptimo de error de predicción será 1. Por tanto, un filtro de predicción de orden mayor no va a mejorar nada.

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{p=\infty} a_p(k)\,x(n-k) = \sum_{k=0}^{p=1} a_p(k)\,x(n-k)$$

MMJ

PROCESO AR : $X(z) = a z^{-1} X(z) + W(z) \rightarrow X(z)\left[1 - a z^{-1}\right] = W(z) \rightarrow$

$$\rightarrow H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow A(z) = 1 - a z^{-1}$$

Coefs. del predictor : $a_1(0) = 1$

$a_1(1) = -a$

Salida del predictor :

$$\boxed{\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{1} a_p(k)\,x(n-k) = -a_1(1)\,x(n-1) = a\,x(n-1)}$$

7

12.21 Un proceso MA(2) está descrito por la ecuación en diferencias

$$x(n) = w(n) + 0.81\, w(n-2)$$

donde w(n) es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2.

(a) Determine los parámetros de los modelos AR(2), AR(4), y AR(8) que proporcionan un mínimo error cuadrático medio de ajuste a los datos x(n).

(b) Represente el verdadero espectro y los espectros AR(p), p = 2, 4, 8, y compare los resultados. Comente qué tal aproximan los modelos AR(p) el proceso MA(2).

12.23 Considere un filtro FIR con vector de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & -2r\cos\theta & r^2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine los coeficientes de reflexión para el correspondiente filtro en celosía FIR.
(b) Determine los valores de los coeficientes de reflexión en el límite cuando r→1.

(a) $a_2(0) = 1$

$a_2(1) = -2r\cos\theta$

$a_2(2) = r^2$

$K_2 = a_2(2) = r^2$

$m=2$ $a_1(0) = 1$

$$K_1 = a_1(1) = \frac{a_2(1) - K_2 a_2(1)}{1-K_2^2} = \frac{-2r\cos\theta + r^2 \cdot 2r\cos\theta}{1-r^4} = \frac{(r^2-1)(2r\cos\theta)}{1-r^4} = \frac{-\cancel{(1-r^2)}(2r\cos\theta)}{\cancel{(1-r^2)}(1+r^2)} =$$

$$= \frac{-2r\cos\theta}{1+r^2}$$

$m=1$ $K_0 = a_0(0) = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1} & r^2 \end{bmatrix}$$

(b) Si $r \to 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\cancel{2}\cos\theta}{\cancel{2}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\theta & 1 \end{bmatrix}$$

?

12.24 Un proceso AR(3) se caracteriza por los coeficientes de predicción

$$a_3(1)=-1.25, \quad a_3(2)=1.25, \quad a_3(3)=-1$$

(a) Determine los coeficientes de reflexión

(b) Determine $\gamma_{xx}(m)$ *para* $0 \leq m \leq 3$.

(c) Determine el error cuadrático medio de predicción.

(a) $\boxed{K_3 = a_3(3) = -1}$ ← Creo q la teoría para aquí

Mal

($m=3$) $a_2(0)=1$

$$a_2(1) = \frac{a_3(1) - K_3 \cdot a_3(2)}{1-K_3^2} = \frac{-1'25 + 1 \cdot 1'25}{1+1} = 0$$

$$\boxed{K_2 = a_2(2) = \frac{a_3(2) - K_3 \cdot a_3(1)}{1-K_3^2} = \frac{1'25 + 1 \cdot (-1'25)}{1+1} = 0}$$

($m=2$) $a_1(0)=1$

$$\boxed{K_1 = a_1(1) = \frac{a_2(1) - K_2 \cdot a_2(1)}{1-K_2^2} = 0}$$

(b) Modelo AR(3)

$$H(z) = A_3(z) = 1 - 1'25 \cdot z^{-1} + 1'25 z^{-2} - z^{-3}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(1) \\ \gamma_{xx}(2) \\ \gamma_{xx}(3) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \gamma_{xx}(-2) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) \\ \gamma_{xx}(2) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1'25 \\ 1'25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

12.25 La secuencia de autocorrelación para un proceso aleatorio es

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ -0.5 & m = \pm 1 \\ 0.625 & m = \pm 2 \\ -0.6875 & m = \pm 3 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Determine las funciones de transferencia $A_m(z)$ para los filtros de error de predicción para m = 1, 2, 3, los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$, y los correspondientes errores cuadrático medio de predicción.

$$\gamma_{xx}(m) = \sigma_W^2 - \sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) \qquad ?$$

$\gamma_x(0) = 1$, $\gamma_x(1) = -0.5$, $\gamma_x(2) = 0.625$, $\gamma_x(3) = -0.6875$

$$E_0^f = \gamma(0) = 1$$

$$E_1^f = (1 - k_1^2)\, E_0^f$$

$$k_1 = \frac{-\sum_{k=1}^{m} a_{m-1}(m-k)\gamma(k)}{E_0^f} = -\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = +0.5 = a_1(1).$$

$$E_1^f = 0.75$$

$$k_2 = -\frac{\sum^{2} a_1(2-k)\gamma(k)}{E_1^f} = -\frac{a_1(1)\gamma(1) + a_1(0)\cdot\gamma(2)}{E_1^f} =$$

$$= -\frac{0.5\cdot(-0.5) + 0.625}{0.75} = \frac{-0.375}{0.75} = -0.5 = a_2(2)$$

$$a_2(1) = \frac{a_1(1) - k_2\, a_1(1)}{1 - k_2^2} = 0.5\,\frac{1 + 0.5}{0.75} = 1$$

$E_2^f = 0.75$ ← No hay mejora

$$k_3 = -\frac{a_2(2)\cdot\gamma(1) + a_2(1)\cdot\gamma(2) + a_2(0)\cdot\gamma(3)}{E_2^f} =$$

$$= -\frac{(-0.5)\cdot(-0.5) + 1\cdot 0.625 + 1\cdot(-0.6875)}{0.75} = \frac{-0.25 + 0.0625}{0.75} =$$

$$= -0.25 = a_3(3)$$

Si pidieran un [illegible]
q luego es pasar a celosía
obteniendo todos los parámetros
de los filtros de predicción de
orden inferior.

MI

12.19 Considere el proceso AR(3) generado por la ecuación

$$x(n) = \frac{14}{24}x(n-1) + \frac{9}{24}x(n-2) - \frac{1}{24}x(n-3) + w(n)$$

donde *w(n)* es un proceso de ruido blanco estacionario con varianza σ_w^2.

(a) Determine los coeficientes del predictor lineal óptimo p = 3. → se refiere ~~celosía~~ directa

(b) Determine la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m), 0 \le m \le 5$. ?

(c) Determine los coeficientes de reflexión correspondientes al predictor lineal p = 3. → se refiere celosía

a) MODELO AR(3):

$$w(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{1}{A(z)}} \longrightarrow x(n)$$

$$x(n) = \frac{14}{24}x(n-1) + \frac{9}{24}x(n-2) - \frac{1}{24}x(n-3) + w(n)$$

TZ ↓

$$X(z) = \frac{14}{24}z^{-1}X(z) + \frac{9}{24}z^{-2}X(z) - \frac{1}{24}z^{-3}X(z) + W(z)$$

$$X(z)\left[1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}\right] = W(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}} = \frac{1}{A(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(z) = 1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3} = a_3(0) + a_3(1)z^{-1} + a_3(2)z^{-2} + a_3(3)z^{-3}$$

MI El filtro de error de predicción óptimo es el inverso del del modelo, por lo tanto los coeficientes del predictor óptimo son:

$$a_3(0) = 1 \qquad a_3(2) = -\frac{9}{24}$$

$$a_3(1) = -\frac{14}{24} \qquad a_3(3) = \frac{1}{24}$$

c) Calculamos los coefs Parcor, para ello lo mejor es pasar de la forma directa a la estructura en celosía.

$$a_3(0) = 1$$
$$a_3(1) = -\frac{14}{24}$$
Sabemos que: $a_3(3) = K_3 = \dfrac{1}{24}$
$$a_3(2) = -\frac{9}{24}$$

Conversión est. directa → celosía: $$a_{m-1}(k) = \frac{a_m(k) - K_m a_m(m-k)}{1 - K_m^2}$$ $k = 1 .. m-1$

$\boxed{m=3}$

$$a_2(0) = 1$$

$$a_2(1) = \frac{a_3(1) - K_3 \cdot a_3(2)}{1 - K_3^2} = \frac{-\frac{14}{24} + \frac{1}{24} \cdot \frac{9}{24}}{1 - \left(\frac{1}{24}\right)^2} = -\frac{327}{575}$$

$$a_2(2) = K_2 = \frac{a_3(2) - K_3 a_3(1)}{1 - K_3^2} = \frac{-\frac{9}{24} + \frac{1}{24} \cdot \frac{14}{24}}{1 - \left(\frac{1}{24}\right)^2} = -\frac{202}{575}$$

$\boxed{m=2}$

$$a_1(0) = 1$$

$$a_1(1) = K_1 = \frac{a_2(1) - K_2 a_2(\underline{1})}{1 - K_2^2} = \frac{-\frac{327}{575} - \frac{202}{575} \frac{327}{575}}{1 - \left(\frac{202}{575}\right)^2} = -0'8767$$

b) Calcular $\gamma_x(m)$ para $0 \le m \le 5$.

$$\gamma_x(0) = E_0^f = \frac{\sigma_w^2}{(1-K_1^2)\dots(1-K_3^2)}$$

Para el resto de valores sabemos que:

Predictor óptimo de orden p': $\gamma_x(p') = -\sum_{k=1}^{p'} a_{p'}(k)\,\gamma_x(p'-k)$

Y resolvemos recursivamente: (desde $p'=1$ hasta 5)

$\boxed{p'=1}$ $\gamma_x(1) = -a_1(1)\gamma_x(0)$

$\boxed{p'=2}$ $\gamma_x(2) = -a_2(1)\gamma_x(1) - a_2(2)\gamma_x(0)$.

$\boxed{p'=3}$ $\gamma_x(3) = -a_3(1)\gamma_x(2) - a_3(2)\gamma_x(1) - a_3(3)\gamma_x(0)$

$\boxed{p'=4}$ $\gamma_x(4) = -a_4(1)\gamma_x(3) - a_4(2)\gamma_x(2) - a_4(3)\gamma_x(1) - a_4(4)\gamma_x(0)$

$\boxed{p'=5}$ $\gamma_x(5) = -a_5(1)\gamma_x(4) - a_5(2)\gamma_x(3) - a_5(3)\gamma_x(2) - a_5(4)\gamma_x(1) - a_5(5)\gamma_x(0)$

$TF\{x_n(m)\} = TF\{x(m)\,w(n-m)\}$

$= \sum_m x(m)\,w(n-m)\,e^{-j2\pi f m} =$

$= \sum x(m)\,e^{-j2\pi f m}\,w(n-m) = x(m)\,e^{-j2\pi f m} * w(n)$

CPF – AD – Seg – Umb – Rm(k) – Pico – Mayor

12.17 Considere el sistema lineal descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.8\, y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

donde x(n) es un proceso aleatorio en sentido amplio con media cero y autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|} \quad ; \; m_x = 0$$

(a) Determine la densidad espectral de potencia de la salida y(n).
(b) Determine la autocorrelación $\gamma_{yy}(m)$ de la salida.
(c) Determine la varianza $\sigma_y^{\,2}$ de la salida.

a) Calculamos la H(Z) del sistema:

$$Y(Z) = 0'8\, Z^{-1} Y(Z) + X(Z) + Z^{-1} X(Z) \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(Z)\left[1 - 0'8 Z^{-1}\right] = X(Z)\left[1 + Z^{-1}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1 + Z^{-1}}{1 - 0'8 Z^{-1}}$$ Es un proceso ARMA(1,1)

¿dep de y(n)?

$$\Gamma_y(Z) = \Gamma_x(Z) \cdot H(Z) \cdot H(Z^{-1})$$

Calculamos $\Gamma_x(Z)$ aplicando la definición:

$$\Gamma_x(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} Z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} Z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{Z}{2}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2Z}\right)^{n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} Z}{1 - \frac{1}{2} Z} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} Z^{-1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Gamma_x(z) = \frac{\frac{1}{2}z\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) + 1 - \frac{1}{2}z}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}z}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\sigma_w^2}\ \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{F(z)}\ \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}}_{F(z^{-1})}$$

La sñ $x(n)$ ha sido generada a partir de ruido blanco mediante un proceso AR(1) de la forma:

$$\underset{\sigma_w^2}{w(n)} \longrightarrow \boxed{F(z)=\frac{1}{A(z)}} \xrightarrow{x(n)} \boxed{H(z)} \longrightarrow y(n)$$

$\approx$

$$\underset{\sigma_w^2}{w(n)} \longrightarrow \boxed{G(z)=F(z)H(z)} \longrightarrow y(n)$$

PROCESO ARMA (2,1)

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-0'8z^{-1}\right)}$$

$$\boxed{\Gamma_y(z)} = \sigma_w^2\, G(z)\, G(z^{-1}) = \boxed{\frac{3}{4}\ \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-0'8z^{-1}\right)}\ \frac{1+z}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-0'8z\right)}}$$

dep: $\Gamma_y(\omega) = \Gamma_y(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

12.14 Determine la media y la autocorrelación de la secuencia x(n) generada por el proceso MA(2) descrito por la ecuación en diferencias

$$x(n) = w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

donde w (n) es un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma_w^{\,2}$.

PROCESO MA(2)

$$w(n) \longrightarrow \boxed{H(Z) = B(Z)} \longrightarrow x(n)$$

$$X(Z) = W(Z) - 2Z^{-1}W(Z) + Z^{-2}W(Z) \rightarrow$$

$$\rightarrow H(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = 1 - 2Z^{-1} + Z^{-2}$$

Autocorrelación:

$$\Gamma_x(Z) = \sigma_w^2\, H(Z)\cdot H(Z^{-1}) = \sigma_w^2 (1 - 2Z^{-1} + Z^{-2})(1 - 2Z + Z^2) =$$

$$= \sigma_w^2 (1 - 2Z + Z^2 - 2Z^{-1} + 4 - 2Z + Z^{-2} - 2Z^{-1} + 1) =$$

$$= \sigma_w^2 (Z^{-2} - 4Z^{-1} + 6 - 4Z + Z^2)$$

$$\Big\downarrow TZ^{-1}$$

$$\boxed{\gamma_x(n) = \sigma_w^2 \left(\delta(n-2) - 4\delta(n-1) + 6\delta(n) - 4\delta(n+1) + \delta(n+2)\right)}$$

MEDIA: $\boxed{m_x = 0}$

(la $\gamma_x(n)$ no lleva ninguna cte sumada que me de una delta en la dep).

(MP) (las operaciones)

12.13 Determine la media y la autocorrelación de la secuencia x(n), que es la salida de un proceso ARMA (1, 1) descrito por la ecuación en diferencias

$$x(n) = \frac{1}{2}x(n-1) + w(n) - w(n-1)$$

donde w (n) es un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma_w^{\ 2}$.

PROCESO ARMA (1, 1)

$$w(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}} \longrightarrow x(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{2} z^{-1} X(z) + W(z) - z^{-1} W(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow X(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = W(z)\left[1 - z^{-1}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Autocorrelación:

$$\Gamma(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1 - z}{1 - \frac{1}{2}z} =$$

$$= \sigma_w^2 \frac{z - 1}{z - \frac{1}{2}} \frac{z - 1}{z - 2} \cdot 2 =$$

$$= \sigma_w^2 \, 2 \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \xrightarrow{TZ^{-1}}$$

Descompondremos en fracciones simples:

$$\begin{array}{l|l} z^2-2z+1 & z^2-\frac{5}{2}z+1 \\ \cline{2-2} -z^2+\frac{5}{2}z-1 & 1 \\ \cline{1-1} -\frac{1}{2}z & \end{array}$$

$$\frac{-1/2\, z}{z^2-\frac{5}{2}z+1} = \frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -1/2\, z = Az - 2A + Bz - B/2 \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = A+B \\ 0 = -2A - B/2 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow B = -4A$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -3A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}} \quad \boxed{B = -\frac{2}{3}}$$

$$T'_x(z) = \sigma_w^2 \cdot 2 \left[1 + \frac{1/6}{z-1/2} - \frac{2/3}{z-2} \right] = \sigma_w^2\, 2 \left[1 + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{2}{3}z^{-1}}{1-2z^{-1}} \right]$$

$$\Big\downarrow TZ^{-1}$$

$$\gamma_x(n) = \sigma_w^2 \left[2\delta(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{3}(2)^{n-1} u(n-1) \right]$$

MEDIA: Como $T'_x(f)$ (dep) no tiene delta en el origen (que es lo que daría lugar a una media $\neq 0$) $\rightarrow$ $\boxed{m_x = 0}$

EJERCICIO: Aplicación del algoritmo de Levison - Durbin.

Datos: $\gamma(0) = 3$

$\gamma(1) = 0'9$

$\gamma(2) = -0'8$

$\gamma(3) = 0'7$

Obtener el predictor óptimo de orden 3.

Hay que aplicar el algoritmo de Levison - Durbin

Predictor óptimo de orden $m=0$:

$a_0(0) = 1$

$E_0^f = \gamma(0) = 3$

Predictor óptimo de orden $m=1$:

$a_1(0) = 1$

$$K_1 = \left.\frac{-\sum_{K=1}^{m} a_{m-1}(m-K)\gamma(K)}{E_{m-1}^f}\right|_{m=1} = \frac{-a_0(0)\cdot\gamma(1)}{E_0^f} = \frac{-0'9}{3} = \boxed{-0'3}$$

$$\boxed{a_1(1) = K_1 = -0'3} \qquad E_1^f = E_0^f(1-K_1^2) = 3(1-0'3^2) = 2'73$$

Predictor óptimo de orden $m=2$:

$a_2(0) = 1$

$$K_2 = \left.\frac{-\sum_{K=1}^{m} a_{m-1}(m-K)\gamma(K)}{E_{m-1}^f}\right|_{m=2} = \frac{-a_1(1)\gamma(1) - a_1(0)\gamma(2)}{E_1^f} =$$

$$= \frac{+0'3\cdot 0'9 + 0'8}{2'73} = \boxed{0'39}$$

$$\boxed{a_2(2) = K_2 = 0'39}$$

$$a_m(K) = a_{m-1}(K) + K_m\, a_{m-1}(m-K)$$

$$\boxed{a_2(1)} = a_1(1) + K_2\cdot a_1(1) = -0'3 + 0'39\cdot(-0'3) = \boxed{-0'417}$$

$$E_2^f = E_1^f(1-K_2^2) = 2'73(1-0'39^2) = 2'3148$$

Predictor óptimo de orden $m = 3$:

$$\boxed{a_3(0) = 1}$$

$$\boxed{K_3} = \left.\frac{-\sum_{k=1}^{m} a_{m-1}(m-k)\gamma(k)}{E^f_{m-1}}\right|_{m=3} = \frac{-a_2(2)\gamma(1) - a_2(1)\gamma(2) - a_2(0)\gamma(3)}{E^f_2}$$

$$= \frac{-0'39 \cdot 0'9 - 0'417 \cdot 0'8 - 0'7}{2'3148} = \boxed{-0'5982}$$

$$\boxed{a_3(3) = K_3 = -0'5982}$$

$$a_m(k) = a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}(m-k)$$

$$\boxed{a_3(1)} = a_2(1) + K_3 a_2(2) = -0'417 - 0'5982 \cdot 0'39 = \boxed{-0'6503}$$

$$\boxed{a_3(2)} = a_2(2) + K_3 a_2(1) = 0'39 + 0'5982 \cdot 0'417 = \boxed{0'6394}$$

$$\boxed{E^f_3} = E^f_2(1 - K_3^2) = 2'3148(1 - 0'5982^2) = \boxed{1'4864}$$

(29) 4: TEL. SUP. 0,03€

Ejercicio 2. *Se dispone de la siguiente secuencia de temperaturas, que corresponden a la temperatura máxima de cada mes durante dos años:*

$$13.4, 14.5, 14.3, 18.7, 23.3, 23.8, 26.1, 25.5, 24.1, 18.9, 17.4, 13.6,$$
$$13.7, 14.2, 14.4, 18.6, 23.6, 24.0, 25.6, 25.4, 24.2, 18.4, 16.6, 14.9.$$

Datos que se pretenden modelar con un sistema AR, cuyo orden debe ser menor que 3.

1. *Determinar los coeficientes óptimos del predictor, para los predictores de orden 1, 2 y 3.*
2. *Calcular la potencia media del error de predición (P_e), suponiendo que los coeficientes son óptimos.*
3. *Comparar cualitativamente los resultados obtenidos, y tomar una decisión razonada acerca de cuál sistema debería utilizarse.*
4. *Modificar el sistema de predicción (pero sin utilizar predictores de orden mayor de 3) para incluir en el modelo la variación anual cíclica de la temperatura. [Nota: debe proponerse una solución, utilizando diagramas de bloques, explicando brevemente las ideas utilizadas y su porqué]*

Ejercicio 3. *Se dispone de un cuantificador de 8 niveles, con niveles de decisión*

$$x_n = \frac{n}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., 4$$

y niveles de reconstrucción

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n-1}}{2} & n > 0 \\ \frac{x_n + x_{n+1}}{2} & n < 0 \end{cases}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, ..., \pm 4$$

para una señal $x[n]$ con función densidad de probabilidad

$$p(x) = ae^{-2|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

siendo a una constante a determinar.

1. *Determinar la varianza del ruido de cuantificación (separando granular y de sobrecarga).*
2. *Calcular la relación señal a ruido de cuantificación (en dB).*

Ejercicio 2)

1) Como son valores grandes, lo más seguro es que la variable aleatoria de las temperaturas $X(n)$ tenga media. Por lo tanto la calculamos y se la quitamos a los valores dados, y así tendremos una s.a con media nula para poder aplicarle el modelo AR, ya que la s.a $X(n)$ al tener media nula dará lugar a un proceso regular.

$$m_X = \frac{1}{n^{o}\ \text{total}} \sum_{i=0}^{23} X(i) = \frac{1}{24} \cdot 359'2 \simeq 15'5$$

1er fila $X(0)$ --- $X(11)$

2º fila $X(12)$ --- $X(23)$

Quitamos 15 a los valores dados y queda.

-6'06, -5'6, -0'7, 3'7, 8'3, 8'8, 11'1, 10'5, 9'1, 3'9, 2'4, -1'4

-1'3, -0'8, -0'6, 3'6, 8'6, 9, 10'6, 10'4, 9'2, 3'4, 1'6, -0'1

Para hallar los predictores óptimos, aplicamos el algoritmo de Levinson-Durbin. Para ello necesitamos la autocorrelación de $x(n)$. Pero no nos la dan; nos dan un conjunto de valores de x(n), por lo que tenemos q estimar la autocorrelación

a) $r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=m}^{N-1} x(n)\, x(n-m)$ ~~in~~sesgado

b) $r'_x(m) = \frac{N}{N-|m|} r_x(m)$. insesgado.

Usamos el estimador sesgado, ya que este nos va a asegurar que la secuencia de la autocorrelación es válida. Con el estimador insesgado esto no lo podemos garantizar.

$$r_x(0) = \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{23} x^2(n) = 21'4$$

-6'06, -5, -5'16, -0'76, 3'8, 4'3, 6'63, 6'03, 4'6, -0'56, -2'06, -5'86
-5'7, -5'26, -5'06, -0'86, 4'13, 4'5, 6'13, 5'93, 4'23, -1'06, -2'86, -4'56.

$$r_x(1) = \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{23} x(n)\, x(n-1) = 16'443$$

$r_x(2) = 8'443$

$r_x(3) = -1'768.$